Eesti kirjawara № 5.

Esimesed Geometria õpetused.

Eesti koolilastele ja iga mõetmise õpetuse himustajale

kirja pannud

J. Tülk.

Tartus.
Schnakenburgi trükk ja kulu.
1880.

Hind 30 kop.

Esimesed

Geometria õpetused.

Eesti koolilastele

ja iga mõetmise õpetuse himustajale

kirja pannud

J. Tülk.

Tartus.

Schnakenburgi trükk ja kulu.

1880.

Zensuri poolest lubatud. — Tallinnas, 15. Märtsil 1879.

Eessõna.

Sõna geometria tähendab maamõetmist ja arwatakse wana aja-lu'u kirjade järele, et kõige esimine maamõetmine Egyptusemaal ette olla tulnud. Sest nendes kirjutakse: „Kui Niiluse jões wesi wäga kõrgesse tõusis, ja tema kange ja kareda woolamisega oma kaldaid, kelle ääres rammusad wiljapõllud haljendasiwad, sagedaste maha lõhkus, ja seda wiisi ühes ja teises kohas jõe äärtse põllumeestele suurt kahju tegi, laskis kuningas Sesostris nende põllud ära mõeta, et tema iga põllumehe käest riigi-maksusid põllu suuruse järele wõiks pärida." Et niisuguse põllu suuruse mõetmise juures üksikuid geometria õpetusi waja oli, kelle toel seda tööd kergema waewaga wõis teha, sest saab iga mees kergeste aru. Edaspidi leidsiwad weel siin ja seal terawa mõistusega mehed mõne geometria õpetustüki juure. Wiimati olli siis üks Greeka mees, nimega Euklid, kõik üksikud geometria õpetustükid kokku korjanud ja nende üle esimise geometria raamatu, 300 aastat enne Kristust, Aleksandria linnas Egyptusemaal kirjutanud. Aga pärast seda ja kõige uuemal ajal on geometria oma teaduse suurusega nõnda laiale lagunenud, et julgeste ütelda wõib, kus iganes tarwilik töö tehtud saab, seal juures on ka ikka geometria õpetusi leida. Aga geometria teadus on niisama raske õppida, kui õpetada; selle pärast on see wäikene raamat nõnda kokku seatud, et tema toel kõige kergemal wiisil iga õppija wõiks edasi jõuda. Esimise raamatu jau sees saab lühedalt geometria algusjuhatustest räägitud; joonte, winklite ja kujude üle seletust antud ja kerge ülesannete ja nende juhatuste toel selgemat arusaamist iga õppijale pakutud. Teise raamatu jau sees saawad kergemad geometria õpetused õpetatud ja ka nende õpetused põhjendatud. Niisugune geometria õpetuste põhjendamine on iga õppijale terawama mõistuse harimiseks wäga kasulik. Ülesanded ja nende juhatused on jälle tulusad näitused, mill wiisil mitme suguse töö juures neist õpetustest töö kergituseks nõuu wõib leida. Wiimaks pean mina tunnistama, et ma lektori herra Dr. Weskel suurt tänu wõlgu olen, kes keele parandamise poolest minu tööd on awitanud.

Juhataja.

Esimene jagu:

Teine jagu:

Tähendused.

$=$ ühesugune (. . . kellega).
$<$ wähem kui (üks teine).
$>$ suurem kui (üks teine).
$\parallel$ jooksewad ühtlasi.
$\triangle$ kolmnurk.
$\square$ pikkruut.
$\square$ ruut.
$\sim$ ühekujuline.
$\cong$ täisühtlane.
$\angle$ winkel.
$\perp$ ristlood.

Esimene jagu.

Geometria alusjuhatused.

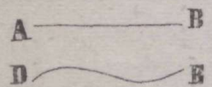
Ruum on ilmlõpmata ja iga keha on üks jagu sest ilmlõpmata ruumist. Ruumikeha piirid (tema pind) on wäljad, wälja piirid on jooned; joone piir on tema hakatuse ja lõpetuse punkt.

§ 1. **Ruumikehal** on kolm mõetu, **pikkus**, **laius**, **kõrgus** (ehk **sügawus**.)

§ 2. **Wäljal** on kaks mõetu, **pikkus** ja **laius**.

§ 3. **Joonel** on üks mõet, **pikkus**.

§ 4. **Punkt** on ilma mõeduta; tema näitab paljalt kus üks joon peale hakkab ja ära lõpeb.



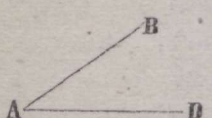
§ 5. **Õige joon** AB on kõige lühem tee kahe punkti wahel.

§ 6. **Joont**, mis mitte õige ega õigist joontest pole kokku seatud, nimetatakse **kõwerjooneks**, DE. Ülepea on geometria õpetusel kaks joont teada: **õige** ja **kõwer**; kõik teised jooned on kokku seatud jooned.

§ 7. **Ühetasane** ehk **tasane wäli** on nõnda kui wee pind.

§ 8. **Kumer wäli** on niisugune, kellel sugugi tasandust ei ole.

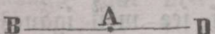
§ 9. **Geometriat**, mis ühe wälja peal seiswaid suurusid (kujusid) mõetma õpetab, nimetatakse **Planimetriaks** (ehk wäljamõedu õpetuseks).



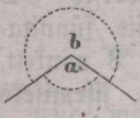
§ 10. Kui kaks joont, AB ja AD, ühe punkti peale (A) kokku jooksewad, siis sünnitawad nemad **winkli**, BAD.

§ 11. **Winkli suurust** ei mõeda mitte tema külgede pikkus, waid nende **launts**.

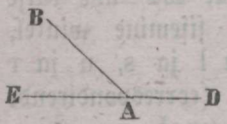
§ 12. **Kaks winkelt on ühesuurused,** kui nemad oma ühenduse punktist ühe ja sellesama lautusega wälja jooksewad.



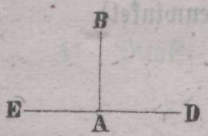
§ 13. **Winkelt,** kelle küljed ühenduse punkti A mõlemile poole, AB ja AD, õiges joones wälja jooksewad, nimetatakse **õigeks winkliks,** BAD.



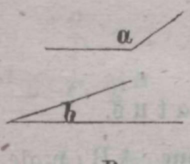
§ 14. **Winkelt,** mis weiksem on kui õige winkel, nimetatakse **õõneswinkliks** (konkaw), nõnda a, ja mis suurem on kui õige winkel, seda nimetatakse **kõrgewinkliks** (konweks), b.



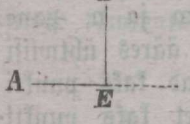
§ 15. **Kui õige winkel** EAD õige joone AB läbi kaheks winkliks jautud saab, nõnda kui siin DAB ja BAE, siis nimetatakse neid **kõrwu-winkliks** (Nebenwinkel). **Kõrwuwinklitel on üks ühenduse punkt** (siin A), **üks ühtlane külg,** AB, — ja nende kaks teist külge, AE ja AD, **seisawad õige joone peal.**



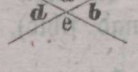
§ 16. Kui kaks **kõrwuwinkelt** ühesuurused on, siis nimetatakse neid **täiswinkliks** (rechter Winkel), nõnda DAB ja EAB.



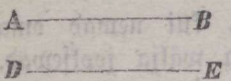
§ 17. **Winkelt,** mis suurem on kui täiswinkel, nimetatakse **nüriwinkliks** (siin a), ja mis weiksem on kui täiswinkel, **terawwinkliks** (siin b).



§ 18. Kui kaks joont, AE ja DE, teine teisega ühe punkti peal kokku puuduwad ja ühe **täiswinkli** sünnitawad, siis on nemad mõlemad teine teise peal **ristloodis.**

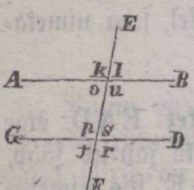


§ 19. **Kui kaks joont teine teisest läbi jooksewad,** siis sünnitawad nemad oma ühenduse punkti ümber neli winkelt, kellest need kaks, mis teine teise wastu seisawad, ühesuurused on, nõnda $\angle a = \angle e$ ja $\angle d = \angle b$; neid nimetatakse **ristwinkliks** (Scheitelwinkel).



§ 20. Kaks joont (siin AB ja DE), mis teine teisega nõnda ühtlasi jooksewad, et nemad teine teisest ikka ühekaugusele jääwad, kui meie neid ka nii pikaks teeksime, kui see meil iganes wõimalik on, nimetatakse ühtlasi jooksjaks ehk **parallel-jooneks.**

§ 21. Kui kahest ühtlasi jooksjast joonest (von zwei Parallel-Linien), AB ja GD (ütle: joon AB jookseb GD joonega ühtlasi), kolmas joon, EF, läbi jookseb, siis sünnitawad nemad oma ristpunkti ümber 8 winkelt, kellest k l t r **wäliseks** ja o u p s **sisemiseks winkliks** nimetatakse.



Kahe läbi jooksja joone EF ühe külje peal üks wäline ja teine sisemine winkel, k ja p, o ja t, nõnda ka l ja s, u ja r nimetatakse **küliswinkliteks** (correspondirende Winkel.)

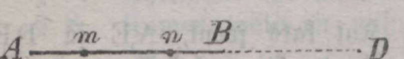
Kaks teine teise pool läbi jooksjat joont seisjat winkelt, u ja p, o ja s nimetatakse **wahetuswinkliks** (Wechselwinkel).

Kaks ühelpool läbi jooksjat joont EF seisjat winkelt o ja p, u ja s nimetatakse **wastuswinkliks** (Gegenwinkel).

A. Ülesanded.

1) Õiget joont AB pikendada.

Juhatus.

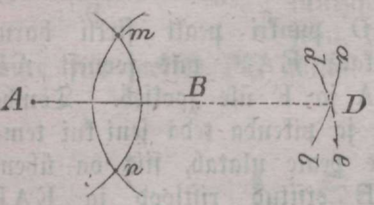


Tee joone AB peale kaks punkti m ja n, pane joonilaud nõnda, et tema nende mõlema punkti ääres ühtwiisi seisab, ja tõmma siis BD. Miks pärast peawad kaks punkti joone AB peale tehtud saama? Sellepärast et kaks punkti õige joone seisu täielikult näitawad. (Nõnda tõmbab ka maamõetja wälja peale, keda tema ära mõeta tahab, omad sihid).

2) Üht punkti leida, kellest õige joon AB, kui tema pikendatud saab, peab läbi jooksma?

Juhatus.

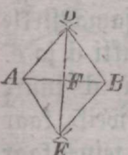
Pane sirkli haru A juure joone otsa peale ja kirjuta teise haruga kaar mn, nõndasama ka punkti B pealt wastu teine



kaar, mis esimisest m ja n juures läbi lõikab. Pane nüüd üks sirkli haru punkti m peale ja kirjuta teise haruga D juures kaar ab, ja nõndasama punkti n pealt kaar de, mis esimisest kaarest jälle läbi jookseb, siis on nende mõlema kaare ab ja de lõigu punkt D leitud punkt.

3) Õiget joont AB poolitada.

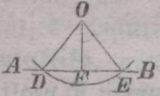
Juhatus.



Kirjuta esite A pealt ühe sirkli-laiusega kaks kaart D ja E, ja sellesama sirklelaiusega B pealt wastu, nõnda et need kaared D ja E juures teine teisest läbi jooksewad; siis poolitab ühenduse joon DE õiget joont AB, nõnda et AF = BF on.

4) Punkti O pealt ristlood õige joone AB peale tõmmata.

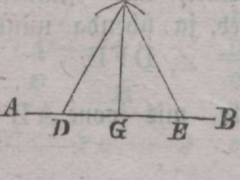
Juhatus.



Pane üks sirkli haru punkti O peale ja kirjuta teise haruga üks kaar, mis õigest joonest AB kahes punktis DE läbi jookseb; poolita joon DE punkti F läbi, siis seisab joon OF ristloodis AB peal.

5) Punkti G kohta, mis õige joone AB peal seisab, ristlood tõmmata.

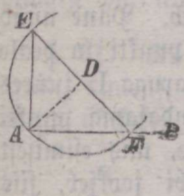
Juhatus.



Tee joone AB peale kaks punkti E ja D, mis G pealt ühe kaugusel on, kirjuta mõlema üle kaks kaart, mis teine teisest F juures läbi jooksewad ja tõmba FG; siis on FG otsitud ristlood.

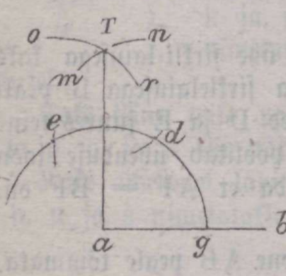
6) Õige joone AB otsa peale ristlood AE teha (täiswinkel walmistada).

Juhatus.



Kirjuta D punkti pealt sirkli harulaiusega AD kaar EAF, mis joonest AB kahes punktis A ja F üle jookseb. Tõmba õige joon FD, ja pikenda teda seni kui tema E juures kaare peale ulatab, siis on ühenduse joon AE otsitud ristlood ja EAF täiswinkel.

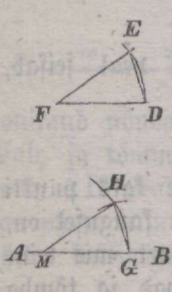
Teist wiisi juhatus.



Pane üks sirkli haru joone otsa peale a juure ja kirjuta teise haruga kaar gde; mõeda siis sellesama sirkle laiusega kaare peale kaks punkti d ja e. Pane jälle üks sirkli haru d juure ja kirjuta teisega T juures weike kaar mn, nõndasama ka e pealt teine kaar, or, mis sest esimisest läbi jookseb. Tõmba nüüd õige joon Ta, siis on Tab täiswinkel.

7) Õige joone peale winkelt teha, mis teise winkliga DFE ühesuurune on.

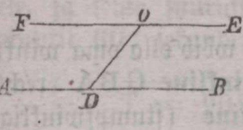
Juhatus.



Kirjuta sirkliga ühenduse punkti F pealt kaar DE, mis mõlemitest winklikülgedest, FD ja FE, läbi jookseb; sellesama sirkli-laiusega kirjuta ka teine kaare joon AB üle, nõnda et üks sirkli haru punkti M peal seisab ja teine kaare GH kirjutab. Nõnda sama jälle G pealt DE laiusega kaare, mis esimisest kaarest H juures läbi jookseb, ja ühenda nüüd MH, siis on $\angle$ GMH = $\angle$ DFE.

8) Punkti O läbi õiget joont tõmmata, mis joone AB^{ga} ühtlasi jookseb.

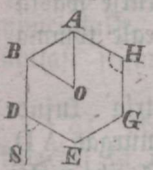
Juhatus.



Tõmba joon OD ja tee ∠ BDO = ∠ DOF (ütle: tee winkel BDO ühesuuruseks winkli DOF^{ga}). Nüüd tõmba joon FO ja pikenda teda seni kui E juure, siis jookseb FE ühtlási (parallel) joonega AB.

I. Seletused.

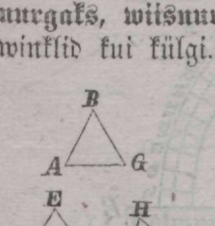
§ 22. 1) Üht iga külje pealt õige joontega ümber piiratud wälja nimetatakse õige joone wiguriks (kujuks) ehk **hulknurgaks** (Poligon): nõnda siin AHGEDB.



2) Õigeid piiri jooni, mis üheteisega kokku puutuwad, nimetatakse **wiguri külgedeks**, ja kokku puutuse punktid, wiguri **nurkadeks** ehk **wahedusteks**. Kõik wiguri küljed oma pikkuse järele kokku ühendatud, nimetatakse wiguri piirideks, nõnda AH + HG + GE + ED + DB + AB.

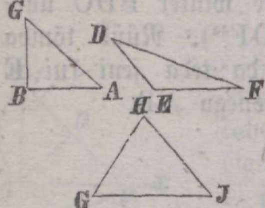
3) Winklid, mis kaks külge üheteisega teewad, ja kelle lautus wiguri sisse poole kannab, nimetatakse **wiguri winkliteks**, nagu AHG, ja winkel, mis selle läbi sünnib, et üks wiguri külg pikendatud saab, nagu SDE, nimetatakse **wäliseks winkliks**. Seisab ühe winkli nukk kesk wiguri sees ja jooksewad tema küljed wiguri külgede peale wälja, siis nimetatakse teda **keskwinkliks**, nõnda siin AOB (Centriwinkel).

4) Üks hulknurk on ühtlaste külgedega, kui kõik küljed ühe pikkused on, ja ükswinklane, kui kõik winklid ühesuurused on. Hulknurke nimetatakse külje aru järele **kolmnurgaks, nelinurgaks, wiisnurgaks** j. n. e. Hulknurgal **on** niisama palju winklid kui külgi.

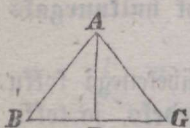


5) Iga kolmnurk on kolmest õigest joonest ümber piiritud jagu ühest ühetasasest wäljast. Kolmnurka, kelle küljed ühe pikkused on, nimetatakse **ühtlaseks kolmnurgaks** ABG (gleichseitig), kellel kaks külge ühe pikkused on, **küliseks kolmnurgaks** DEF (gleich-

schenklich), kellel kõik kolm külge isesugused, nimetatakse **kolmnurk** (ungleichseitig), GHJ.

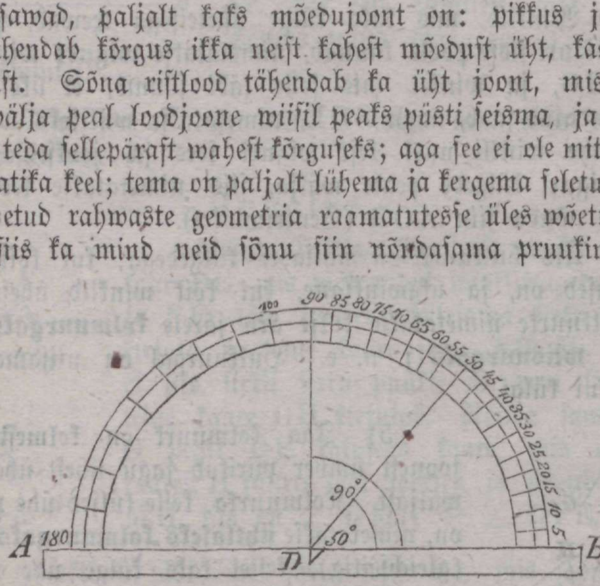


6) Kolmnurk wõib olla oma winkli suuruse järele **täiswinkline** GBA (rechtwinklig), **nüriwinkline** (stumpfwinklig) DEF ehk **terawwinkline** (spitzwinklig) GHJ. Täiswinkli kolmnurgas seisawad need kaks külge, mis täiswinkli sünnitawad, **ristloodis teine teise peal**; neid nimetatakse ka **loodkülgedeks**, nagu GB ja AB; ja see külg, mis selle täiswinkli lautuse pool seisab AG, nimetatakse **lautuse külg** (Hypotenuse).



Kolmnurgal nimetatakse enamiste see alumine külg BG **põhjusküljeks**, ja tema kõrgus ristloodiks AD, mis põhjuskülje wastasest winklist (siin A) põhjuskülje peale tõmmatakse.

Tähendus. Sagedaste nimetatakse planimetria kujude mõetmise juures üht joont, nõnda kui eesseisja kolmnurgas AD, kõrguseks, mis tema mitte ei ole, sest et kujudel, mis ühe wälja peal seisawad, paljalt kaks mõedujoont on: pikkus ja laius. Siin tähendab kõrgus ikka neist kahest mõedust üht, kas pikkust ehk laiust. Sõna ristlood tähendab ka üht joont, mis kaalus seisja wälja peal loodjoone wiisil peaks püsti seisma, ja nimetatakse ka teda sellepärast wahest kõrguseks; aga see ei ole mitte täielik mathematika keel; tema on paljalt lühema ja kergema seletuse pärast kõige õpetud rahwaste geometria raamatutesse üles wõetud ja see sundis siis ka mind neid sõnu siin nõndasama pruukima.



winkli mõet.

§ 23. Täiswinkel on põhjusmõeduks kõige teiste winklitele, ja tema suurust jautakse 90° graadi, graadi 60′ minutisse, minutit 60″ sekundi ja tähendakse nende märkidega:

T = 90° (täiswinklil on 90° graadi).
1° = 60′ (graadil on 60′ minutit).
1′ = 60″ (minutil on 60″ sekundi).

§ 24. 1) Kujud (ehk wigurid), mis teine teisega nõnda ühtlased on, et neid oma winkli külgedega järestiku wõib üheteise peale panna, seni kui nemad kokku langewad ja üheks ainsaks wiguriks (ehk kujuks) jääwad, niisugusid nimetatakse **täisühtlased** (ehk kongruent).

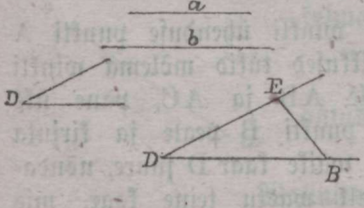
2) Kahes niisuguses täisühtlases kolm- ehk hulknurgas nimetatakse neid külgi ehk nurke, mis järestiku teine teisega ühtlasi seisawad, **ühtlasi seisjad** küljed ehk nurgad.

3) Kahel täisühtlasel kolmnurgal seisawad ühesuurustel külgedel ka ühesuurused winklid wastu.

B. Ülesanded.

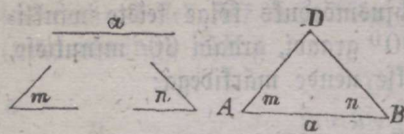
1) Tee üks kolmnurk, kui antud on: kaks külge a b ja nende külgede wahel seisja winkel D.

Juhatus.



Tee esite winkel D = ∠ D. Pane ühe winkli külje peale antud pikkus a = DE ja teise külje peale b = DB, tõmba BE, siis on BDE otsitaw kolmnurk.

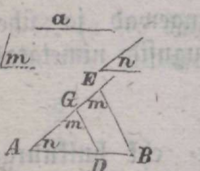
2) Kolmnurk teha, kui antud on: üks külg a ja kaks selle külje peal seisjat winkelt m ja n.



Kirjuta antud külje a = AB otsa peale ∠ m, ja teise otsa peale ∠ n, tõmba AD ja BD, siis on ABD otsitud kolmnurk.

3) Tee kolmnurk, kui teada on: üks külg = a, selle külje peal seisaw winkel m ja teine selle külje wastu seisja winkel n.

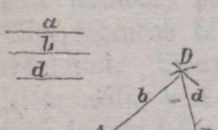
Juhatus.



Tee AB = a, kirjuta winkel n, A juures, AB peale ja tõmba AE, siis pane G juures teine winkel m = AE peale, nõnda et tema teine pikendud külg GD seni kui AB peale puutub, tõmba siis B pealt joon BE, mis ühtlasi GD^{ga} jookseb; seda wiisi on otsitaw kolmnurk AEB leitud.

4) Kolmnurk teha, kui kolm külge teada on.

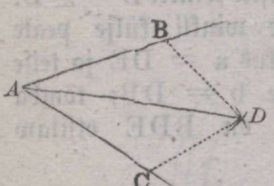
Juhatus.



Tee a = AB ja kirjuta sirkliga A pealt b pikkusega, ja B pealt d pikkusega kaks kaart, mis D juures teine teisest läbi joookseward; tõmba DA ja DB, siis on ABD otsitud kolmnurk.

5) Poolita winkel BAC.

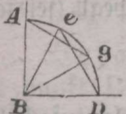
Juhatus.



Mõeda winkli ühenduse punkti A pealt ühe pikkused tükid mõlema winkli külgede peale AB ja AC, pane üks sirkli haru punkti B peale ja kirjuta teise haruga wäike kaar D juure, nõndasama C pealt wastu teine kaar, mis esimisest kaarest D juures läbi jookseb; tõmba joon AD, siis on selle läbi winkel BAC poolitud.

6) Täiswinkel ABD kolme ühesuurusesse jakku jagada.

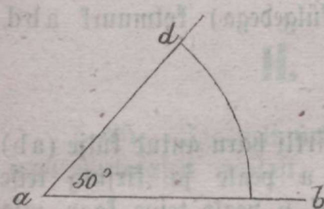
Juhatus.



Kirjuta ühenduse punkti B pealt kaar AD ja mõeda sellesama sirkli laiusega D pealt e juure ja A pealt g juure, tõmba Be ja Bg, siis on $\angle$ ABD kolme ühesuuruse jakku jautud. Bg $\perp$ De ja Be $\perp$ Ag; sellepärast Dg = eg = Ae.

7) Tee winkli mõedu abiga üks winkel, mis 50° suur on.

Juhatus.

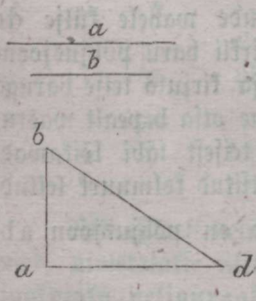


Pane winkli mõet nõnda õige joone ab otsa peale, et D, punkti a peale, ja B, punkti b peale langeb, tee sinna kohta, kus winklimõedu-kaare peal 50° seisab, punkt d ja tõmba ad, siis on winkel dab 50° suur.

Katsu nüüd lühema õpetuse toel walmistada.

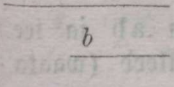
8) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on selle kolmnurga mõlemad ristloodi küljed a ja b.

Juhatus.



Tee antud joone a otsa peale ristlood, nõnda kui ülesande Nr. 6 A all (lehek. 10) seda näitab, pane selle ristloodi peale joone b pikkus ja tõmba siis kolmas külg bd.

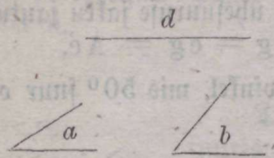
9) Tee täiswinkli kolmnurk, kui antud on lautuse külg a ja ristloodi külg b.



Walmista esite täiswinkel; tee täiswinkli üks külg nõnda pikaks kui b ja pane ülemise b otsa peale lautuse külg a, siis on see punkt, kus lautuse külje teine ots alumise winkli külje peale ulatab, otsitud täis-winkli **kolmnurga kolmas punkt.**

10) Tee täis-winkli kolmnurk, kui antud on: lautuse külg d, ja mõlemad selle lautuse külje otsade peal seisjad winklid a ja b.

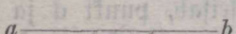
Juhatus.



Pane winkel a lautuse külje otsa ühe peale ja b teise otsa peale, pikenda mõlema winkli küljed nenda kaugele, et nemad teine teisest läbi jookswad; siis on otsitud kolmnurk walmis.

11) Tee ühtlane (ühe pikkuse külgedega) kolmnurk abd, kui tema külg ab antud on.

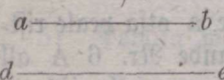
Juhatus.



Pane üks sirkli haru antud külje (ab) pikkusega punkti a peale ja kirjuta teise haruga üks kaar, ja nõndasama punkti b pealt teine kaar, mis sest esimisest läbi jookseb; tõmba selle lõigu punkti pealt üks joon punkti a ja teine joon punkti b peale, siis on kolmnurk abd leitud.

12) **Tee küline kolmnurk, kui teada on: põhjus joon ab, ja ühtlane külg de.**

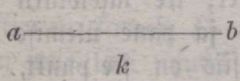
Juhatus.



Wõta sirkli harude wahele külje de pikkus ja pane üks sirkli haru põhjusjoone otsa a punkti peale, ja kirjuta teise haruga weikene kaar, nõndasama ka teise põhjusjoone otsa b pealt wastu, ühenda siis see punkt, kus kaared teine teisest läbi lõikawad, punkti a ja b^ga^ õige joonte läbi, siis on otsitud kolmnurk leitud.

13) Tee küline kolmnurk, kui antud on põhjusjoon ab, ja selle kolmnurga kõrgus k.

Juhatus.



Poolita esite põhjusjoon ab ja tee selle poolituse punkti peale ristlood (waata ülesanded A. nr. 3 ja 5). Tee siis ristlood nõnda pikaks kui antud kõrgus k seda näitab, ja ühenda selle kõrguse punktiga põhjusjoone otsad a ja b.

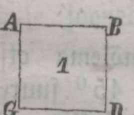
14) Tee winkli mõedu abiga üks winkel, mis 40° suur on.

Juhatus. Pane winkli mõet nõnda õige joone peale, et punkt B winkli külje peal seisab, siis tee sinna kohta, kus winkli mõedu kaare peal 40 seisab, punkt ja ühenda selle punktiga alumise winkli külje otsa punkt, mis D juures seisis; nõnda wiisi sünnitud winkel on 40° suur.

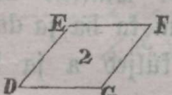
15) Tee winklid, mis 60° 75° 80° ja 110° suured on.

II. Seletused.

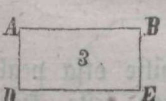
§ 25. Iga nelinurk on neljast õigest joonest ümber piiratud jagu ühetasasest wäljast.



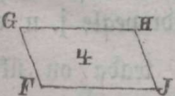
1) **Ruut on nelinurk** ABDG, kellel kõik küljed ühepikkused ja winklid ühesuurused on.



2) **Wilturuut** DEFG on nelinurk, kellel küljed ühepikkused, aga winklid mitte kõik ühesuurused ei ole.

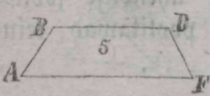


3) **Pikkruut** ABDE on nelinurk, kellel 2 wastastikku külge ühepikkused ja winklid ühesuurused on.

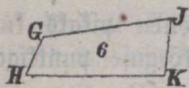


4) **Wiltupikkruut** FGHJ on nelinurk, kellel kaks wastastiku külge ühepikkused, aga nende winklid mitte ühesuurused ei ole.

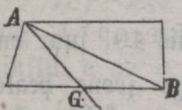
Neli esimest nelinurka kelle wastastikud küljed ühtlasi jooksewad, nimetatakse üleüldise nimega **parallelogrammiks** = **ühtlasi-jooksjaks nelinurgaks** ja tähendatakse selle märgiga ▱.



5) **Trapets** on nelinurk BDFA, kellel 2 külge ühtlasi jooksewad, aga kelle küljed ja winklid mitte ühesuurused ei ole.



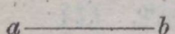
6) **Trapetsoid** on nelinurk GJKH, kelle küljed mitte ühtlasi ei jookse.



Joont AB, mis kaks nurka ühe wiguri sees ühendab, nimetatakse **ühendajaks.** Lähäb joon wigurist läbi, nõnda kui siin AG, siis nimetatakse teda **lõikjooneks.**

D. Ülesanded.

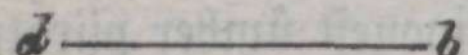
1) Tee ruut, kui ruudu külje pikkus ab teada on.

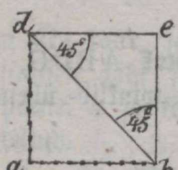


Juhatus.

Tee mõlema joone otsa a ja b peale ristlood (waata ülesanded A Nr. 6), j. n. e.

2) Tee ruut, kui antud on ühenduse joon db.



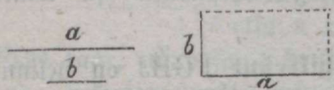


Juhatus.

Tee ühenduse joone mõlema otsa d ja b peale winklid, mis 45° suured on, ja tõmma siis nende winklite üle jooned de ja be, nõndasama ka ba ja da.

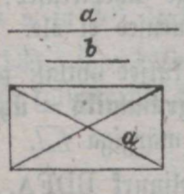
3) Tee pikkruut, kui mõlemad nurga küljed a ja b antud on.

Juhatus.



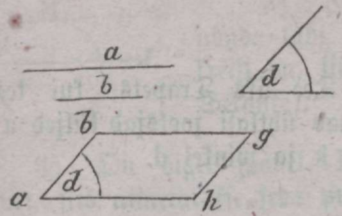
Tee antud külje otsa peale ristlood ja pane teise külje pikkus b ristloodi peale j. n. e.

4) Tee pikkruut, kui teada on üks külg b ja üks ühenduse joon a.



Juhatus.

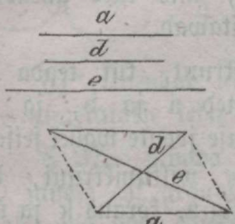
Mõlemad pikkruudu ühenduse jooned on ikka ühepikkused ja poolitawad teine teist. Poolita siis joon a ja nõnda edasi . . . . .



5) Tee wiltu pikkruut, kui teada on kaks nurga külge a ja b, ja see winkel d, mis nende wahel seisab.

Juhatus.

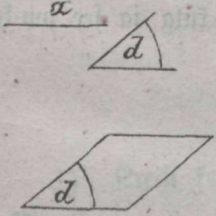
Pane winkel d antud külje a otsa peale ja tee teine winkli külg nii pikaks kui b.



6) Tee wiltupikkruut, kui antud on üks külg a ja mõlemad ühenduse jooned d ja e.

Juhatus.

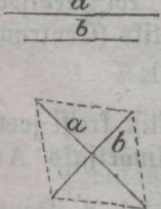
Wiltupikkruudu ühenduse jooned poolitawad ka teine teist, ei ole aga ise mitte ühe pikkused. Poolita siis mõlemad pikkruudu ühenduse jooned ja sünnita nende wahele antud külg a.



7) Tee wilturuut, kui teada on külg a ja üks winkel d.

Juhatus.

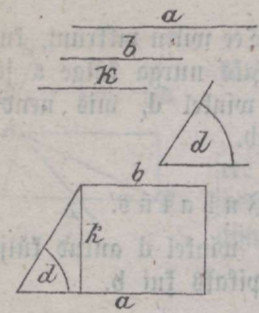
Pane antud winkel d külje a otsa peale ja tõmma selle winkli laiusega üle ge = a j. n. e.



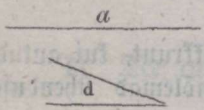
8) Tee wilturuut, kui antud on mõlemad ühenduse jooned a ja b.

Juhatus.

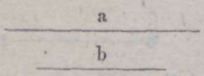
Wilturuudu ühendnse jooned poolitawad teine teist ja seisawad ristoodis üks teise peal...



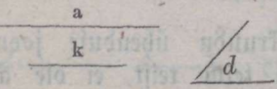
9) Tee üks Trapets, kui teada on mõlemad ühtlasi jooksjad küljed a ja b, kõrgus k ja winkel d.



10) Tee pikkrut, kui teada on ühenduse joon a ja see winkel d, mis kaks ühenduse joont teine teisega sünnitawad.



11) Tee wiltupikkruut, kui teada on mõlemad ühenduse jooned a ja b, ja see winkel, mis nende ühenduse joonte wahel seisab.



12) Tee wiltupikkruut, kui teada on üks külg a, kõrgus k ja üks winkel d.

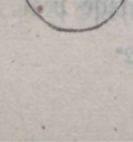
13) Tee wilturuut, kui teada on üks ühenduse joon ja wilturuudu kõrgus.

14) Tee Trapets, kui teada on tema kolm külge a, b, d ja kõrgus k.

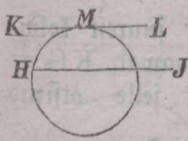
15) Tee pikkruut, kui teada on üks külg ja see winkel, mis mõlema ühenduse joone wahel seisab.

III. Seletused.

§ 26. 1) Wigurit, mis selle läbi sünnib, et ühepikkust õiget joont A G ühe kindla punkti G ümber nõnda kaua pöörtakse, kunni tema oma esimese koha peale jälle tagasi tuleb, nimetatakse **kreisiks**. Selle järele on siis kreisi wäline piir ehk kreisijoon (Peripherie) kindlast punktist G, keda meie **keskpunktiks** (Centrum) nimetame, igal pool ühekaugusel.

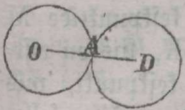


2) Õiget joont, mis keskpunktist kreisi joone peale tõmmatakse, nimetatakse **poolmõetjaks** A G (Radius).



3) Jookseb õige joon HJ kreisi joonest nõnda läbi, et tema pikkus sees ja wäljaspool kreisi on, siis nimetatakse teda **lõikjooneks** (ehk Sekante).

4) On õigel joonel, KL, kreisi joonega üks ühtlane punkt, siis nimetatakse seda **puutujaks** (Tangente) ja punkt M, mis temal kreisi joonega ühtlane on, puutuse punktiks.



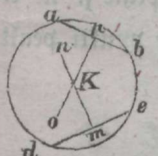
5) Kaks kreisi joont puutuwad teine teisega kokku, kui neil üks ainus puutuse punkt A on.

6) Ühendab üks õige joon, OD, kahe kreisi keskpunktid, siis nimetatakse teda **keskpunkti jooneks** (ehk Centraljoon).

§ **27.** Nõnda wiisi kui täiswinkel (23, 1. õpetuse järele) 90 jausse ehk graadi jautud sai, jautakse ka kreisijooni neljandat jagu, mis ühe täiskeskwinkli külgede wahel seisab, 90° jausse ehk kaare=graadi, ja täiskreisi joon 360 graadi, iga graad 60 minutisse ja iga minut 60 sekundi. Niisugune kaare ja winkli jautamine näitab, et kaare suurus kreisi joone suuruse wastu nõndasama on, kui winkli suurus, mis selle kaare peal seisab, 4 täiswinkli suuruse wastu.

E. Ülesanded.

1) Kreisi keskpunkti K leida.

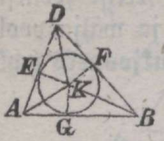


Tõmmame kaks kõitjajoont ab ja de, ja teeme nende keskpunktide m ja p peale ristloodid mn ⊥ de ja po ⊥ ab, siis jooksewad mn op. keskpunktist K läbi.

2) Kolmnurga ABD sisse kreis kirjutada.

Juhatus.

Poolitame winkli A ja B, tõmmame siis üle poolituse punkti K kaks joont, mis K juures teine teisest läbi jooksewad.



Siis on kolm ristloodi, mis K juurest kolmnurga külgede peale tõmmatud saawad, KG = KF = KE ühepikkused, ehk selle otsitud kreisi poolmõetjad.

3) Kolmnurga ABD ümber kreisi kirjutada.

Juhatus.

Tee kahe kolmnurga külje keskpunktide M ja N peale ristloodid MK ja NK, siis on ristloodide lõigupunkt K selle kreisi keskpunkt, mis ümber kolmnurga ABD kirjutada wõib; sellepärast et KD = KB = KA on.

4) Kirjuta nelinurga MNOP ümber kreis, ja tee siis selle kreisi sisse 8 nurk.

Juhatus

Tõmma ühenduse joon pn, poolitada ja pane üks sirkli haru poolituse punkti peale, teise haruga kirjuta kreis MNOP ja poolita kaared PO, ON, NM, MP punktide t, b, r ja u läbi, ja tõmma Pt, tO, Ob, bN ja nõnda edasi, siis on ka 8 nurk selle kreisi sisse walmistatud.

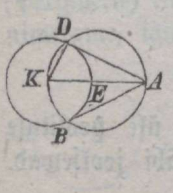
5) Tee antud kreisi sisse korraline kuusnurk.

Juhatus.

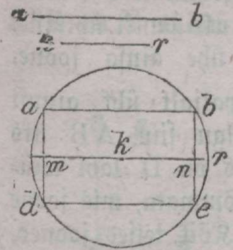
Kreisi poolmõetja ulatab 6 korda kreisi joone peale j. n. e.

6) Wälispool kreisi on punkt A antud, selle punkti pealt puutuja joon kreisi peale tõmmata.

Juhatus.



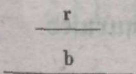
Ühenda punkt A kreisi keskpunktiga; poolita siis ühenduse pikkust E juures ja kirjuta poolmõetja EA^{ga} jälle kreis; siis jookseb wiimane kreisi joon esimesest kreisist kahes punktis D ja B läbi, ja need läbijooksu punktid on siis puutuse punktid.



7) Tee kreisi sisse pikkruut, kui teada on kreisi poolmõetja ja pikkruudu suurem külg.

Juhatus.

Walmista esite antud poolmõetjaga kreis; poolita pikkruudu külg ab ja mõeda sirklega selle külje pool pikkus kreisi keskpunktist mõlemile poole kreisi läbimõetja peale m ja n; tee siis punkti m ja n peale ristloodid ma ja nb j. n. e.



8) Tee kreisi ümber wilturuut, kui antud on kreisi poolmõetja r ja wilturuudu külg b.

9) Kirjuta kahe antud joone ab ja te wahele, mis mitte ühtlasi ei jookse, kreis, mis mõlema joone külge ühes punktis puudub.

Teine jagu.

I. (§ 28). Põhjusõpetused.

1) Kaks suurust, mis kolmandaga ühesuurused, on ka teine teisega ühesuurused; nõnda on:

$$6 + 9 = 15,\ A = D$$
$$8 + 7 = 15,\ B = D$$
$$(6 + 9) = (8 + 7),\ A = B.$$

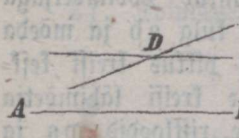
2) Iga täissuurus on suurem kui tema jagu, ja kõik jau suurused kokku annawad jälle täissuuruse.

3) Ühesugused suurused ühtewiisi kaswatatud ehk kahandatud, jääwad ikka ühesuguseks; nõnda oleks:

$$(8 + 6) \times 2 = 28, \quad (9 + 5) \times 2 = 28.$$
$$(14 - 9) = 5; \quad 14 - (3 + 6) = 5.$$

4) Kaks õiget joont wõiwad teine teisest ainult ühe ainsa ühtlase punkti läbi jooksta; on neil rohkem kui üks punkt ühtlane, siis langewad nemad kokku ja sünnitawad ühe ainsa joone.

5) Ühe ainsa punkti läbi on wõimalik paljalt üht ainust joont teise õige joonega ühtlasi tõmmata; olgu siin AB üks joon, D see punkt, siis on D läbi wõimalik ühtainust joont tõmmata, mis joone AB^{ga} ühtlasi jookseb. Kõik teised jooned, mis D punkti läbi tõmmatakse, peawad üksteisest läbi jooksma, kui nad pikendatud saawad.



§ 29. **Õpetus. Kõik õiged winklid on ühesuurused.**

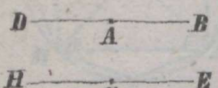
Ööldud:

∠ DAB ja ∠ HGE on õiged winklid.

Tõeks tehtud peab saama:

∠ DAB = ∠ HGE.

(Ütle: winkel DAB on winkli HGE^{ga} ühe suurune).



Tõendus. Wõta ∠ HGE ja pane teda nõnda ∠ DAB peale, et ühenduse punkt G ühenduse punkti A peale, ja winkli külg GE, winkli külje AB peale langeb, siis peab ka põhjusõpetuse (§ 28, 4) järele winkli külg HG winkli külje AB peale langema, sellepärast et neil rohkem kui üks punkt ühtlane on.

§ 30. **Kõik täiswinklid on ühesuurused.**

Ööldud;

∠ ABE ja ∠ JFH on täiswinklid.

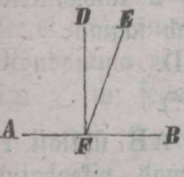
Tõeks tehtud peab saama:

∠ ABE = ∠ JFH

Tõendus. § 29 järele on kõik õiged winklid ühesuurused, ∠ GFH = ∠ DBE, siis peawad ka kõik õige-winkli pooled ühesuurused olema. § 16 näitab meile, et õige winkli pooled täiswinklid on; sellepärast on siis ∠ JFH = ∠ ABE.

§ 31. Õpetus. **Kahe kõrwuwinkli summa ∠ AFE + EFB on 2 täiswinkelt.**

Hõldud:



∠ AFE ja ∠ EFB on kõrwuwinklid.
Tõeks tehtud peab saama:
∠ AFE + ∠ EFB = 2 täiswinkelt.
(Ütle: winkli AFE ja winkli EFB lautused kokku on kaks täiswinkelt).

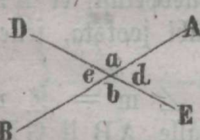
Tõendus. Teeme punkti F peale ristlood DF, siis on ∠ AFE + ∠ EFB = ∠ AFD + ∠ DFE + ∠ EFB = ∠ AFD + ∠ DFB = 2 täiswinkelt..

1) **Lisa õpetus.** On kahest kõrwuwinklist üks teraw, siis peab teine nüri olema.

2) Kõik winklid ühe punkti ümber on kokku ikka 4 täiswinkelt.

§ 32. Õpetus. **Ristwinklid ∠ e ja ∠ d on ühesuurused.**

Hõldud.



∠ e ja ∠ d on ristwinklid.
Tõeks tehtud peab saama:
∠ e = ∠ d
(Ütle: winkel e on nii suur kui winkel d).

Tõendus. ∠ e + ∠ a = 2 täiswinkelt (§ 29).
∠ a + ∠ d = 2 täiswinkelt.

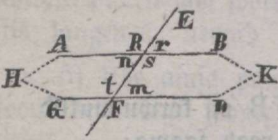
Wõtame mõlemilt poolt ∠ a ära, siis on (põhjusõpetuse § 28, 3 järele) ∠ e = ∠ d.

§ 33. Õpetus. **Kaks joont AB ja GD on ühtlasi jooksjad** (parallel), **kui nemad kolmanda joonega EF, mis neist läbi jookseb,**

1) **Ühesuurused wahetuswinklid (m = n) sünnitawad,**

2) **ehk ühesuurused küliswinklid (m = r) sünnitawad,**

3) **ehk kui kahe wastuswinkli suurus (n + t) kokku 2 täiswinkelt on.**



Ööldud:

1) $\angle m = \angle n$
2) $\angle m = \angle r$
3) $\angle n + \angle t = 2$ täiswinkelt.

Tõeks tehtud peab saama:

AB || GD.

(Ütle: AB on ühtlasi jooksja GD[8a]).

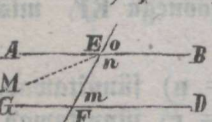
Tõendus. Kui joon GD mitte joonega AB ühtlasi ei jookseks, siis peaksiwad nemad, kui nad mõlemad pikendatud saaksiwad, üks kord teine teisest läbi jooksma. Sünniks see läbijooksmine K juures, siis tõstaksime meie oma mõtete sees wiguri KRF üles, käänaksime ümber ja paneksime teda jälle teise poole wiguri peale nõnda, et ühesuurused winklid m ja n, t ja s ühte langesiwad; siis langeb ka pool wiguri külge RB teise poole wiguri külje FG peale; nõnda ka FD, RA peale; sellepärast peaks siis ka RA ja FG nõndasamati ühe punkti H juures kokku jooksma, kus see punkt K seisma tuleks. Selle järele jooksewad siis mõlemad jooned AB ja GD teine teisest kahe punkti pealt läbi, see on aga põhjusõpetuse (§ 28, 4) wastu. Nõndasama on wastu geometria põhjusõpetust, et AB ja GD ühe külje pool teine teisest wõiksiwad läbi jooksta, sellepärast on siis AB || GD.

2) Kui $\angle m = \angle r$ on, siis on ka $\angle m = \angle n$ (§ 32) sellepärast siis esimise tõenduse järele jälle AB || GD.

3) Kui $\angle n + \angle t = 2$ täiswinkelt on, siis on ka $\angle m + \angle t = 2$ täiswinkelt, ja jälle on $\angle m = \angle n$, sellepärast AB || GD.

§ 34. **Õpetus. Kui kahest ühtlasi jooksjast joonest AB ja GD kolmas joon EF läbi jookseb, siis on:**

1) **wahetuswinklid ühesuurused,**
2) **küliwinklid ühesuurused,**
3) **ja kahe wastuwinkli summa 2 täiswinkelt.**



Öölbud on:

AB || GD

Tõeks tehtud peab saama:

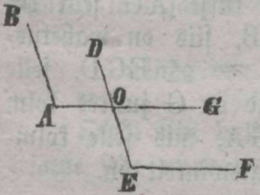
$\angle AEF = \angle m$
$\angle o = \angle m$
$\angle n + \angle m = 2$ täiswinkelt.

Tõendus. Poleks $\angle$ AEF mitte ühesuurune, waid suurem kui $\angle$ m, siis olgu $\angle$ MEF $= \angle$ m, ja selle järele peaks ME ühtlasi GD^{ga} jooksma (§ 33, 1), siis wõiks ühe punkti E läbi kaks ühtlasi jooksjat joont ühe kolmanda joonega tõmmata; see ei ole geometria põhjusõpetuse järele mitte wõimalik (§ 28, 5). Nõndasama ei ole ka mitte wõimalik, et $\angle$ AEF wäiksem oleks, kui $\angle$ m, sellepärast peab $\angle$ AEF $= \angle$ m olema.

2) Teada on, et $\angle$ AEF $= \angle$ o ristwinkel
ja $\angle$ AEF $= \angle$ m wahetuswinkel
sellepärast $\angle$ o $= \angle$ m (§ 28, 1).

3) Teada on, et $\angle$ o $+ \angle$ n $=$ 2 täiswinkelt (§ 31)
ja $\angle$ o $= \angle$ m,
siin wõib sellepärast, $\angle$ o $= \angle$ m, winkel m winkel o asemele pandud saada, ja siis on: m $+ \angle$ n $=$ 2 täiswinkelt.

§ 35. **Õpetus. Kaks winkelt, BAG ja DEF on ühesuurused, kui nende küljed ühtlasi jooksewad, ja mõlemate lautus ühel pool seisab.**



Ööldud on:

BA $\parallel$ DE
AG $\parallel$ EF

Lautused BAG ja DEF seisawad ühel pool.

Tõeks peab tehtud saama:

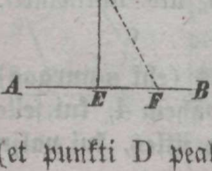
$\angle$ BAG $= \angle$ DEF

Tõendus.

$\angle$ BAG $= \angle$ DOG
$\angle$ DOG $= \angle$ DEF

Sellepärast $\angle$ BAG $= \angle$ DEF (§ 28, 1).

§ 36. **Õpetus. Ühest punktist wõib üks ainus ristlood õige joone peale tõmmatud saada.**



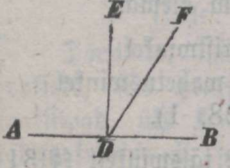
Ööldud on:

DE $\perp$ AB

(Ütle: DE seisab ristloodis AB peal).

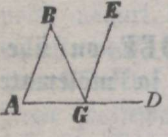
Tõeks peab tehtud saama:
(et punkti D pealt üks ainus ristlood AB peale wõimalik on).

Tõendus. Kui wõimalik oleks D pealt kaks ristloodi AB peale tõmmata, nõnda et DE ja DF mõlemad AB peal loodis seisaksiwad, siis peaksiwad need kaks joont DE ja DF teine teisega ühtlasi jooksma. Siin jooksewad mõlemad jooned D peale kokku; sellepärast ei ole rohkem wõimalik D pealt, kui üks ainus ristlood AB peale tõmmata.



2) Seisab punkt D joone AB peal, ja oleks wõimalik weel D pealt teist ristloodi DF tõmmata, siis peaks ∠ EDB = ∠ FDB olema, mis wastu põhjusõpetust seisab (§ 28, 2), sellepärast et ∠ FDB üks jagu ∠ EDB suurusest on.

§ 37. **Õpetus. Iga kolmnurga kolmwinkli suurust on ühtekokku 2 täiswinkelt.**



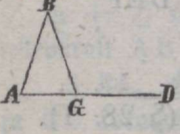
Öölbud:

ABG on kolmnurk

Tõeks peab tehtama:

∠ GAB + ∠ ABG + ∠ BGA = 2 täiswinkelt.

Tõendus. Pikendame ühe kolmnurga külje AG seni kui D juure ja tõmmame G pealt GE ‖ AB, siis on wahetuswinkel B = ∠ BGE ja küliswinkel A = ∠ EGD, selle järele ∠ BGD = ∠ B + ∠ A. Nüüd on G juures kolm winkelt ∠ DGE + ∠ EGB + ∠ BGA, mis selle kolmnurga winklitega ühesuurused ja kokku 2 täiswinkelt on.



Lisa õpetused. 1) Kolmnurga wäline winkel BGD on ikka kahe tema wastu seisja seespidise winkliga A ja B ühesuurune:

∠ BGD = ∠ A + ∠ B.

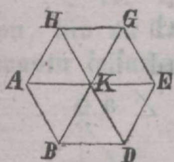
2) Kui kaks winkelt kolmnurgas kahe teise kolmnurgawinkliga ühesuurused on, siis on ka nende kolmas winkel mõlemal ühesuurune.

3) On ühes kolmnurgas üks täis- ehk üks nüriwinkel, siis on kaks teist terawad winklid.

§ 38. **Õpetus. Kõik winklid hulknurgas (ehk n-nurgas) kokku, teewad 2 korda niipalju täiswinklid wähem 4, kui selle hulknurgal külgi on = 2n — 4.** See täht n ütles, kui palju

ühel hulknurgal külgi on. Oleks siin 6 nurk, siis kirjutaksime nõnda:

$$2.6 - 4 = 8 \text{ täiswinkelt.}$$



Ööldud on:
ABDEGH on n=nurk
Tõeks tehtud peab saama:
n=nurga winkli summa on 2n — 4 täiswinkelt.

Tõendus. Tõmma ühest punktist seespoolt n=nurka iga nurga peale ühe õige joone, siis sünnib meile niipalju kolmnurki kui n=nurgal külgi on. Iga kolmnurga winkli summa teeb 2 täiswinkelt, see on 2n täiswinkelt. Wõtame nüüd need 4 täiswinkelt ära, mis punkti K ümber seisawad, siis jääb 2n — 4 täiswinkelt järele.
5 nurga winkli summa on 2. 5 — 4 = 10 — 4 = 6 täiswinkelt
8 „ „ „ on 2. 8 — 4 = 16 — 4 = 12 „ j. n. e.

On ühel n=nurgal kõik winklid ühesuurused, siis leitakse üksiku winkli suurust, kui tema winkli suuruse summa külje summa läbi jautud saab;

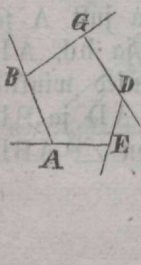
$$\text{nõnda on: } \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n} \text{ täiswinkelt.}$$

Oleks siin hulknurga üksiku winkli suurust waja teada, siis leiame seda nõnda:

$$6^{\text{nurk}} = \frac{2.6-4}{6} = 2 - \frac{4}{6} = \frac{12-4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{8.90^0}{6} = \frac{720^0}{6} = 120^0$$

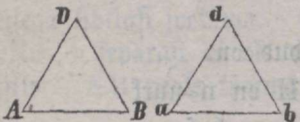
$$7^{\text{me}} \text{ nurk} = \frac{2.7-4}{7} = 2 - \frac{4}{7}\ \frac{180^0 \times 7 - 360^0}{7} = 180^0 - \frac{360^0}{7} = 128\frac{4^0}{7.}$$

Lisa õpetus. n=nurga ehk hulknurga wälise winkli summa on kokku 4 täiswinkelt.



Tõendus. Iga nurga pealt teewad sisemine ja wäline winkel kokku 2 täiswinkelt; n=nurga peal 2n täiswinkelt; wõtame sest summast n nurga seespidise winkli summa 2n — 4 täiswinkelt ära, siis jääb 4 täiswinkelt järele. Olgu siin ABGDE 5 nurk, siis on 2. 5 — (2. 5 — 4) = 4 täiswinkelt.

§ 39. **Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtlased (congruent), kui neil kaks külge ja nende külgede waheline winkel mõlemil ühesuurused on.**



Öölbud on:

AB = ab

AD = ad

∠ A = ∠ a

Tõeks tehtud peab saama:

△ ABD ≅ △ abd.

(Ütle: kolmnurk ABD on täisühtlane kolmnurga abd[aa].

Tõendus. Wõtame kolmnurga abd ja paneme teda nõnda kolmnurga ABD peale, et a just A, ja ab täieste AB peale langeb, siis peab ka ad nõndasama AD peale langema, sellepärast et ad = AD ja ∠ A = ∠ a on; selle järele langeb siis bd ka BD peale ja △ ABD ≅ △ abd.

Lisa õpetus. Kaks täiswinkli kolmnurka on täisühtlased, kui nende mõlemate ristloodide küljed ühesuurused on.

§ 40. **Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtlased, kui neil mõlemil üks külg ja selle külje peal seisjad winklid ühesuurused on.**

Öölbud on:

AB = ab

(Siin tähendawad need kujud, mis § 39 juures seisawad).

∠ A = ∠ a

∠ B = ∠ b.

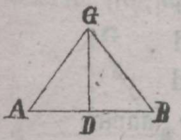
Tõeks peab tehtama:

△ ABD ≅ △ abd

Tõendus. Paneme ab nõnda AB peale, et a just A ja b just B peale langeb, siis peawad ka küljed ad ja bd, AD ja BD peale langema, sellepärast et neil ühesuurused winklid on; nõndasama peab ka punkt d, mis mõlema külje AD ja BD peal ühtlasi seisab, just D peale langema ja siis on △ ABD ≅ △ abd.

Lisa õpetus. Kaks täiswinkli kolmnurka on täisühtlased, kui neil *a)* üks ristloodi külg ja üks teraw winkel ühe suurused on; *b)* kui neil lautuse külg ja üks teraw winkel ühesuurused on.

§ 41. **Õpetus. Kui kolmnurgal kaks külge ühesuurused on, siis on ka need winklid ühesuurused, mis nende külgede wastu seisawad.**



Hõldud on:
AG = BG
Tõeks tehtud peab saama:
∠ A = ∠ B.

Tõendus. Poolitame ∠ G ristloodi GD läbi, siis on △ AGD ≅ △ BGD (§ 36), sellepärast ∠ A = ∠ B.

Lisa õpetused. 1) Ühtlasel kolmnurgal (gleichseitiges Dreieck) on kõik winklid ühesuurused, ja iga winkli suurus on $^2/_3$ täiswinkelt ehk 60^0.

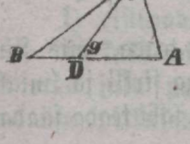
2) Igas ühekülises kolmnurgas (gleichschenkliges Dreieck) on need kaks winkelt, mis tema põhjuskülje peal seisawad, ikka terawad winklid.

3) Igas ühekülises täiswinkli kolmnurgas on mõlema terawa winkli suurus $^1/_2$ täiswinkelt ehk 45^0.

§ 42. **Õpetus. Ühes kolmnurgas AGB seisab suurema külje wastu ka suurem winkel.**

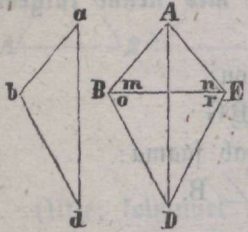
AB > AG
(Ütle külg AB on suurem kui külg AG).
Tõeks tehtud peab saama:
∠ G on suurem kui ∠ B.

Tõendus. Paneme selle külje AG, mis winkli B wastu seisab, AB peale, siis ulatab tema senni kui D juure; sealt ühendame meie DG ühe õige joonega, siis sünnib küline kolmnurk AGD, kellel AG = AD ja ∠ g = ∠ o on. Nüüd on ∠ g winkli B wastu wäline winkel ja (§ 37, 1), järele g > B ja o > B, sellepärast siis ka G > B.



Nõndasama teeme meie tõeks, et ühes kolmnurgas suurema winkli wastu ikka suurem külg seisab.

§ 43. **Õpetus. Kaks kolmnurka on täisühtased, kui nende kolm külge teine teisega ühesuurused on.**



Öölbud on:

AB = ab

BD = bd

AD = ad

Tõeks tehtud peab saama:

△ ABD ≅ △ abd.

Tõendus. Paneme △ abd nõnda △ ABD kõrwa, et nemad oma suuremate külgedega ad ja AD, a just A ja d just D peale langewad, siis on △ AED △ abd asemele seatud. Tõmmame meie joone BE, siis on nendes ühekülistes kolmnurkades BAE ja BDE ∠ m = ∠ n, ja ∠ o = ∠ r, nõnda ka ∠ m + ∠ o = ∠ n + ∠ r ja sellepärast (§ 39) △ ABD ≅ △ AED ≅ △ abd.

§ 44. Neist täisühtlaste kolmnurkade tõendustest oleme õppinud, et iga kolmnurka selgeste wõib ära tunda:

1) kahest küljest ja sest winklist, mis nende wahel seisab;
2) ühest küljest ja kahest winklist;
3) kolmest küljest;
4) kahest küljest ja suurema külje wastu seisjast winklist.

Siin oli meil kolmnurga selgeks teaduseks kolme suurust waja, kellest iga kord kõige wähemalt üks külg teada pidi olema.

Iga täiswinkli kolmnurga selgeks teaduseks on kaht suurust waja:

1) mõlemad ristloodi küljed
2) üks ristlodi külg ja üks teraw winkel
3) lautuse külg ja teraw winkel
4) lautuse ja ristloodi külg.

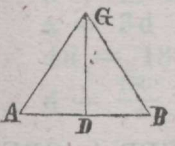
On meil kolmnurgast tarwilikud suurused teada, mis siin üles tähendatud, siis wõime meie selle kolmnurga sirkli ja liniali abiga üles seihkendada, ehk tema suurust arwamise läbi teada saada.

§ 45. Kui külise kolmnurga winklist, mis tema põhjuskülje wastu seisab, joon nõnda tõmmatud saab, et tema neist kolmest küsimisest:

1) saab põhjuskülje wastane winkel poolitud?

2) saab põhjuskülg ise poolitud?

3) seisab joon ristloodis põhjuskülje peal? — ühe ära wastab, siis saawad need kaks teist küsimist ka selle läbi wastatud.



Oöldud on:

1) $\angle$ AGD = $^1/_2$ $\angle$ AGB

2) AD = BD

3) GD $\perp$ AB

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD

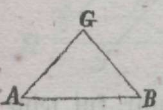
Tõendus. 1) Kui $\angle$ AGD = $\angle$ BGD on, siis on $\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD (§ 39).

2) Kui AD = BD, siis on $\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD (§ 39).

3) Kui GD $\perp$ AB, siis on $\triangle$ AGD $\cong$ $\triangle$ BGD (§ 40, 1).

Need tõendused näitawad, et iga kord need kolm küsimist 1) $\angle$ AGD = $\angle$ BGD? 2) AD = BD? 3) GD $\perp$ AB? wastatud saawad.

§ 46. **Õpetus. Kaks külge kokku on igas kolmnurgas ikka suuremad kui tema kolmas külg.**



Oöldud on:

ABG kolmnurk

Tõeks tehtud peab saama:

AG + BG > AB

(Ütle: külg AG ja külg BG on kokku suuremad kui külg AB).

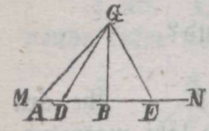
Tõendus. Õige joon AB on kõige lühem tee A juurest B juure (§ 5), sellepärast peab murtud joon AG + BG suurem olema kui AB.

§ 47. **Õpetus. Tõmmame punkti G pealt, mis wäljaspool õiget joont MN seisab, selle peale ristloodi GB ja mitu wiltu joont, GE, GD ja GA, siis on:**

1) ristloodi joon GB lühem kui teised wiltu jooned.

2) kaks wiltu joont, GD ja GE, mis ristloodi jala punktist B oma jala punktidega ühe kaugusel seisawad (BE = BD), on ühe pikkused.

3) kahest wiltu joonest on see pikem, mis oma jala punktiga ristloodi joonest kaugemal seisab.



Ööldud on:
1) $GB \perp MN$
2) GD ja GE wiltu jooned
3) $AB > BD$

Tõeks peab tehtama:

1) $GB \angle GE$ ja GD
2) $GE = GD$
3) $GA > GD$.

Tõendus. 1) Iga täiswinkli kolmnurgal GBD ja GBE on ristloe külg $GB \angle GD$, ja $GB \angle GE$ (§ 42).

2) Kui $BD = BE$, siis on $\triangle GBD \cong \triangle GBE$ ja sellepärast (§ 39) $GD = GE$.

3) GDB on teraw winkel, ja GDA on nüri winkel, kolmnurga GDA sees on siis $GA > GD$.

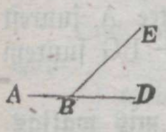
Lisa õpetused. 1) Ühest punktist ei wõi õige joone peale mitte rohkem kui kaks ühepikkust joont tõmmata.

2) Kõige lühem joon, mis ühest punktist õige joone peale tõmmata wõib, seisab selle joone peal ristloes.

G. Ülesanded.

1) Üks kõrwuwinkel ABE on 2 korda nii suur kui teine EBD. Kui suured on nad mõlemad?

Juhatus.



Kahe kõrwuwinkli summa on (§ 31) õpetuse järele ikka 2 täiswinkelt ehk 180^0, sellepärast on siis:

$$\angle ABE + \angle EBD = 180^0$$
$$\angle ABE = 2\ EBD$$
$$\angle 3\ EBD = 180^0$$
$$\angle EBD = \frac{180^0}{3} = 60^0$$
$$\angle ABE = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

2) Üks kõrwuwinkel ABE on 5 korda suurem kui teine EBD. Kui suured on nad mõlemad? ($30^0 + 150^0$).

3) Üks ristwinkel a on 3 korda suurem kui tema kõrwuwinkel d, (waata ristwinklite kuju § 32) kui suur on iga üksikwinkel nende ristwinkliteſt a, b, d, e.

Juhatus.

$\angle a + \angle d = 180^0$

$\angle a = 3d$

$\angle 4d = 180^0$

$\angle d = \frac{180^0}{4} = 45^0$

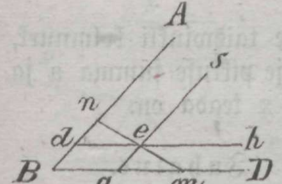
$\angle a = 180^0 - 45^0 = 135^0$

$\angle a = \angle b$ ja $\angle d = \angle e$

Sellepärast $\angle a$ ja $\angle b = 135^0$, $\angle d$ ja $\angle e = 45^0$.

4) Üks ristwinkel a on 4 korda suurem kui tema kõrwuwinkel d, kui suur on iga üksik ristwinkel a, b, d, e? (36^0 ja 144^0).

5) Ühe winkli ABD külgede wahel on üks punkt e antud; selle punkti läbi peab joon mn nõnda tõmmatud saama, et tema mõlema winkli külgedesse puudub ja punkti e läbi poolitud saab.



Juhatus.

Tõmma punkti e läbi BD^{ga} ühtlane joon dh ja jälle punkti e läbi BA^{ga} ühtlane joon gs. Tee gm = Bg ja tõmma punkti m pealt joon mn, mis e punktist läbi jookseb, siis on otsitud joon mn leitud.

Tõendus.

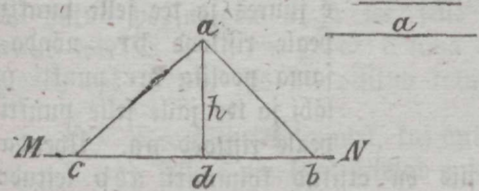
$de = gm$

$\angle nde = \angle egm$

$\angle ned = \angle emg$ (Waata § 40).

$\triangle dne \cong \triangle gem$

Sellepärast $ne = me$.



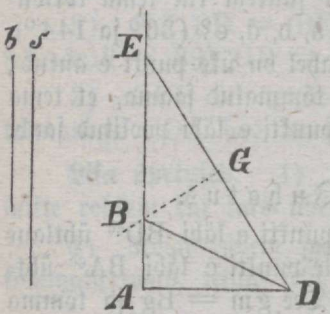
6) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on üks ristloodi külg a ja see kõrgus h, mis täiswinkli wahendusest lautuse külge peale ulatab.

Juhatus.

Tõmma esite õige joon MN, tee selle joone peale, ristlood ad, just nõnda kõrge, kui h pikk on ja wõta siis antud loodi külg a sirkli harude wahele, pane üks haru punkti a peale ja kirjuta teise haruga üks weike kaar, mis b juures MN joonest läbi jookseb, ja tõmba ab. Nüüd tee ab peale punkti a juures üks ristlood ac, mis joone MN peale c juure ulatab, siis on see otsitud täiswinkli kolmnurk bac leitud.

7) Tee täiswinkli kolmnurk, kui teada on üks ristloodi külg b, ja teise ristloodi ja lautuse külje summa s.

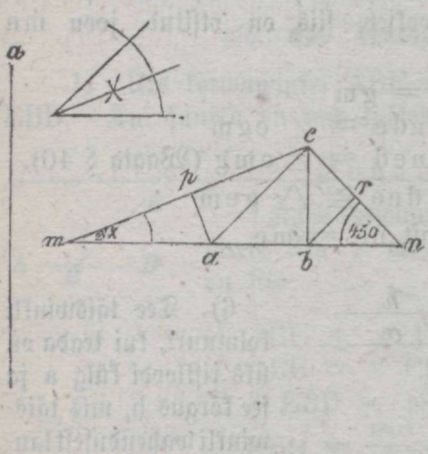
Juhatus.



Tee üks täiswinkel, kelle ristloodi külg AD = b ja teine AE = s on, tõmma lautuse külg ED ja poolita teda G juures; tee G punkti peale ristlood GB. Tõmma weel BD, siis on kolmnurk ABD leitud.

8) Tee täiswinkli kolmnurk, kui kolme külje pikkuse summa a ja teraw winkel x teada on.

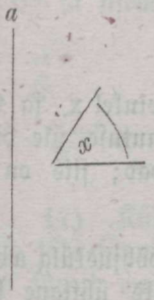
Juhatus.



Tee joon mn, mis nõnda pikk on kui kolme külje summa a ja poolita antud winkel x; pane $^1/_2$ x winkli suurust punkti m peale ja tõmma mc; tee jälle punkti n peale $^1/_2$ täiswinkelt (45°) ja tõmma nc; poolita cn punkti r juures ja tee selle punkti peale ristlood br, nõndasama poolita mc punkti p läbi ja tee jälle selle punkti peale ristlood pa. Ühenda need punktid ac ja cb, siis on otsitud kolmnurk acb leitud.

Tõendus. ac = am (Waata § 45, 2).
ja cb = bn . . . . . .
ab = ab

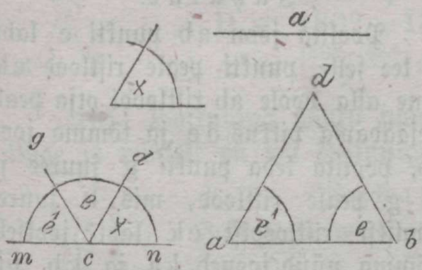
Sellepärast ac + cb + ab = am + bn + ab = mn = a.



9) Tee küline kolmnurk, kui antud on kolme külje pikkuse summa a ja winkel x, mis põhjuskülje peal seisab.

Juhatus.

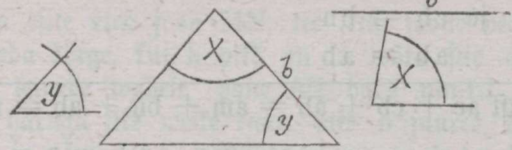
Tõmma esite üks joon, mis nõnda pikk on kui kolme külje summa a ja pane mõlema otsa peale pool winkli x suurust. — Tee nüüd just nõnda, kuidas ülesande Nr. 8 juures juhatatud sai, siis leiad sina selle kolmnurga kergeste.



10) Tee küline kolmnurk, kui teada on põhjuskülg a, ja põhjuskülje wastu seisja winkel x.

Et külises kolmnurgas kaks winkelt, mis põhjuskülje peal ühtlaste külgede wastu seisawad, ikka ühe suurused on, õppisime meie § 41 juures tundma, ja et kolmnurga kolme winkli summa ikka kaks täiswinkelt on, õppisime meie § 37 juures tundma; nende abi läbi wõime meie eesseisjad ülesanded wälja arwata. Kirjuta nüüd punkti c pealt pool kreisi kaar, mis 2 täiswinkelt on ja arwa winkli x suurus selle poolkreisi kaare pealt dcn maha; jauta kaare ülejäädaw (Differenz) dm joone cm läbi kaheks ühesuuruseks winkliks dcg = gcm = (e = è). Tõmma nüüd üks joon ab, mis nõnda pikk on, kui antud põhjusjoon a ja tee selle joone mõlemi otsa peale leitud winklid ∠ è = ∠ e; tõmma nende winkli lautuste üle jooned ad ja bd, siis on otsitud kolmnurk abd leitud.

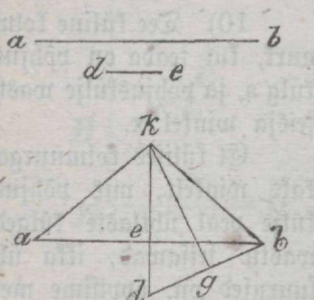
11) Tee küline kolmnurk, kui antud on üks ühtlane külg b, ja mõlemad selle külje peal seisjad winklid x ja y.



Juhatus.

Pane selle antud külje b ühe otsa peale winkel x, ja teise otsa peale winkel y, tõmma mõlema winkli lautuse üle õiged jooned, mis ühe punkti (p) peale kokku jooksewad; siis on see kolmnurk leitud.

12) Tee küline kolmnurk, kui antud on põhjusküng ab ja see ülejäädaw (Differenz) de, mida (palja) üks ühtlane külg pikkem on, kui kolmnurk kõrge.

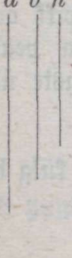


Juhatus.

Poolita joon ab punkti e läbi, ja tee selle punkti peale ristlood ek, pane alla poole ab ristloodi otsa peale ülejäädawa pikkus de, ja tõmma joon db, poolita teda punkti g juures ja tee g peale ristlood, mis k juures esimisest ristloodist ek läbi jookseb. Tõmma nüüd jooned ka ja kb, siis on kolmnurk akb leitud.

Mikspärast saab seda wiisi seekolmnurk leitud? Loe § 45 õpetus! ja mõtle tema õpetuse üle järele, siis leiad sina otsust!

13) Tee kolmnurk, kui antud on kaks külge a ja b ja nende kõrgus h.



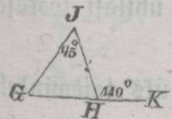
Juhatus.

Tõmma üks õige joon mn, nii pikk kui waja; tee selle peale ristlood, mis nõnda kõrge on kui h, wõta siis sirkli harude wahele esite antud külje pikkus a, pane üks sirkli haru h otsa peale, kirjuta teisega kaar, mis mn joonest läbi jookseb; nõndasama tee ka teise antud küljega b, siis leiad sina selle kolmnurga.

14) Tee kolmnurk, kui teada on külg a, selle külje peal seisaw winkel x ja külje kõrgus h.

15) Tee kolmnurk, kui teada on külg a, üks winkel, mis selle külje peal seisab ja teise kahe külje pikkuse summa $b + d$.

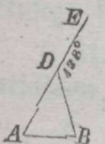
16) Kolmnurga GJH wäline winkli suurus JHK on 110^0 ja sisemene $\angle J = 45^0$; kui suured on $\angle G$ ja $\angle H$?



Juhatus. (Waata § 27, 1).

$$\angle H + \angle JHK = 180^0$$
$$\angle H = 180^0 - 110^0 = 70^0$$
$$\angle G = 180^0 - (70^0 + 45^0) = 65^0.$$

17) Küline kolmnurga ABD wälise winkli suurus (mis selle läbi sünnitatakse, et ühtlane külg pikendatud saab) on 138^0. Kui suured on $\angle D$ ja $\angle A$?



Juhatus.

$$\angle A = \angle B, \text{ ja } \angle A + \angle B = 138^0$$
$$\angle D = 180^0 - 138^0 = 42^0$$
$$\angle A = \frac{180^0 - 42^0}{2} = 69^0.$$

18) Hulknurga winkli summa on 20 täiswinkelt. Mitu külge ja winkelt on sell hulknurgal?

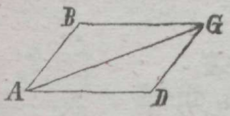
Juhatus.

(§ 38). Hulknurga winkli summa on $2n - 4$; selle järele on siis $2n - 4 = 20$, $n = \frac{20 + 4}{\cancel{4}\,2} = 12$ külge ja winkelt.

---

§ 48. **Õpetus. Igal nelinurgal** (ehk parallelogrammil), **kelle küljed ühtlasi jooksewad, on wastastikud küljed ja winklid ühesuurused.**

Ööldud:



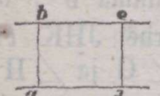
ABGD on parallelogramm.

Tõeks tehtud peab saama:

$AD = BG$ $\quad\angle D = B$

$AB = DG$ $\quad\angle BAD = BGD.$

Tõendus. Tõmmame ühenduse joone AG, siis on $\triangle ADG \cong \triangle ABG$, sellepärast $AD = BG$, $AB = DG$ ja $\angle D = \angle B$, $\angle DAB = \angle DGB$.

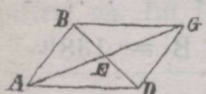


Lisa õpetused. 1) Ühenduse joon AG jautab iga parallelogrammi kaheks täisühtlaseks kolmnurgaks.

2) Ühtlasi jooksjad jooned ühtlasi jooksja joonte wahel on ikka ühepikkused, ab = de.

3) On ühe ühtlaste külgedega nelinurgal üks täiswinkel, siis on ka teised winklid täiswinklid.

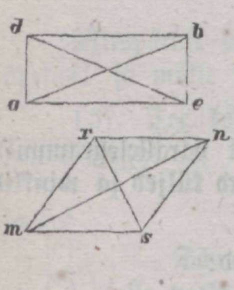
§ 49. **Õpetus. Kaks ühenduse joont AG ja BD poolitawad teine teist nelinurgas, kelle wastuseisjad küljed ühtlasi jooksewad.**



Ööldud on:
$AB = DG$
Tõeks tehtud peab saama:
$AE = GE$, $BE = DE$.

Tõendus. $\left.\begin{array}{l}\angle ABE = \angle GDE \\ \angle BAE = \angle DGE\end{array}\right\}$ küliswinklid
$AB = DG$.

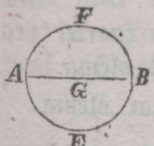
Sellepärast on siis $\triangle ABE \cong \triangle GDE$ ja
$AE = EG$, $BE = DE$.



Lisa õpetus. Täiswinkliga nelinurkades on mõlemad ühenduse jooned ühepikkused, ab = de. Wiltuwinklitega nelinurgas on üks ühenduse joon pikem kui teine, ja ühepikkuse külgedega nelinurgas seisawad mõlemad ühenduse jooned teine teise peal ristloodis, $mn \perp rs$.

II. Kreis ja tema winklid.

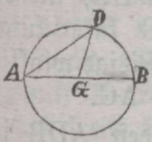
§ 50. **Õpetus. Läbimõetja AB jautab kreisijoone kahe ühesuuruse jakku.**



Öölдud:
AB on kreisi läbimõetja.
Tõeks peab tehtama:
kaar AFB = kaar AEB.

Tõendus. Wõtame kaare AFB ja kääname teda nõnda ümber, et punkt A just A, ja punkt B just B kohta seisma jääks, siis peawad ka kõik teised kaare punktid AFB ja AEB ühe teise peale langema, sellepärast et mõlemad ühe poolmõetja pikkusega sünnitatud on.

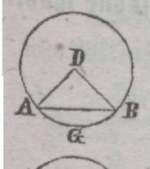
§ 51. **Õpetus. Kreisi läbimõetja AB on pikem kui kõitjajoon AD.**

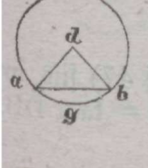


Öölдud on:
AB on läbimõetja ja AD kõitjajoon.
Tõeks tehtud peab saama:
AB > AD.

Tõendus. Tõmmame poolmõetja GD, siis on AG + GD > AD; aga AG + GD = AB, sellepärast AB > AD.

§ 52. **Ühe ja sellesama, ehk ühesuuruse kreiside sees on: 1) ühesuuruse keskwinklitel ühesuurused kaared ja kõitjad jooned, 2) ja ühesuuruse kaarete peal seisawad ka ühesuurused keskwinklid ja kõitjad jooned.**





Öölдud
∠ ADB = ∠ adb.
Tõeks tehtud peab saama:
kaar AGB = kaar agb
kõitjajoon AB = ab.

Tõendus. Kui ∠ D = ∠ d; ja mõlemad kreisid ühepikkuse poolmõetjaga sünnitatud on, siis wõib neid nõnda teine teise peale panna, et nende ühtlased punktid AGBD ja agbd kokku langewad ja sellepärast on kaar AGB = kaar agb köitjajoon AB = ab.

2) On mõlemad kaared AGB ja agb ühesuurused, siis on ka nende köitjad jooned ühesuurused ja $\triangle ADB \cong \triangle adb$ (§ 41) sellepärast $\angle D = \angle d$.

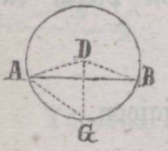
Lisa õpetus. 1) Ühesuuruse keskwinklitel ja kaartel peawad ka ühesuurused kreisilõigud ja kreisiwäljalõigud olema.

2) Suuremal keskwinklil peab ka suurem kaar olema.

§ 53. **Õpetus. Ühesuuruse kreiside ehk ühe ja sellesama kreisi sees peab:**

1) suuremal kaarel suurem köitjajoon,
2) suuremal köitjajoonel suurem kaar olema.

(See õpetus kestab kaartele, mis wähemad kui poolkreisi joon on.)



Tõendus. 1) Kaar AGB > kaar AG. Tõmmame poolmõetjad AD, DB ja DG, siis on nende kolmnurkadel ADB ja ADG kaks külge ühepikkused, aga nende külgede wahelseisjad winklid ADB > ADG, sellepärast AB > AG.

2) Kui AB > AG. Meil on kolmnurkadest ADB ja ADG teada, et winkel ADB > ADG, sellepärast (waata § 42) kaar AGB > kui kaar AG.

Lisa õpetus. Suuremal kaarel on wäiksem köitjajoon, ja wäiksemal köitjajoonel on suurem kaar, kui mõlemad kaared suuremad on kui poolkreisi joon.

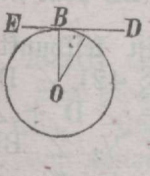
§ 54. **Kui poolmõetja GD köitjajoone AB peal ristloodis seisab, siis poolitab tema köitjajoont ja köitjajoone wastu seisjat kaart.**

Öeldud on:
GD $\perp$ AB.
Tõeks tehtud peab saama:
AE = EB.

Tõendus. $\triangle$ AGE $\cong$ $\triangle$ BGE (§ 45 ja § 47) siis on AE = EB, nõnda ka AD = BD, sellepärast kaar AD = kaar DB.

Lisa õpetus. Kui õige joon kõitjajoone peal ristloodis seisab, siis jookseb tema kreisi keskpunktist läbi, ja poolitab seda kaart, mis kõitjajoone üle seisab.

§ 55. **Õpetus 1. Kui õige joon ED poolmõetja OB otsa peal ristloodis seisab, siis on see joon kreisi puutuja** (ehk Tangente). 2, **Puutuja** (Tangente) **seisab selle poolmõetja peal ristloodis, mis puutuse punkti peale tõmmatakse.**



Öõldud on:

1) ED $\perp$ OB
2) ED puutuja (joon).

Tõeks tehtud peab saama:

1) ED puutuja.
2) OB $\perp$ ED.

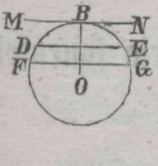
Tõendus. 1) Puutujal on kreisiga üks ainus punkt ühtlane; oleks temal rohkem niisugusid punktisid, siis wõiks meie O pealt ka rohkem kui ühe poolmõetja tema peale tõmmata, mis siin mitte wõimalik ei ole; sellepärast on siis ED kreisi punkti B peal puutuja (joon.)

2) Kui ED puutuja on, ja temal paljalt üks ainus punkt B kreisi joonega ühtlane, siis peawad kõik teised jooned, mis kreisi keskpunktist tema peale tõmmatakse, pikemad kui kreisi poolmõetja olema, sellepärast et ristloodi joon OB kõige lühem tee kahe punkti wahel on.

Lisa õpetused. 1) On kreisijoone peal üks punkt antud, siis wõib selle punkti peale üht ainsat puutujat tõmmata.

2) Tõmmame meie puutuja joone peale sinna kohta, kus temal kreisijoonega ühtlane punkt on, ühe ristloodi, siis jookseb ristloodi joon kreisi keskpunktist läbi.

§ 56. **Õpetus. Kaared, mis ühtlase jooksja kõitjajoonte ehk ühe kõitjajoone ja puutuja wahel kreisis seisawad, on ühesuurused.**



Öõldud on:

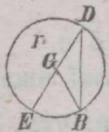
DB ja EB}
DF ja EG} on kaared.

Tõeks tehtud peab saama:

BD = BE
DF = EG.

Tõendus. Tõmmame meie kreisi keskpunktist puutusepunkti B peale poolmõetja OB ristloodi, siis seisab ka tema nende kolme ühtlase jooksja joonte FG, DE ja MN peal ristloodis (§ 55, 2), ja nüüd on (§ 54 järele) kaar BF = BG, kaar BD = BE, sellepärast kaar DF = EG.

§ 57. **Õpetus. Kreisi keskwinkel BGE on pool suurem kui piiriwinkel BDE, mis sellesama kreisi kaare BE peal seisab.**



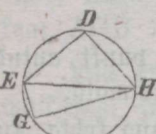
Tõendus. I. Seisab kreisi keskpunkt G piiriwinkli külje peal, siis on (§ 42) ∠ D = ∠ B ja (§ 37, 1) ∠ BGE = ∠ D + ∠ B = ∠ 2B, sellepärast ∠ D = $\frac{1}{2}$ ∠ BDG.

II. Seisab keskpunkt G piiriwinkli wahel ja tõmmame meie läbimõetja DE, siis on winkel ADE = $\frac{1}{2}$ ∠ AGE ja ∠ BDE = ∠ $\frac{1}{2}$ BGE sellepärast ∠ ADB = $\frac{1}{2}$ ∠ AGB.

Lisa õpetused. 1) Piiriwinkli suurust mõedab poolkaar, mis tema külgede wahel seisab.

2) Kõik kreisi piiriwinklid A, B, D, mis ühe ja sellesama kaare GE peal seisawad, on ühesuurused.

3) Üks piiriwinkel D, mis poole kreisijoone peal seisab, on täiswinkel.

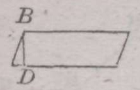


4) Igas nelinurgas, kelle winkli ühenduse punktid kreisi joone peal seisawad, DEGH, on kahe wastastiku seisja winkli E ja H suurus kokku ikka 2 täiswinkelt.

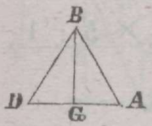
III. Ühejaulised ja ühesuurused geometria suurused.

§ 58. **Seletused.**

1) Wiguri suuruseks arwame meie seda ruumijagu, mis ühetasase wälja peal igalt poolt joontega ümber piiratud on.



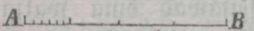
2) Wigurid on ühesuurused, kui nende piiride sees ühepalju ruumi seisab, ilma et nemad oma külgede ehk nurkadega ühtlased oleks.



3) Wiguri kõrgust mõedab ristlood, mis tema ülemise nurga pealt alumise ehk põhjus= joone peale tõmmatakse. Siin on nelinurga kõrgus BD ja kolmnurga kõrgus BG.

Wiguri wälja suurust ära mõeta, tähendab: ühe mõedu järele üles leida, kui mitu korda selle mõedu ruutsuurus tema sees seisab. Üheks niisuguseks mõeduks wõetakse ruuttoll, ruut= jalg, ruutküünar ja nimetatakse seda põhjusmõeduks.

Iga wiguri suurust, olgu tema põld, aed ehk mis tahte, mõedetakse õigete joonte ehk sihtide abiga nõnda, et wiguri laiuse ja pikkuse peale õige joon tõmmatatakse ja nende pikkust põhjus= mõeduga järele mõedetakse ja siis rehkenda= mise abil tema suurust üles leitakse. Niisugune pikkuse mõet wõib olla: toll, jalg, küünar, süld — nõnda kudas see iga kord mõetmisel tarwilik on. Siin AB.



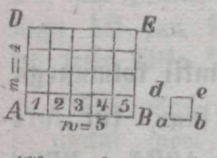
§ 59. **Õpetus. Pikkruudu wälja suurust ABDE leitakse, kui tema kõrgus AD põhjusülje pikkusega AB kaswatud saab.**

Ööldud on: $AD = m$

$AB = n$

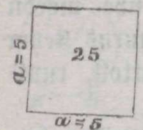
Tõeks tehtud peab saama:

Ws. $= m \times n$ (Ws. tähendab wäljasuurust.)

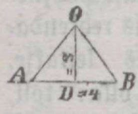


Tõendus. Siin tähendab täht $m = 4$, et põhjusmõet 4 korda kõrguse AD peale ja $n = 5$, et põhjusmõet 5 korda põhjus= külje AB peale ulatab. Olgu siin mõedu pikkus $ab = 1$, ja tema ruut abde. Siis seisab mõedu ja pikkruudu suurus nõnda teine teise wastu:

$AB : ab = n : 1$	
$AD : ad = m : 1$	
$ABDE : abde = m \times n : 1$	$20 : 1 = 4 \times 5 : 1$
$ABDE = m \times n \times abde$	$20 = 4 . 5$
ehk Ws. $= m \times n$	Ws. $= 20$.



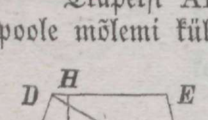
Lisa õpetused. 1. Ruudu wälja suurust leitakse, kui tema külje pikkus iseenesega kaswatud saab. Tähendab $a = 5$ seda külje pikkust, siis on $a \times a = a^2$, $5 \times 5 = 5^2 = 25$ ruutwälja suurus.



2) Kõik kolm- ja nelinurgad, kellel ühesuurused põhjusküljed on, seisawad oma wäljasuurusega nõnda teine teise wastu kui nende kõrgus teine teise wastu seisab.

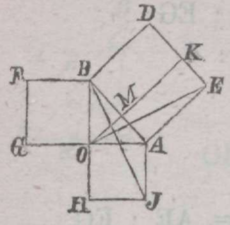
3) Kolmnurga AOB wälja suurust leitakse, kui tema kõrgus OD poole põhjuskülje pikkusega kaswatud saab. Tähendab siin kolmnurga kõrgust $OD = 3$ jalga, ja tema põhjuskülje pikkust $AB = 4$ jalga, siis on tema wälja suurus $\frac{1}{2} AB \times OD = \frac{1}{2} . 4 . 3. = 2 . 3 = 6$ □ jalga.

Trapetsi ABED wäljasuurust leitakse, kui tema kõrgus GH poole mõlemi küljega AB ja DE kaswatud saab.



Oleks siin kõrwas seisja trapetsi kõrgus $GH = 4$ küünart, külg $AB = 8$ küünart ja külg $DE = 6$ küünart, siis oleks tema wälja suurus $4 . \frac{(8+6)}{2} = 4 . 7 = 28$ □ k.

§ 60. **Õpetus. Ruut, mis üle täiswinkli kolmnurga lautuse külje ABDE sünnitatud, on nõnda suur, kui kaks ruutu kokku, mis tema ristloodi küljede peal AOHJ + BFGO seisawad.**



Öõlbud on:

$\angle$ AOB = täiswinkel

Tõeks tehtud peab saama:

$\square$ ABDE = $\square$ AOHJ + $\square$ BOGF.

Tõendus. Tõmmame täiswinkli O pealt OK $\perp$ AB ja weel OE BJ, siis on:

OA = JA ja AE = AB

$\angle$ OAE = $\angle$ JAB sellepärast

$\triangle$ OAE $\cong$ $\triangle$ JAB, aga

$\triangle$ OAE = $^1/_2$ $\square$ AMKE ja

$\triangle$ JAB = $^1/_2$ $\square$ AOHJ

sellepärast et neil ühesuurused kõrgused AO = AJ, ja ühesuurused põhjusjooned AE ja AB on; selle järele on siis $^1/_2$ $\square$ AMKE = $^1/_2$ $\square$ AOHJ ehk $\square$ AMKE = $\square$ AOHJ.

Nõndasama wõib näidata, et BFGO = MBDK, selle järele on siis AMKE + MBDK = AOHJ. + BFGO, ehk $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

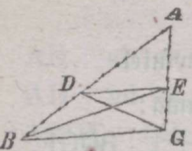
1) Oleks siin kolmnurgas BOA ristloodi küljed BO = 4 ja AO = 3, siis oleks lautuse külg AB = 5, sest et $4^2 + 3^2 = 5^2 = 25 = 16 + 9$. Selle järele on siin kerge üht täiswinklise kolmnurga külge ära arwata, kui kaks teist külge teada on.

2) Oleks meil teada, et üks ristloodi külg 8 jalga ja lautuse külg 10 jalga pikk on, siis wõime kolmandat külge nõnda leida: $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ $\sqrt{36} = 6$ jalga.

Tähendus. Siin on waja, et õppijad ruutarwamisega tuttawaks saaksiwad tehtud, muidu jääks neile mõni järeltulew õpetus segaseks.

§ 61. **Jookseb joon DE kolmnurgas BAG ühtlasi küljega BG, siis jautab tema kolmnurga küljed AB ja AG nõnda, et jagu AD jau DB wastu oma suurusega nõndasama seisab, kui teise külje AG peal jagu AE jau EG wastu.**

Tähendus. On mõlemad küljed ühe mõeduga mõedetud ja ulatab mõet AD peale 12, DB peale 8 ja AE peale 6, EG peale 4 korda, siis leiame nende jagude wahel niisugust wastastiku seisust:



$$AD : DB = AE : EG$$
$$12 : 8 = 6 : 4$$
$$\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Öölbud on: DE || BG.

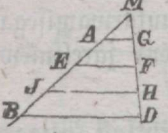
Tõeks tehtud peab saama: AD : DB = AE : EG.

Tõendus. Tõmmame BE ja DG, siis on △ ADE ja △ BDE, kelle põhjusjooned AD ja BD õige joone peal seisawad, ja sellepärast, et neil nurk E ühtlane on, ühekõrgused. Nõndasama on △ ADE ja △ GDE, kelle põhjusjoonedA E ja GE jälle õige joone peal seisawad, ka ühekõrgused. Nõnda on siis (§ 59, 2) nende suurus:

△ ADE : BDE = AD : DB
△ ADE : GDE = AE : EG
△ BDE = △ GDE
sellepärast AD : DB = AE : EG.

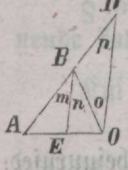
§ 62. **Õpetus. Kaks õiget joont AB ja GD saawad mitmest ühtlasest joonest AG, EF, JH, BD, ühtlaseks wastastiku jau suuruseks ära jautud.**

Tõendus. Kui AB ja GD punkti M peal kokku puutuwad, siis on (§ 61) järele:



ME : MF = AE : GF
ME : MF = EJ : FH nõndasama
AE : GF = EJ : FH
EJ : FH = JB : HD

§ 63. **Õpetus. Kui õige joon BE kolmnurga ABO winkli B poolitab, siis jautab ka tema külje AO nõnda kaheks jauks, et jaud EA ja EO oma suuruse järele teine teise wastu on, kui kaks külge AB ja BO oma suurusega teine teise wastu.**



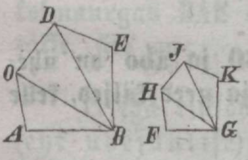
Nõutud on: $\angle ABE = \angle OBE$
Tõeks tehtud peab saama:
$$AE : EO = AB : BO.$$

Tõendus. Tõmmame punkti O pealt joone OD $\|$ EB, siis on § 61 ja § 62 järele
$$AE : EO := AB : BD$$
ja $\angle m = n$, $\angle o = \angle p$ (§ 34)
sellepärast $BD = BO$.

Nüüd wõime BD asemele BO panna, siis on:
$$AE : EO = AB : BO.$$

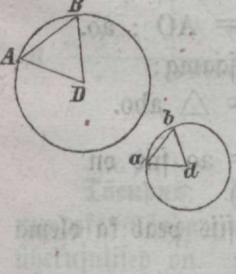
---

§ 64. Seletused.



1) Kaks wigurit on ühekujulised, kui neil winklid ühesuurused ja nende järestiku küljed oma suuruse järele ühejaulised on.

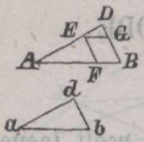
2) Kahe ühekujulisel hulknurgal peab ühe palju külgi ja winklid olema ja nende ühesugused küljed ja winklid mõlemil järestiku seisma AODEB $\sim$ FHJKG.



3) Kahe mitte ühesuuruse kreisi sees on kaared, kreisilõigud ja wäljalõigud ühekujulised, kui nemad ühesuuruse keskwinkli peal seisawad:

Kaar AB $\sim$ ab
Kreisi wäljalõik ABD $\sim$ abd
$\angle ADB = \angle adb$.

§ 65. Õpetus. Kaks kolmnurka on ühekujulised, kui neil mõlemil kaks winkelt ühesuurused on, nõnda et $\angle A = \angle a$ ja $\angle B = \angle b$; siis on $\triangle ABD \sim \triangle abd$.



Hõlbud on: $\angle A = \angle a$

$\angle B = \angle b$

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle ABD \backsim \triangle abd$.

Tõendus. On kaks winkelt mõlemil kolmnurgal ühesuurused, siis on ka kolmas $\angle D = \angle d$. Teeme $AF = ab$ ja tõmmame $FE \parallel BD$, siis on

$$AF : AB = AE : AD \text{ (§ 61)}$$

ja $\triangle AFE \cong \triangle abd$ sellepärast

$$ab : AB = ad : AD.$$

Tõmmame weel $EG \parallel AB$, siis on

$$AE : AD = BG : BD$$

sellepärast et $BG = EF = bd$ on

$$ad : AD = bd : BD$$

$$\text{ja } ab : AB = ad : AD = bd : BD.$$

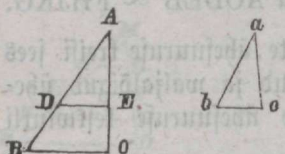
Nüüd on mõlemas kolmnurgas kõik winklid ühesuurused ja nende ühtlasi seisjad küljed ühejaulised, sellepärast

$$\triangle ABD \sim \triangle abd.$$

§ 66. **Õpetus. Kaks kolmnurka ABO ja abo on ühekujulised, kui neil üks ühesuurune winkel ja need küljed, kelle wahel see winkel seisab, ühejaulised on.**

Kui $\angle A = \angle a$ ja $AB : ab = AO : ao$

siis on $\triangle ABO \sim \triangle abo$.



Hõlbud on: $\angle A = \angle a$

ja $AB : ab = AO : ao$.

Tõeks tehtud peab saama:

$\triangle ABO \backsim \triangle abo$.

Tõendus. Teeme $AD = ab$ ja $AE = ao$ siis on

$$\triangle ADE \cong \triangle abo \text{ (§ 39)}$$

ja (§ 66) õpetab et $AB : ab = AO : ao$, siis peab ka olema (§ 61). $AB : AD = AO : AE$, sellepärast

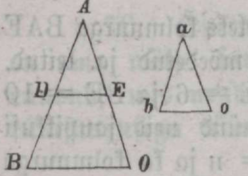
$DE \parallel BO$, ja $\angle B = \angle ADE$ ja siis

(§ 65) $\angle ABO \sim \triangle ADE$, ehk

$$\triangle ABO \sim \triangle abo.$$

§ 67. Õpetus. Kaks kolmnurka on ühekujulised, kui nende kolm külge ühejaulised on.

Kui AB : ab = AO : ao = BO : bo, siis on
△ ABO ∾ △ abo.

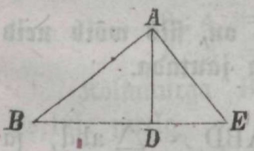


Hööldud on:
AB : ab = AO : ao = BO : bo
Tõeks tehtud peab saama:
△ ABO ∼ △ abo.

Tõendus. Teeme jälle AD = ab ja AE = ao, siis on § 67 õpetuse järele AB : AD = AO : AE ja △ ABO ∾ △ ADE ja sellepärast
AB : AD = BO : DE ja nõnda ka
AB : ab = BO : bo ja AD = ab,
siis peab ka DE = bo olema ja △ ADE ≅ △ abo selle järele on siis △ ABO ∼ △ abo.

§ 68. Õpetus. Kui täiswinkli nurgast A täiswinkli kolmnurgas BAE ristlood AD lautuse külje BE peale tõmmatakse, siis on:

1) iga ristloodi külg AB ehk AE keskmine proportsionali (ehk ühejaulise) **liige, külje BE ja tema jagude BD ja DE wahel, nõnda:**



BE : AB = AB : BD
BE : AE = AE : DE

2) ristlood AD on keskmine proportsionali liige mõlemite lautuse külje jagude BD ja DE wahel:

BD : AD = AD : DE.

Tõendus. 1) Ristlood AD jautab △ BAE kaheks kolmnurgaks nõnda, et mõlemad jau-kolmnurgad täiskolmnurgaga ühekujulised on. Nõnda on △ BAE ∾ △ DBA § 65, sellepärast et neil ∠ B ühtlane ja ∠ BAE = ∠ ADB on. Ühejaulised küljed annawad meile siin niisuguse wastastiku jauseisuse:

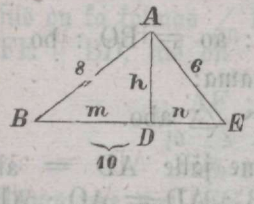
BE : AB = AB : BD

Nõndasama on $\triangle ABE \sim \triangle DAE$, sellepärast ka

$$BE : AE = AE : DE.$$

2) $\triangle DBA \sim \triangle DAE$ (§ 65). Neil mõlemil on D juures täiswinklid ja ka $\angle BAD = \angle E$, sellepärast

$$BD : AD = AD : DE.$$



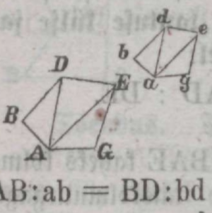
Lisa õpetus. Oleks kolmnurga BAE küljed mõeduga ära mõedetud ja leitud, AB = 8 süld, AE = 6 ja BE = 10 süld. Tahaksime nüüd neid jaupikkusi BD = m ja DE = n ja ka kolmnurga kõrgust AD = h arwamise läbi üles leida, siis rehkendaksime meie nõnda:

$10 : 8 = 8 : m, \quad 10\,m = 64, \quad m = {}^{64}/_{10} = 6{,}4$ süld
$10 : 6 = 6 : n, \quad 10\,n = 36, \quad n = {}^{36}/_{10} = 3{,}6$
$6{,}4 : h = h : 3{,}6, \quad h^2 = 23{,}04, \quad h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 64 \\ 64 \end{array}$$

§ 69. **Õpetus. 1) Kui kaks hulknurka ühepaljulistest ja ühekujulistest kolmnurkadest kokku on seatud, siis on ka nemad ise ühekujulised.**

2) **Kui kaks hulknurka ühekujulised on, siis wõib neid järestikku ühepaljulisiks kolmnurkadeks ära jautada.**



Tõendus. 1) $\triangle ABD \sim \triangle abd$, ja $\triangle ADE \sim \triangle ade$, sellepärast on siis ka kõik winklid mõlemais hulknurkades järestikku ühesuurused, ja ka

$$AB{:}ab = BD{:}bd\ (= AD{:}ad) = DE{:}de\ (= AE{:}ae) = EG{:}eg$$

sellepärast ABDEG $\sim$ abdeg

2) Olgu ABDEG $\sim$ abdeg. Tõmmame A ja a pealt ühenduse jooned AD, AE ja ad, ae, siis jautawad need jooned mõlemad hulknurgad ühepaljustesse kolmnurkadesse, sellepärast et

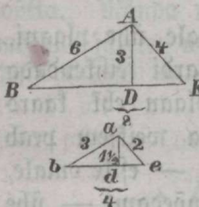
mõlemil ühepalju külgi on. Ja jälle sellepärast, et nemad ühekujulised on, peab $\angle B = \angle b$ olema, ja siis on

$$AB : ab = BD : bd \text{ selle läbi}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle abd$$

Nõndasama on ka teised kolmnurgad ADE $\sim$ ade ja AEG $\sim$ aeg.

§ 70. Õpetus. **Ühekujulised kolmnurgad ja hulknurgad on oma wälja suurusega teine teise wastu nõndasama kui ruudud, mis nende järestiku külgede peale sünnitatud, oma ruutsuurusega teine teise wastu seisawad.**



Hööldud on:

$$\triangle ABE \sim \triangle abe$$

Tõeks tehtud peab saama:

$$\triangle ABE : \triangle abe = BA^2 : ba^2.$$

Tõendus. Sellepärast et $\triangle ABD \sim \triangle abd$, on ka $BE : be = BA : ba$ ja

$$\frac{\triangle BAE}{\triangle bae} = \frac{BE \times BA}{be \times ba}$$

$$\frac{BA}{ba} = \frac{BE}{be}, \text{ nõnda on siis } \frac{\triangle BAE}{\triangle bae} = \frac{AB^2}{ab^2}$$

Oleks siin kolmnurga BAE küljed mõõdetud ja leitud BE = 8, BA = 6 ja AE = 4 küünart, nõndasama ka kolmnurga bae küljed be = 4, ba = 3 ja ae = 2, siis oleks (§ 70) õpetuse järele nende külgede ja wälja suuruse wahel niisugused proportsionid

$$8 : 4 = 6 : 3 \qquad 64 : 16 = 36 : 9$$

$$6 : 3 = 4 : 2 \qquad 36 : 9 = 16 : 4$$

Kolmnurga BAE ja bae wälja suurus on (§ 59, 3) õpetuse järele

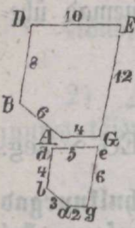
$$\tfrac{1}{2} BE \times AD \text{ ja } \tfrac{1}{2} be \times ad$$

$$\tfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12; \; \tfrac{1}{2} \times 4 \times 1\tfrac{1}{2} = 3$$

$$\frac{4 \times 3}{3} = \frac{36}{9} \text{ ehk } 12 : 3 = 6^2 : 3^2$$

$$12 : 3 = 36 : 9.$$

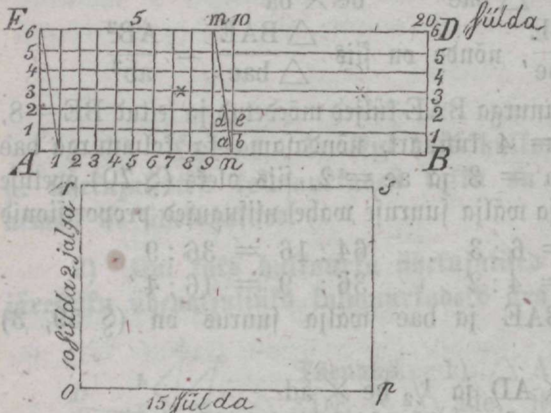
§ 71. Õpetus. **Kahe ühekujuliste hulknurkade piiri pikkused seisawad oma suuruse järele nõndasama teine teise wastu, kui nende järestiku üksikud küljed oma pikkusega ühe teise wastu seisawad.**



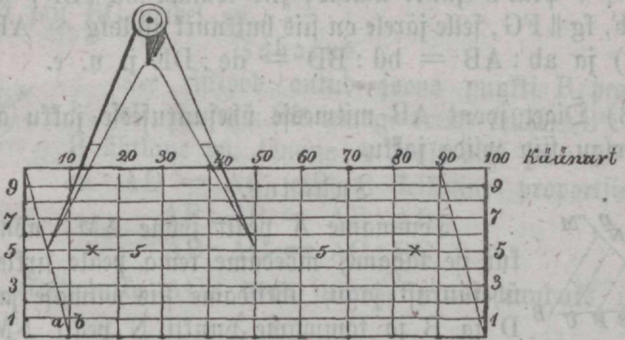
Tõendus. On ABDEG ~ abdeg siis on AB : ab = BD : bd = DE : de = EG : eg, nõndasama AB + BD + DE + EG + GA : ab + bd + de + eg + ga = AB : ab.

Oleksiwad mõlemite hulknurkade külje pikkused nõnda kui siin kõrwas näidatud, siis oleks:
4 + 6 + 8 + 10 + 12 : 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = = 4 : 2, ehk 40 : 20 = 4 : 2.

Lisa. Kui meie ehitamise pärast paberi peale ühe plaani, ehk õue põllu, wõi ka mõne teise maa platsi kaardi seihkendada tahaksime, siis peame meie sellepärast, et see plaan ehk kaard paberi peal, mitu sada, tuhat ehk million korda weiksem peab tehtud saama, kui tema loomulik suurus tõesti on — esite omale, kui meie selle maja põhjuse ehk õue põllu ära mõedame — ühe lühendatud mõedu walmistama, kelle järele meil siis wõimalik on seda plaani ehk kaarti maja õue ehk põlluga täitsa ühekujuliseks teha. See lühendatud mõet peab sest mõedust, kellega meie maja, õue ehk põllupikkust ja laiust mõedame, üks jagu olema, mis selle suurema mõedu sisse ilma järele jäetawata, wõib jagada.



Tahame meie siin ühe õue plaani seihkendada, mis pikkruudu näuline peab olema, ja kelle üks külg 15 sülda ja teine külg 10 kuuejala sülda ja kaks jalga pikkad on, siis teeme sest sülla mõedust lühendatud mõedu nõnda: Wõtame ühe tolli ja jautame teda 10[nesse] jakku, siis tähendab $^1/_{10}$ tolli pikkus plaani peal sülla pikkust õue peal, ehk üks toll plaani (kaarti) peal 10 sülda õue peal. Tahame meie ka nüüd jalapikkust selle lühendatud mõedu läbi tähendada, siis teeme mõedu 2 tolli pikaks = ED = AB ja sünnitame mõlemi mõedu otsa peale ristloodid AE ja BD; jautame nende kõrgust 6^{de} ühesuurusesse jakku, ja ühendame need 6 jaupunkti õigete joonte läbi. Tõmmame nüüd ühe wiltu joone mn, siis tähendab see pikkus, mis ab wahel seisab, $^1/_6$ jagu süllast (ehk üks jalg) ja de wahel 2 jalga j. n. e. Selle walmistatud mõeduga wõime meie nüüd õue kaarti teha, kui meie esite 6 jalalise süllapuuga õue küljed oleme ära mõetnud; rs on 15 sülda, see on kaardi peal just $1^1/_2$ tolli, ja or on 10 sülda 2 jalga, see on kaardi peal 1 toll ja de pikkus weel juure wõtta. Nõnda wiisi on siis siin õue kaart oprs sülla põhjusmõedu järele walmistatud ja ta on oma ruutsuuruse järele $720 \times 720 = 518400$ korda wähem kui õue enese suurus.

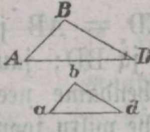


Teine lühendatud mõet siin kõrwas näitab üht küünart, mis 1000^{teks} ühesuuruseks jauks jautud on; see tuhandik jagu seisab ab wahel ja tähendab kaardi ehk plaani peal küünra pikkust.

Niisuguste tähendatud mõetude toel saawad enamiste kõik ehituse plaanid ja ka kõik maakaardid walmistatud.

II. Ülesanded.

1) Joone a——b üle kolmnurk abd teha, mis kolmnurgaga ABD ühekujuline on:



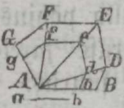
Juhatus:

Tee $\angle d = \angle D$ ja $\angle a = \angle A$, pikenda siis mõlemad winkli küljed ab ja db, seni kui nemad punkti b peal teine teisega kokku jooksewad, siis on (§ 65) $\triangle abd \sim ABD$.

$$ab : AB = bd : BD = ad : AD.$$

2) Antud joone pikkuse a——b üle hulknurka teha, mis teise hulknurgaga ABDEFG ühekujuline on.

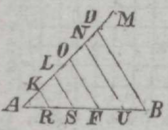
Juhatus.



Tõmma suuremas hulknurgas ABDEFG punktist A ühenduse jooned AD, AE, AF, pane ab nõnda AB peale, et a just A peale langeb ja ab, AB peal b juure ulatab; siis tõmma bd ∥ BD, de ∥ DE, ef ∥ EF, fg ∥ FG, selle järele on siis hulknurk abdefg ∼ ABDEFG (§ 69) ja ab : AB = bd : BD = de : DE j. n. e.

3) Õiget joont AB mitmesse ühesuurusesse jakku ära jautada, olgu siin wiide jakku.

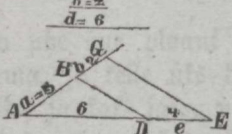
Juhatus.



Tõmmame A pealt joone AM, nõnda pika kui ise tahame, mõedame tema peale sirklega wiis ühesuurust jagu, ühendame siis wiimase jaupunkti D ja B ja tõmmame punkti N pealt NM ∥ DB, nõndasama OF ∥ NU, LS ∥ OF ja KR ∥ LS, siis saab nende ühtlas jooksja joonte läbi AB wiieks ühesuuruseks jauks jagatud (§ 61).

4) Kolme antud joonte, a, b, d neljandat ühejaulist (proportsionaali) joont e leida.

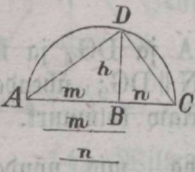
Juhatus.



Tee $\angle GAE$ ja pane külje AG peale $a = AB$, ja $b = BG$ ja teise külje AE peale $d = AD$, ühenda BD ja tõmma GE ∥ BD, siis on DE see neljas otsitaw proportsionaali joone pikkus (§ 61)

$$AB : BG = AD : DE$$
$$a : b = d : e$$
$$3 : 2 = 6 : 4$$

5) Kahe joone wahel, m ja n keskmist proportsionaali joont h leida.



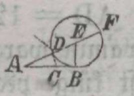
Juhatus.

Pane antud jooned m ja n õige joone AC peal teine teise wastu, kirjuta poolmõetja $\frac{m+n}{2}$ üle m + n = AC poolkreisi AC, tee ristlood BD selle punkti peale (B), kus m ja n kokku puutuwad, siis on DB = h otsitud keskproportsionaali joon m ja n wahel ja (§ 68)

$$AB : BD = BD : BC$$
$$m : BD = BD : n$$

6) Joont A——B nõnda kahe jakku jagada, et tema suurem jagu keskmine proportsionaali liige täie joone AB, ja tema wäiksema jau BC wahel on.

Juhatus.

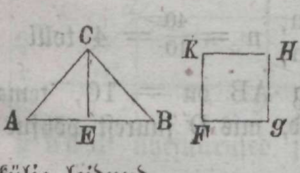


Tee ristlood antud joone punkti B peale = ½ AB, kirjuta siis temaga kreis kellel AB^ga punkt B ühtlane on, tõmma A pealt õige joon AF, siis on AD = AC otsitaw keskmine proportsionaali joon ja

$$AF : AB = AB : AD$$
$$AB : AC = AC : BC$$

7) Kolmnurka ACB tema suuruse järele ruuduks ümber muuta.

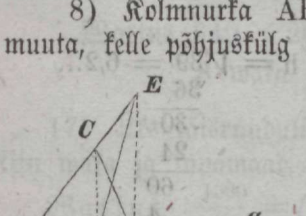
Juhatus.



Otsime kolmnurga põhjuskülje AB ja tema poole kõrguse CE wahel keskmise proportsionaali liikme FG üles, siis oleme ka tema läbi otsitud ruudu külje leidnud.

$$AB : FG = FG : \tfrac{1}{2} EC \text{ ehk } FG^2 = \tfrac{1}{2} AB \times EC$$

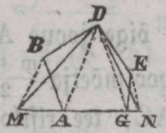
8) Kolmnurka ABC teiseks kolmnurgaks ADE ümber muuta, kelle põhjuskülg a teada ja tema wälja suurus esimese kolmnurgaga ühesuurune peab olema.



Juhatus.

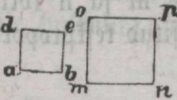
Tee AD = a, tõmma BE ∥ DC, ühenda ED, siis on AED otsitud kolmnurk.

9) Hulknurka ABDEG ühesuuruseks kolmnurgaks MDN ümber muuta.

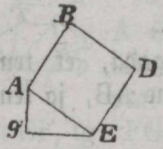


Juhatus.

Tõmma ühenduse jooned DA ja DG, ja B pealt MB ∥ DA, nõnda ka EN ∥ DG; ühenda DM ja DN, siis on MDN otsitaw kolmnurk.



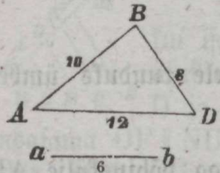
10) Ruutu ABDE teha, mis nõnda suur on kui kaks teist ruutu abde ja mnop kokku.



Juhatus.

Tee täiswinkli kolmnurk AGE, nõnda et ristloodi külg GA = ab ja ristloodi külg GE = mn on, siis on lautuse külg AE otsitaw ruudu külg AB, kellega seda ruutu teha wõib.

11) Kolmnurka ABD külgede pikkus on teada, AD = 12, AB = 10 ja BD = 8 tolli; mida wiisi wõib arwamise waral üles leida, kui pikad ühekujulise kolmnurga kaks teist külge peawad olema, kui tema põhjuskülg 6 tolli mõedab?



Juhatus.

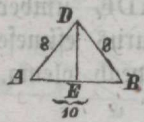
$$\begin{aligned} AD : ab &= AB : m, \\ 12 : 6 &= 10 : m \end{aligned} \qquad m = \tfrac{60}{12} = 5 \text{ tolli}$$

$$\begin{aligned} AB : m &= BD : n, \\ 10 : 5 &= 8 : n, \end{aligned} \qquad n = \tfrac{40}{10} = 4 \text{ tolli}$$

12) Külise kolmnurga põhjuskülg AB on = 10, tema külg AD = 8 tolli, kui pikk on ristlood, mis D juurest põhjusüklje AB peale tõmmatakse.

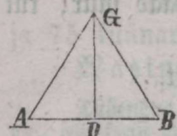
Juhatus.

Külise kolmnurga kõrgus on (§ 60, 1) järele



$$\left.\begin{aligned} AD^2 - \left(\tfrac{1}{2} AB\right)^2 &= h^2 \\ 8^2 - \left(\tfrac{10}{2}\right)^2 & \\ 64 - 25 &= h^2 \end{aligned}\right\} h = \sqrt{39} = 6{,}2\ldots$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 30 \\ 24 \\ \hline 60 \\ 4 \\ \hline \ldots \end{array}$$



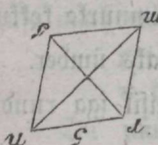
13) Külise kolmnurga AGB kõrgus DG on 8 jalga ja tema põhjusküll AB 12 jalga; kui pikk on tema külg AG = BG?

Juhatus.

Waata (§ 60, 2) . . .

$$8^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 64 + \frac{144}{4} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ jalga.}$$

14) Wiltruudu ühenduse joon mn on 8 sülda ja teine rs = 6 sülda, kui pikk on tema külg rn?

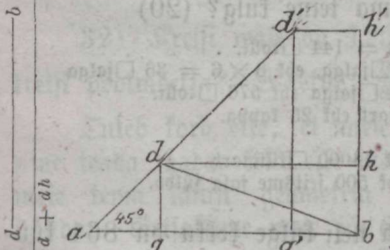


Juhatus.

Waata lisa õpetus (§ 49) mn $\perp$ rs selle-pärast $\left(\frac{mn}{2}\right)^2 + \left(\frac{rs}{2}\right)^2 = (rn)^2$

$$rn = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{4} + \frac{36}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5 \text{ sülda}$$

15) Tee pikkruut, kui antud on ühenduse joon db ja kahe külje pikkuse summa gd + dh.



Juhatus.

Tõmma joon ab, mis nõnda pikk on kui gd + dh, tee selle joone a otsa peale winkel, mis 45⁰ suur ja tõmma jälle joon ad. Kirjuta siis sirklega punkti b pealt ühendud joone pikkusega db kaar dd', siis on need mõlemad selle läbi sünnitatud pikkruudud gdbh ja g'bh'd' ühesuurused ja otsitud pikkruut on nende läbi leitud.

16) Pikkruudulise põllu küljed on üks 340, teine 260 küünart pikad. Mitu waka ja kapa maad on see põld suur?

Wastus $340 \times 260 = \frac{88400}{10000} = 8, \ \frac{8400}{400} = 21$,
8 waka ja 21 kapamaad.

17) Üks täisruuduline põld on ümberringi 1000 küünart. Mitu waka ja kapamaad on see põld suur?

Wastus. $\frac{1000}{4} = (250)^2 = 62500 = 6$ waka ja $6\,^1/_4$ kapamaad.

18) Üks ruuduline heinamaa on 10 wakamaad suur; kui pikk on tema külg?

Wastus $= \sqrt{10,00,00} = 316,2$ küünart.

Walmista sirkli ja liniali abiga:

19) Üks ruut ABDE, mis nõnda suur on kui kaks teist ruutu kokku.

20) Üks ruut, mis nõnda suur on kui kaks kolmnurka kokku.

21) Muuda nelinurk ühesuuruseks kolmnurgaks ümber.

22) Kirjuta kreis ruudu sisse, nõnda et kreisil iga ruudu küljega üks puutuse punkt ühtlane on.

23) Kirjuta kreis ümber ruudu nukkide.

24) Muuda 6, 7, 8nurk ühesuuruseks kolmnurgaks ümber.

25) Täiswinkli kolmnurgas on lautuse külg 20 ja üks ristloodi külg 16 tolli; kui pikk on teine ristloodi külg? (12)

26) Üks pikkruudu külg on 40 sülda ja tema wälja suurus on 800 □ sülda; kui pikk on tema teine külg? (20)

Tähendus. Ruutjalal on $12 \times 12 = 144$ □tolli.
Ruutsüllal on $7 \times 7 = 49$ □jalga, ehk $6 \times 6 = 36$ □jalga
Ruutküünral on $2 \times 2 = 4$ □jalga ehk 576 □tolli.
Wakamaal on 10000 □küünart ehk 25 kappa.
Kapal on 400 □küünart.
Tündrimaal on 35 kappa ehk 14000 □küünart.
Werstal on 1750 küünart ehk 500 seitsme jala sülda.

27) Pikkruudulise heinamaa neli külge kokku on 864 küünart ja tema üks külg on 142 küünart; kui pikk on tema teine külg?

Wastus. $\frac{864 - 284}{2} = \frac{580}{2} = 290$ küünart.

28) Pikkruudulise põllu üks külg on 150 küünart, ja tema wälja suurus 12 wakamaad; kui pikk on selle põllu teine külg.

Wastus $\frac{120000}{150} = 800$ küünart.

29) Raudtee jookseb ühe mõisa piirist läbi; tema pikkus on 6 wersta ja laius 20 küünart; mitu wakamaad on selle tee all maad?

Wastus. $6 \times 1750 \times 20 = 21$ wakamaad.

30) Pikkruudukujuline õunapuu aid on 80 küünart pikk ja 75 küünart lai; kui suur on see aid?

Wastus: 6000 □ küünart.

Tähendus. Kui meil ühe kreisi pool- ehk läbimõetja teada on, siis leiame meie selle kreisi piiri pikkust, kui meie seda läbimõetjat 3,14 ehk $3^1/_7$ kaswatame. Olgu siin ühe kreisi läbimõetja 9 tolli, siis on tema ümmargune piir 9 × 3,14 = 28,26 tolli.

On meil jälle kreisi läbimõetja teada (siin 10 tolli) ja tahaksime tema wälja suurust leida, siis leiame meie seda niisuguse mathematika juhi abiga: $r^2\pi$

r tähendab siis kreisi poolmõetjat = 5

π tema ümmargust 3,14

On nüüd kreisi läbimõetja antud = 10 tolli, siis on poolmõetja r = 5 tolli, ja meie rehkendame selle kreisi wälja suuruse näidatud juhi toel ($r^2\pi$) nõnda wälja $r^2 = 5^2 = 25$

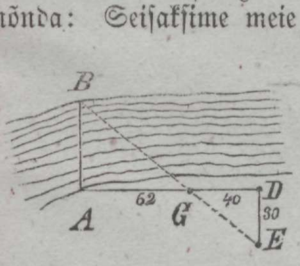
$\pi = 3,14$

siis on $r^2\pi = 5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,50$ □ tolli.

31) Kreisi poolmõetja on 6 jalga pikk; mitu ruutjalga on selle kreisi wäli suur? Wastus: 113,04 □ jalga.

32) Kreisi wäli on 1256 □ jalga suur; kui pikk on selle kreisi poolmõetja? Wastus: $\frac{1256}{3,14} = 400$, $\sqrt{\frac{400}{400}} = 20$ jalga.

Tuleb kord ette, et meie ühe jõe ehk järwe laiust tahaksime teada saada, kelle üle meie mitte mõeta ei wõi, siis leiame meie tema laiust geometria ühekujuliste kujude õpetuse toel nõnda: Seisaksime meie jõe ääres, just punkti A kohal, ja teine pool jõe kaldas B juures seisab üks kiwi, keda meie selgeste näha wõime.



Lööme A juure tulba maa sisse ja mõedame sealt jõe kalast mööda edasi seni kui G juure 62 küünart ja lööme ka sinna sihi tiku otse maa sisse, ja mõedame siis edasi, seni kui D juure 40 küünart; D peale teeme ühe täiswinkli ja mõedame E juure 30 küünart; sealt jooksed meie silmast sihk sihi tiku G üle teine poole jõe ääre kiwi B peale. Seda wiisi oleme meie kaks ühekujulist kolmnurka ABG ja DEG sünnitanud; nende abiga wõime nüüd jõe laiust AB nõnda leida:

$$AG : AB = GD : DE, \quad AB = \frac{AG \times DE}{GD}$$
$$62 : AB = 40 : 30$$

$$40\,AB = 62 \times 30 \text{ ja } AB = \frac{1860}{40} = 46{,}5 \text{ küünart.}$$

Tähendused. Mina olen mõned sõnad siia geometria raamatu sisse üleswõtnud, mis wissist mõnele lugejale natuke weidrad wõiwad olla; aga et nemad ka teaksiwad, mikspärast ma neid sõnu nõnda walitsenud olen, siis kuulgu: Mina nimetan winkli **täiswinkliks** sellepärast, et kõik teised winklid tema läbi tähendatud saawad. On nemad suuremad kui täiswinkel, siis nimetatakse neid nüriwinkliks; on nemad wähemad kui täiswinkel, siis nimetatakse neid terawehk wahewinkliks. Selle järele on täiswinkel mathematika seletuse põhjuse peal mõet kõigile teistele winklitele, ja iga mõet peab ikka ise täissuurus olema. Nõndasama nimetan mina **winkliküljed** (mitte harud), ja winkli külgede ühenduse punkti **wahenduseks**, mitte (harjaks). Need sõnad on Prantsuse keele järele muudetud, sest Prantslased nimetawad winkli harja: **wahenduseks** (Sommet) ja winkli harukülјeks (côté), mis mathematiku tähenduse järele täielikunud on kui hari ja harud. Paralleljooned nimetan mina **ühtlasi jooksjateks joonteks**, sellepärast, et kõrgema geometria õpetuse järele neil ilmlõpmata kaugusel üks **ühtlane** punkt on.

Joont, kellel kreisiga (ehk sirkli joonega) paljalt üks ainus punkt ühtlane on, nimetasin mina puutujaks (Tangente), sellepärast et see joon kõigi oma teiste punktidega mitte enam selle kreisiga ühte ei puudu. Nelinurka, kellel kaks külge ühtlasi jooksewad, aga kelle ühtlased küljed mitte ühepikkused ei ole, nimetasin mina Trapez (Trapèze), sellepärast et kõik õpetatud rahwas seda nelinurka ka nõndasama nimetawad. Ja ei ole ka meil Eesti keeles mitte wõimalik seda kuju tuttawa Eesti keele sõnaga täielikult tähendada, sest see kuju ei ole mitte iga kord ühe-näuline ja oleks siis sellepärast iga teine nimi mathematika selge tähenduse kohta puudulik!

Ka kõik teised geometria tähenduse sõnad olen mina nõnda walitsenud, et nemad selget geometria õpetust tähendawad ja mitte nende läbi kudagi wiisi kõrgema geometria õpetused ehk fiisika seletused segatud ei saa. Kui meil Eestlastel tulewikus wõimalik peaks olema ka Eesti keeles kõrgemate õpetustega tuttawaks saada, siis ei oleks meil enam waja neid juba tuttawaid sõnu jälle ümber muuta.

Trüki eksitused.

Lehekülg 6 alt wiimane rida loe: lautus (mitte lauuts).

" 24 § 29 alt rida 13 loe: winkli külje AD peale langema (mitte AB peale).

" 25 § 31 rida 6 ülewelt loe: $\angle$ AFE + $\angle$ EFB = 2 täiswinkelt.

" 26 § 34 alt rida 8 loe: küliswinklid (mitte külli winklid).

" 34 § 47 ülewelt rida 6 loe: BD (mitte BBD).

" 37 alt rida 7 loe: cg (mitte cm).

" 39 ülesanne 18 juhatus ülewelt rida 22 loe: $n = \frac{20 + 4}{2} = 12$ (mitte $n = \frac{20 + 4}{4} = 12$).

" 44 § 57 ülewelt rida 11 loe: $\angle D = \frac{1}{2}$ BGE (mitte BDG).