Профессору А. П. Сабанѣеву.

ТЕОРІЯ
РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ИНВАРІАНТОВЪ
БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ

въ направленіи

Софуса Ли, Кэли и Аронгольда.

В. Г. Алексѣева,

Э. О. Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго Университета.

Юрьевъ.
Печатано въ типографіи К. Маттисена.
1899.

ТЕОРІЯ

РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ИНВАРІАНТОВЪ

БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ

въ направленіи

Софуса Ли, Кэли и Аронгольда.

В. Г. Алексѣева,

Э. О. Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго Университета.

Юрьевъ.
Печатано въ типографіи К. Маттисена.
1899.

Оттискъ изъ „Ученыхъ Записокъ Императорскаго Юрьевскаго Университета“ 1899 г.

Оглавленіе.

Глава I.

Инваріанты бинарныхъ формъ.

Глава II.

Совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ.

Глава III.

Коваріанты и контраваріанты бинарныхъ формъ.

Глава IV.

Различные способы построеній и преобразованій коваріантовъ бинарныхъ формъ.

Замѣченныя опечатки.

Стрн.	Стрк.	Напечатано:	Должно быть:
4	16 св.	коваріантовъ	неприводимыхъ коваріантовъ
15	7 св.	$f(\alpha, \gamma)\frac{\eta^n}{n!}$	$f(\beta, \delta)\frac{\eta^n}{n!}$
30	3 св.	$\frac{\beta_1}{d_1}, \frac{\gamma_1}{d_1}$	$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$
37	5 св.	$\delta F = V(F)\,\delta t$	$\delta F = -V(F)\,\delta t$
41	5 сн.	$Z_1[f_2(f)]$	$Z_1[Z_2(f)]$
45	14 св.	$X_3(J)$	$-X_3(J)$
45	16 св.	$a_1 X_3(J)$	$-a_1 X_3(J)$
59	1 сн.	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$	$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$
80	3 св.	$4_2^3 a_0$	$4a_2^3 a_0$
80	2 сн.	$-vx_2^4$	$+vx_2^4$
92	3 сн.	J_{12}	J_{21}
93	1 св.	J_{12}	J_{21}
115	8 св.	$+6a_2^2$	$+3a_2^2$
150	3 сн.	1 должна стоять не въ пятомъ, а въ шестомъ столбцѣ	
167	1 сн.	38	36
184	1 сн.	$\ldots \phi(x_1, x_2)$	$\ldots \omega(x_1, x_2)$

Введеніе.

> Unzweifelhaft eignen sich die vollkommenen Methoden der Invariantentheorie sehr gut zur Behandlung vieler wichtiger Probleme meiner allgemeinen Transformationstheorie; andererseits wird aber auch die letztere für die Invariantentheorie neue Gesichtspunkte liefern.
>
> *Sophus Lie.* (Vorrede S. VI. Bearb. von Engel. Bd. I).

Отдѣлъ математики, которому посвящена настоящая работа, зародился въ 1841 году въ изслѣдованіяхъ англійскаго математика Boole'я, обнаружившаго, что дискриминанты алгебраическихъ формъ при преобразованіи формъ посредствомъ линейныхъ подстановокъ пріобрѣтаютъ только множитель, равный степени детерминанта подстановки. Въ слѣдующемъ году этотъ же ученый показалъ, что поляры одной формы приводятъ къ функціямъ обладающимъ такимъ же свойствомъ, но содержащимъ въ себѣ кромѣ коэффиціентовъ формы также и перемѣнныя. Такимъ образомъ были получены первые инваріанты и коваріанты алгебраическихъ формъ. Затѣмъ, въ 1845 году, другой англійскій математикъ Cayley построилъ цѣлый рядъ инваріантовъ при помощи изобрѣтеннаго имъ исчисленія гипердетерминантовъ и ввелъ нѣкоторыя сокращенныя обозначенія вычисленій.

Въ 1849 году Aronhold далъ уже довольно систематичное изложеніе нѣкоторыхъ свойствъ инваріантовъ троичной формы третьей степени, а два года спустя, онъ представилъ въ философскій факультетъ Кёнигсбергскаго Университета рукописную работу, въ которой далъ общую постановку теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ. Въ этой работѣ были выведены впервые дифференціальныя уравненія инваріантовъ алгебраическихъ формъ, которыя въ 1852 году были выведены Cayley и Silvester'омъ для инваріантовъ бинарной формы и легли въ основаніе замѣчательныхъ изслѣдованій Cayley, изложеныхъ въ десяти мемуарахъ „upon Quantics“

Въ 1863 году появились въ печати изслѣдованія Aronhold'a о новой постановкѣ, лишенной всякаго произвола, теоріи инваріантовъ: разсматривая соотношенія между коэффиціентами данной формы и преобразованной посредствомъ линейной подстановки, онъ приходитъ къ заключенію, что должны существовать абсолютные инваріанты, и что число раціонально независимыхъ абсолютныхъ инваріантовъ равно числу коэффиціентовъ данной формы безъ числа коэффиціентовъ линейной подстановки. Далѣе Aronhold вывелъ дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ и показалъ, что числители и знаменатели абсолютныхъ инваріантовъ суть обыкновенные инваріанты; такимъ образомъ существованіе и обыкновенныхъ инваріантовъ алгебраическихъ формъ сдѣлалось вполнѣ конкретнымъ, тогда какъ раньше было только формальное и подтверждалось лишь эмпирически — на отдѣльныхъ примѣрахъ.

Въ 1861 году Clebsch, воспользовавшись символическими обозначеніями Aronhold'a, положилъ въ основаніе своихъ изслѣдованій чисто формальное опредѣленіе инваріантныхъ функцій при помощи символовъ и различныхъ символическихъ процесовъ. Это направленіе, благодаря замѣчательнымъ изслѣдованіямъ самаго Clebsch'a, а затѣмъ — его ученика Gordan'a, быстро развилось и сдѣлалось вскорѣ господствующимъ направленіемъ въ изслѣдованіяхъ, относящихся къ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ, по крайней мѣрѣ въ нѣмецкой литературѣ.

Въ это время въ Англіи установилось направленіе, созданное Cayley и его первымъ послѣдователемъ Silvester'омъ, который многое создалъ и самостоятельно, независимо отъ Cayley.

Англійское направленіе носило въ началѣ формальный характеръ, потому что Cayley въ основаніе его положилъ эмпирическій выводъ дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ и коваріантовъ: Cayley разсматриваетъ такіе дифференціальные процесы, относящіеся только къ коэффиціентамъ данной формы $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, которые, будучи примѣнены къ данной формѣ, давали бы одинаковый результатъ съ процесами $x_i \frac{\partial}{\partial x_k}$; обозначивъ указанные дифференціальные процесы символомъ $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$, онъ опредѣляетъ коваріантъ данной формы какъ функцію, цѣлую, раціональную и однородную коэффиціентовъ и перемѣнныхъ данной формы, которая удовлетворяетъ всѣмъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

Cayley показалъ, что полученные раньше коваріанты удовлетворяютъ такимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, но не доказалъ, что эти дифференціальныя уравненія вполнѣ характеризуютъ всѣ коваріанты алгебраической формы. Это послѣднее было доказано только Aronhold'омъ, и тогда все направленіе англійскихъ ученыхъ пріобрѣло вполнѣ прочныя матеріальныя основанія.

Въ 1856 году Cayley и Silvester показали, что бинарныя формы первыхъ четырехъ степеней имѣютъ конечное число такъ называемыхъ неприводимыхъ коваріантовъ т. е. такихъ коваріантовъ, которые не могутъ быть выражены въ цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ черезъ коваріанты низшихъ степеней; такимъ образомъ возникла задача (Endlichkeitsproblem) о конечности числа неприводимыхъ коваріантовъ одной или нѣсколькихъ алгебраическихъ формъ, рѣшеніемъ которой занимались многіе ученые до самаго послѣдняго времени.

Gordan первый, въ 1868 году, доказалъ конечность числа неприводимыхъ коваріантовъ для одной бинарной формы, какой угодно степени, и эта теорема обыкновенно называется теоремой Gordan'a. Его методъ, основанный на символическихъ обозначеніяхъ Aronhold'a-Clebsch'a и весьма сложный даже въ позднѣйшей усовершенствованной формѣ, далъ возможность построить полную систему неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ 5-й и 6-й степеней.

Нѣсколько позже — въ концѣ семидесятыхъ годовъ, Silvester обнаружилъ конечность числа неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ первыхъ десяти степеней и 12-й степени, вычисливъ для этихъ формъ при содѣйствіи своего ученика Franklin'a такъ называемыя представительныя формы женератрисныхъ функцій. Но этотъ способъ, безъ сомнѣнія весьма важный для практическаго построенія коваріантовъ, нельзя считать строгимъ потому, что онъ основанъ на одномъ до сихъ поръ еще недоказанномъ постулатѣ о невозможности существованія коваріантовъ и сидзигантовъ перваго рода одного и того-же типа.

Въ 1880 году von Gall построилъ при помощи способа Gordan'a полную систему неприводимыхъ коваріантовъ для бинарной формы 8-й степени, а въ 1888 ему удалось выполнить тоже самое и для бинарной формы 7-й степени, представившей больше трудностей, чѣмъ форма 8-й степени.

Попытки обобщить методъ Gordan'a для системъ общихъ формъ окончились полной неудачей вслѣдствіе того, что потребовалось ввести для такого обобщенія множество символовъ. Въ 1888 году одинъ изъ послѣдователей формальнаго символическаго направленія Stroh, пользуясь символами Aronhold'a-Clebsch'a изучилъ цѣлыя раціональныя соотношенія (syzygies) между неприводимыми коваріантами одной бинарной формы и предложилъ для нихъ особую классификацію.

Въ 1884 году одинъ изъ ученыхъ англійской школы Hammond построилъ женератрисныя функціи для сидзигантовъ перваго рода и вычислилъ при помощи ихъ полную систему неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода для бинарныхъ формъ 5-й и 6-й степеней, а также и нѣкоторые сидзиганты втораго рода.

Наконецъ, въ 1890 году теорема Gordan'a была доказана Hilbert'омъ и при томъ въ самомъ общемъ видѣ — для системы формъ съ нѣсколькими рядами перемѣнныхъ. Это доказательство явилось какъ слѣдствіе весьма общихъ изысканій нѣмецкаго ученаго въ области безконечныхъ системъ цѣлыхъ функцій. Hilbert показалъ кромѣ того, что число неприводимыхъ сидзигантовъ каждаго рода конечно и что цѣпь сидзигій разныхъ родовъ прерывается.

Эти новыя изслѣдованія нѣмецкаго математика, замѣчательныя по своей простотѣ и общности, пролили новый свѣтъ на теорію инваріантовъ алгебраическихъ формъ, связавъ ее съ весьма общей теоріей, такъ называемыхъ, алгебраическихъ тѣлъ.

Въ то время какъ многіе ученые, заинтересовавшись задачей Gordan'a, посвящали свои труды почти исключительно вопросамъ о полныхъ системахъ неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ, а также и ихъ сидзигій, нѣкоторые начинаютъ постепенно обобщать понятіе объ инваріантѣ.

Въ 1885 году Silvester создалъ теорію ресипрокантовъ, которою, затѣмъ, занимались Hammond, Mac-Mahon, Leudesdorf, Elliot, Forsith и другіе.

Одна, наиболѣе важная чать этого ученія, а именно — дифференціальные инваріанты, была разработана еще раньше въ 1878 году Halphen'омъ, и затѣмъ изслѣдованіями норвежскаго ученаго Sophus'a Lie была доведена постепенно до такой общности, что всѣ изслѣдованія другихъ математиковъ являются только слѣдствіями его общей теоріи инваріантовъ непрерывныхъ группъ преобразованій.

Изъ всѣхъ изслѣдованій Sophus'a Lie послѣднее время особенное значеніе пріобрѣла теорія группъ касательныхъ преобразованій, т. е. такихъ преобразованій, относительно которыхъ условія касанія геометрическихъ формъ соотвѣтствѣнныхъ измѣреній остаются инваріантными; классическимъ примѣромъ этихъ преобразованій служитъ извѣстное преобразованіе Лежандра для уравненій съ частными производными.

Несомнѣнно, что теорія инваріантовъ алгебраическихъ формъ имѣла и въ настоящее время имѣетъ большое вліяніе на прогресъ различныхъ отдѣловъ математики, но общая теорія инваріантовъ норвежскаго ученаго и въ особенности ея часть, относящаяся къ группѣ касательныхъ преобразованій, сдѣлалась основнымъ ученіемъ для многихъ отдѣловъ математики, какъ напримѣръ — для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, для теоріи минимальныхъ поверхностей и поверхностей переноса вообще, для теоріи изгибанія поверхностей, и т. д.

Нѣсколько лѣтъ занимаясь общей теоріей инваріантовъ, я интересовался, конечно, и теоріей инваріантовъ алгебраическихъ формъ, при чемъ мнѣ постоянно казалось символическое направленіе Clebsch'a-Gordan'a въ теоріи инваріантовъ крайне нецѣлесообразнымъ, вслѣдствіе того обособленія отъ другихъ отдѣловъ математики, которое вносится спеціальными символическими обозначеніями и вслѣдствіе крайней сложности различныхъ символическихъ операцій.

Неудачныя попытки обобщить доказательство Gordan'a предложенія о конечности числа неприводимыхъ коваріантовъ для случая системы общихъ формъ блестяще показали всю несостоятельность этого направленія, этого безконечнаго нагроможденія спеціальныхъ символовъ въ довольно элементарномъ отдѣлѣ математики. Еще болѣе блестяще было послѣднее подтверждено замѣчательными по своей простотѣ и общности изслѣдованіями Hilbert'a, разрѣшившими основные вопросы теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ во всей ихъ общности помимо всякихъ спеціальныхъ символовъ.

Съ другой стороны и общая теорія инваріантовъ Sophus'a Lie не воспользовалась символическими обозначеніями Aronhold'a-Clebsch'a: въ ней стали играть главную роль обычные, по своей формѣ, въ дифференціальномъ исчисленіи символы безконечно-малыхъ преобразованій, которые суть ничто другое, какъ обобщенія символовъ

$$\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k},$$

введенныхъ Cayley для обозначенія извѣстныхъ дифференціальныхъ процесовъ при построеніи дифференціальныхъ уравненій коваріантовъ алгебраическихъ формъ, о чемъ было уже сказано выше.

Вслѣдствіе всего этого, я задался мыслью изложить теорію инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ такомъ направленіи, которое наиболѣе соотвѣтствуетъ новѣйшимъ ученіямъ о непрерывныхъ группахъ — съ одной стороны, и объ алгебраическихъ тѣлахъ или ариѳмизаціи функцій — съ другой стороны, т. е. тѣмъ ученіямъ, которыя, можно сказать, сами зародились въ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ.

Въ главѣ I, посвященной инваріантамъ одной бинарной формы, я изучаю сначала свойства группы линейныхъ подстановокъ для перемѣнныхъ бинарной формы и свойства подгруппы безконечно-малыхъ линейныхъ подстановокъ для этихъ же перемѣнныхъ, что даетъ мнѣ возможность, въ § 7, предложить новый выводъ дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ бинарной формы и показать, что они вполнѣ характеризуютъ послѣдніе. Но еще не очевидно, что эти дифференціальныя уравненія должны имѣть цѣлыя, раціональныя и однородныя интегралы; поэтому я пользуюсь въ § 11 изслѣдованіями Aronhold'a объ абсолютныхъ инваріантахъ и такимъ образомъ доказываю не только существованіе инваріантовъ для всякой бинарной формы, кромѣ формы первой степени, но опредѣляю также въ § 16 число основныхъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются алгебраически.

Въ главѣ II я обобщаю предыдущія изслѣдованія на случай системы бинарныхъ формъ и, слѣдуя представителямъ англійской школы Cayley и Silvester'у, опредѣляю при помощи женератрисной функціи число линейно-независимыхъ инваріантовъ данной системы бинарныхъ формъ, при чемъ въ § 24 я даю вполнѣ строгое и, въ тоже время, весьма простое доказательство независимости уравненій системы (L), что лежитъ въ основаніи опредѣленія числа линейно-независимыхъ инваріантовъ. Въ заключеніе этой главы, въ § 27, я вывожу нѣкоторыя свойства женератрисной функціи и какъ слѣдствіе изъ нихъ — теорему Hermite'а о взаимности бинарныхъ формъ и обобщеніе этой теоремы, предложенное Hurvitz'омъ.

Въ главѣ III излагаются сначала опредѣленія коваріантовъ и контраваріантовъ бинарныхъ формъ, и, затѣмъ, выводятся ихъ дифференціальныя уравненія на основаніи того, что ихъ можно разсматривать какъ совмѣстные инваріанты данной системы формъ, увеличенной еще одной линейной формой. Теорема Cayley, изложенная въ § 31 этой главы сводитъ построеніе коваріантовъ къ построенію такъ называемыхъ полуинваріантовъ; этимъ я и пользуюсь при построеніи основныхъ коваріантовъ въ § 35. Въ §§ 37, 38 и 39 излагаются различные способы опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ при помощи женератрисныхъ функцій. Въ §§ 40, 41 разсматриваются различныя цѣлыя раціональныя соотношенія — сидзигіи между неприводимыми коваріантами и излагается способъ Hammond'а для опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ сидзигій при помощи особой женератрисной функціи. Наконецъ, въ § 42 излагается теорема Gordan'а и ея доказательство, данное Hilbert'омъ.

Въ главѣ IV излагаются различные способы построенія коваріантовъ и между прочимъ излагается замѣчательный процесъ [ ] Hilbert'а, который даетъ возможность обращать такъ называемые дериванты въ коваріанты, а въ частномъ случаѣ — полуинваріанты въ инваріанты; этимъ процесомъ приходится пользоваться въ доказательствѣ Hilbert'а теоремы Gordan'а, изложенномъ въ концѣ предыдущей главы. Здѣсь же излагается преобразованіе коваріантовъ, предложенное Hermite'омъ и приводящее къ системѣ союзныхъ формъ. Въ заключеніе дается понятіе о типическомъ представленіи формъ.

Приложенный при семъ литературный указатель содержитъ только тѣ сочиненія, которыми я пользовался въ своей работѣ, иначе говоря, — тѣ сочиненія, которыя относятся къ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ несимволическомъ направленіи. Болѣе подробныя литературныя указанія можно найти въ прекрасномъ историческомъ очеркѣ развитія теоріи инваріантовъ, составленномъ профессоромъ F. Meyer'омъ (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. I, или французскій переводъ въ Bulletin des sciences mathématiques, t. 18, 19).

Литература теоріи инваріантовъ въ несимволическомъ направленіи.

1. Cayley. On linear transformations. Cambrige and Dublin mathematical Journal, Vol. 4. 1844.
2. Cayley. Mémoire sur les hyperdéterminantes. Crelle's Journal, Bd. 30. 1845.
3. Sylvester. On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants. Cambrige and Dublin mathematical Journal, Vol. 6—9 (1851—1854).
4. Sylvester. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philosophical Magazine. 1851.
5. Cayley. Rescherches sur les covariants. Crelle's Journal, Bd. 47. 1854.
6. Cayley. Seven memoirs upon quantics. Philosophical Transactions, Vol. 144, 146, 148, 149, 151, (1854—1861).
7. Cayley. Researsches on the partition of numbers. Quarterly Journal, 1855.
8. Roberts. On the covariants of a binary quantic of the n-th degree. Quarterly Journal, Vol. 4. 1861.
9. Aronhold. Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 62. 1863.
10. Clebsch. Ueber simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Crelle's Journal, Bd. 65. 1866.
11. Cayley. 8-th memoir upon quantics. Philosophical Transactions, Vol. 157. 1867.
12. Christoffel. Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 68. 1868.
13. Aronhold. Neuer und directer Beweis eines Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 69. 1968.
14. Cayley. 9-th. memoir upon quantics. Philosophical Transactions. Vol. 161. 1871.

15. Gram Sur quelques théorèmes fondamentaux de l' agèbre moderne. Mathematische Annalen, Bd. 7. 1873.
16. Cayley. 10-th memoir upon quantics. Philosophical Transactions. Vol. 169. 1878.
17. Silvester. Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants irréducibles des formes binaires. Comptes Rendus, t. 86. 1878.
18. Silvester. Table of the generating functions and groundforms for the binary quantics of the first ten orders. American Journal, V. 2. 1879.
19. Silvester. Tables of the generating functions and groundforms for simultaneous binary quantics of the first four orders taken two and two together. Ibid.
20. Franklin. On the calculation of the generating functions and tables of groundforms for binary quantics American Journal V. 3. 1880.
21. Faa di Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Walter. Leipzig. 1881.
22. Silvester. Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzygies of certain quantics. American Journal, V. 4. 1881.
23. Silvester. A demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of deg-order 10. 4. Ibid.
24. Cayley. A memoir on seminvariants. American Journal, V. 7 1885.
25. Hammond. On the syzygies of the binary sextic and their relations. Ibid.
26. Hilbert. Ueber die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. (Dissertation). Königsberg. 1885.
27. Hammond. Sydzygy tables for the binary quintic. American Journal. V. 8. 1886.
28. Hilbert. Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. Mathematische Annalen. Bd. 30. 1887.
29. Hammond. A simple proof of the existence of irreducible invariants of degrees 20 and 30 for the binary seventhic. Mathematische Annalen. Bd. 36. 1890.
30. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Ibid.
31. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig. 1891.

32. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Göttingen Nachrichten. 1891.
33. Schönflies. Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen. Ibid.
34. Elliott. A proof of the exactness of Cayley's number of seminvariant of given type. Proceeding of the London Math. Society. V. 23. 1892.
35. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Göttingen Nachrichten. 1892.
36. Sophus Lie. Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Leipzig. 1893.
37. Hurwitz. Zur Invariantentheorie. Mathematische Annalen, Bd. 45. 1894.

ГЛАВА I.

Инваріанты бинарныхъ формъ.

§ 1. Опредѣленія бинарной формы и ея инваріантовъ.

Бинарной формой n-го порядка мы будемъ называть цѣлый однородный многочленъ n-й степени съ двумя перемѣнными. Обыкновенно ее пишутъ съ биноміальными коэффиціентами въ такомъ видѣ:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{m} a_m x_1^{n-m} x_2^m \ldots + a_n x_2^n,$$

гдѣ $\binom{n}{m}$ обозначаетъ числовой факторъ $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}$.

Если перемѣнныя x_1, x_2 замѣнить другими перемѣнными y_1, y_2 при помощи соотношеній

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то вышеприведенная бинарная форма преобразуется въ другую бинарную форму тоже n-го порядка, но съ новыми коэффиціентами и новыми перемѣнными; выполнивъ указанную подстановку, мы получимъ:

$$f(\alpha y_1 + \beta y_2 , \gamma y_1 + \delta y_2) =$$

$$= a_0(\alpha y_1 + \beta y_2)^n + \binom{n}{1} a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)^{n-1} (\gamma y_1 + \delta y_2) + \ldots + a_n(\gamma y + \delta y_2)^n$$

$$= \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} \alpha_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} \alpha_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \ . \ . \ . + \alpha_n y_2^n ;$$

эту новую бинарную форму мы будемъ сокращенно обозначать черезъ $\varphi(y_1 , y_2)$.

Соотношенія $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, $x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$, связывающія перемѣнныя x_1, x_2 съ перемѣнными y_1, y_2, мы будемъ называть *линейной подстановкой* и будемъ сокращенно обозначать ее черезъ $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, или просто черезъ S. Детерминантъ $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)$ мы будемъ называть *модулемъ* линейной подстановки.

Бинарная форма $f(x_1 , x_2)$ переходитъ вслѣдствіе подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ въ другую бинарную форму $\varphi(y_1 . y_2)$; это обстоятельство можно выразить символическимъ равенствомъ

$$\varphi(y_1 , y_2) = Sf(x_1 , x_2).$$

Очевидно, что коэффиціенты α_0, α_1, α_2 . . . α_n суть, съ одной стороны, цѣлыя раціональныя и однородныя функціи степени n-й коэффиціентовъ α, β, γ, δ подстановки S и, съ другой стороны, линейныя однородныя функціи коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2 . . . a_n первоначальной формы $f(x_1 , x_2)$.

Не трудно получить эти выраженія коэффиціентовъ α_0, α_1, α_2 . . . α_n. Раздѣлимъ обѣ части равенства

$$f(\alpha y_1 + \beta y_2 , \gamma y_1 + \delta y_2) = \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2 + \ . \ . \ .$$

одинъ разъ на y_1^n, другой разъ на y_2^n, и обозначимъ $\frac{y_2}{y_1} = \xi$, а $\frac{y_1}{y_2}$ черезъ η; тогда

$$f(\alpha+\beta\xi,\gamma+\delta\xi)=\alpha_0+\binom{n}{1}\alpha_1\xi+\ldots+\binom{n}{k}\alpha_k\,\xi^k+\ldots,$$

$$f(\alpha\eta+\beta,\gamma\eta+\delta)=\alpha_0\,\eta^n+\binom{n}{1}\alpha_1\,\eta^{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}\alpha_k\,\eta^{n-k}+\ldots,$$

а по строка Тэйлора:

$$f(\alpha+\beta\xi,\gamma+\delta\xi)=f(\alpha,\gamma)+\frac{\xi}{1}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)f(\alpha,\gamma)+\ldots+$$

$$+\frac{\xi^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)+\ldots,$$

и

$$f(\alpha\eta+\beta,\gamma\eta+\delta)=f(\alpha,\gamma)\,\frac{\eta^n}{n!}+\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-1}f(\beta,\delta)\,\frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\ldots+\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta)\,\frac{\eta^{n-k}}{(n-k)!}+\ldots;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\binom{n}{k}\alpha_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)=\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta),$$

т. е.

$$\alpha_k=\frac{(n-k)!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial j}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)$$

или

$$\alpha_k=\frac{k!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta).$$

Изъ этихъ выраженій ясно, что α_k есть однородная функція степени $n-k$ относительно пары количествъ (α,γ) и однородная функція степени k относительно пары количествъ (β,δ).

Инваріантомъ бинарной формы $f(x_1,x_2)$ называется такая цѣлая раціональная функція $J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ коэффиціентовъ этой формы, которая удовлетворяетъ тождественно равенству

$$J(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n)=(\alpha\delta-\beta\gamma)^\lambda\,J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n),$$

коль скоро мы замѣнимъ въ немъ $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$ ихъ выраженіями черезъ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$ и $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. Иначе говоря, инваріантъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ есть такая цѣлая раціональная функція ея коэффиціентовъ, которая измѣняется только на постоянный множитель $\Delta^\lambda = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda$, если въ ней коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ замѣнить коэффиціентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ преобразованной при помощи линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ формы.

Примѣръ. Выраженіе $J(a_0, a_1, a_2) = a_0 a_2 - a_1^2$ служитъ инваріантомъ бинарной формы втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ подстановку $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ эта форма перейдетъ въ форму

$$\varphi(y_1, y_2) = \alpha_0 y_1^2 + 2\alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_2 y_2^2,$$

коэффиціенты которой выражаются черезъ коэффиціенты a_0, a_1, a_2 первоначальной формы слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha_0 = a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha\gamma + a_2 \gamma^2,$$

$$\alpha_1 = a_0 \alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2 \gamma\delta,$$

$$\alpha_2 = a_0 \beta^2 + 2a_1 \beta\delta + a_2 \delta^2;$$

отсюда мы видимъ, что разсматриваемое выраженіе

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (a_0 a_2 - a_1^2)$$

дѣйствительно удовлетворяетъ опредѣленію инваріанта бинарной формы.

Изъ вышеизложеннаго общаго опредѣленія инваріанта бинарной формы не трудно вывести нѣкоторыя его свойства, если разсмотрѣть частные виды линейныхъ подстановокъ.

§ 2. Однородность, изобарность и симметричность инваріанта.

1) Если взять частный видъ $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = \rho y_1$, $x_2 = \rho y_2$, и для которой модуль

$\alpha\delta - \beta\gamma = \rho^2$, то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ будутъ равны первоначальнымъ коэффиціентамъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, умноженнымъ на одинъ и тотъ-же факторъ ρ^n; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$a_0 x_1{}^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 x_1{}^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2{}^n =$$

$$= a_0 \rho^n y_1{}^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 \rho^n y_1{}^{n-1} y_2 + \ldots + a_n \rho^n y_2{}^n$$

$$= \alpha_0 y_1{}^n + \left(\frac{n}{1}\right) \alpha_2 y_1{}^{n-1} y_2 + \ldots + \alpha_n y_2{}^n.$$

Но, такъ какъ инваріантъ по отношенію къ разсматриваемой подстановкѣ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_0 \rho^n, a_1 \rho^n, a_2 \rho^n, \ldots a_n \rho^n) = \rho^{2\lambda} J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

или

$$J(a_0 t, a_1 t, a_2 t, \ldots a_n t) = t^{\frac{2\lambda}{n}} J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

если $t = \rho^n$, то мы и заключаемъ, что онъ есть функція *однородная* степени $\frac{2\lambda}{n}$ коэффиціентовъ данной формы.

Число λ называется *индексомъ* инваріанта; если обозначить его *степень* относительно коэффиціентовъ бинарной формы черезъ μ, то на основаніи только что сказаннаго $\mu = \frac{2\lambda}{n}$; иначе говоря, между порядкомъ данной бинарной формы n, степенью μ ея инваріанта и индексомъ послѣдняго существуетъ соотношеніе

$$2\lambda = n \, . \, \mu.$$

2) Если взять другой частный видъ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = y_1$, $x_2 = \rho y_2$, и модуль которой равенъ ρ, то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ преобразованной формы будутъ соотвѣтственно равны $a_0, a_1 \rho, a_2 \rho^2, \ldots a_n \rho^n$, такъ какъ

$$a_0 x_1^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n =$$

$$= a_0 y_1^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 \rho\, y_1^{n-1} y_2 + \ldots + a_n \rho^n y_2^n$$

$$= \alpha_0 y_1^n + \left(\frac{n}{1}\right) \alpha_1 y_1^{n-1} y_2 + \ldots + \alpha_n y_2^n.$$

Для разсматриваемой подстановки инваріантъ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_0,\, a_1 \rho,\, a_2 \rho^2,\, \ldots\, a_n \rho^n) = \rho^\lambda J(a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)\,;$$

такъ какъ инваріантъ есть цѣлая раціональная функція количествъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n, то онъ состоитъ изъ суммы членовъ вида $A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$ и его можно представить символомъ

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_2^{e_1} a_2^{e_2} \;.\;.\;.\; a_n^{e_n}\,;$$

пользуясь этимъ обозначеніемъ для инваріанта $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, мы напишемъ вышеприведенное тождественное равенство въ такомъ видѣ:

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n} \rho^{0\,.\,e_0 + 1\,.\,e_1 + 2\,.\,e_2 + \ldots + n\,.\,e_n} =$$

$$= \rho^\lambda \sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}\,;$$

отсюда мы заключаемъ, что число

$$0\,.\,e_0 + 1\,.\,e_1 + 2\,.\,e_2 + \;.\;.\;.\; + n\,.\,e_n$$

должно быть одинаково для всѣхъ членовъ инваріанта и должно равняться индексу инваріанта λ. Это число $0\,.\,e_0 + 1\,.\,e_1 + 2\,.\,e_2 + \ldots + n\,.\,e_n$ называется *вѣсомъ* члена

$$A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \;.\;.\;.\; a_n^{e_n}\,.$$

Слѣдовательно, всѣ члены детерминанта имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ равный индексу инваріанта λ, или инваріантъ есть функція коэффиціентовъ бинарной формы не только цѣлая, раціональная и однородная, но еще и *изобарная* — съ вѣсомъ, равнымъ индексу λ. Едва ли надо пояснить, что изобарность функціи есть ничто другое, какъ однородность ея относительно показателей степеней и индексовъ перемѣнныхъ количествъ.

3) Наконецъ, если мы разсмотримъ третій частный видъ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, и модуль которой равенъ (-1), то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ преобразованной формы будутъ соотвѣтственно равны a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_0, такъ какъ

$$a_0 x_1^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n =$$

$$= a_0 y_2^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 y_2^{n-1} y_1 + \ldots + a_n y_1^n$$

$$= \alpha_n y_2^n + \left(\frac{n}{1}\right) \alpha_{n-1} y_2^{n-1} y_1 + \ldots + \alpha_0 y_1^n.$$

Инваріантъ въ данномъ случаѣ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0) = (-1)^\lambda J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Слѣдовательно, если инваріантъ имѣетъ четный индексъ $\lambda = \frac{\mu \,.\, n}{2}$, то онъ есть функція *симметрическая* относительно паръ коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2 ... a_n, равноотстоящихъ отъ начала и конца, такъ какъ онъ не измѣняетъ своей величины при перестановкѣ коэффиціентовъ a_i и a_{n-i}; если же инваріантъ имѣетъ нечетный индексъ $\lambda = \frac{\mu \,.\, n}{2}$, то онъ мѣняетъ знакъ, не измѣняя своей абсолютной величины, при перестановкѣ коэффиціентовъ a_i и a_{n-i}, т. е. абсолютная величина инваріанта съ нечетнымъ индексомъ есть функія симметрическая относительно паръ коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2, ... a_n, равноотстоящихъ отъ начала и конца.

Инваріантъ, имѣющій четный индексъ, называется иногда *четнымъ* инваріантомъ, и инваріантъ съ нечетнымъ индексомъ — *нечетнымъ* инваріантомъ. Такъ какъ индексъ λ инваріанта равенъ половинѣ произведенія $n\mu$ — порядка формы на степень самаго инваріанта, то для нечетныхъ инваріантовъ произведеніе $n\mu$ должно дѣлиться на 2, а для четныхъ инваріантовъ — на 4. Слѣдовательно, бинарная форма нечетнаго порядка совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетной степени; четные инваріанты могутъ быть нечетной степени только тогда, когда порядокъ n бинарной формы дѣлится на 4.

§ 3. Нѣкоторыя свойства линейныхъ подстановокъ.

Въ этомъ параграфѣ мы изложимъ нѣкоторыя свойства линейныхъ подстановокъ, которыми будемъ пользоваться впослѣдствіи.

Если имѣется такая совокупность преобразованій перемѣнныхъ x_1, x_2 въ другія перемѣнныя y_1, y_2, что каждая пара преобразованій вмѣстѣ даетъ новое преобразованіе, принадлежащее къ той же совокупности преобразованій, то говорятъ, что всѣ эти преобразованія составляютъ *группу*. Не трудно показать, что всевозможныя линейныя преобразованія $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, $x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ коэффиціентовъ α, β, γ и δ, составляютъ группу.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять два линейныхъ преобразованія:

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,\quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \quad \text{или} \quad S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

и

$$y_1 = \alpha' z_1 + \beta' z_2,\quad y_2 = \gamma' z_1 + \delta' z_2 \quad \text{или} \quad S'\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix},$$

то совмѣстно они дадутъ преобразованіе

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\alpha\alpha' + \beta\gamma')z_1 + (\alpha\beta' + \beta\delta')z_2 = \alpha'' z_1 + \beta'' z_2 \\ x_2 &= (\gamma\alpha' + \delta\gamma')z_1 + (\gamma\beta' + \delta\delta')z_2 = \gamma'' z_1 + \delta'' z_2 \end{aligned}\right\} \quad S''\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix},$$

которое есть также линейное преобразованіе, и, слѣдовательно, *всѣ линейныя преобразованія* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *образуютъ группу.*

Будемъ изображать символическимъ равенствомъ

$$S'' = SS'$$

то обстоятельство, что линейная подстановка S'' есть результатъ двухъ подстановокъ S и S'. Изъ вышеприведеннаго развернутаго вида подстановки S'' не трудно замѣтить, что она, будучи представлена въ формѣ детерминанта, равна дѣйствительному произведенію детерминантовъ, представляющихъ подстановки S и S':

$$\begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix};$$

отсюда слѣдуетъ, что модуль Δ'' составной подстановки S'' равенъ произведенію модулей $\Delta . \Delta'$ подстановокъ сатавляющихъ S и S'.

Если мы условимся разсматривать только такія линейныя подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *модули которыхъ не равны нулямъ*, то для каждой подстановки S

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

будетъ существовать ей обратная

$$y_1 = \quad \frac{\delta}{\Delta} x_1 - \frac{\beta}{\Delta} x_2,$$

$$y_2 = -\frac{\gamma}{\Delta} x_1 + \frac{\alpha}{\Delta} x_2,$$

которую мы будемъ сокращенно обозначать черезъ S^{-1}; ея модуль очевидно равенъ $\frac{1}{\Delta}$, т. е. обратному модулю подстановки S.

Двѣ подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $S'\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ тождественны только въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты α, β, γ, δ одной соотвѣтственно равны коэффиціентамъ α', β', γ', δ' другой; слѣдовательно, линейная подстановка $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ, если даны ея четыре коэффиціента α, β, γ, δ; поэтому можно назвать α, β, γ, δ *существенными параметрами* линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Наконецъ, очевидно, что α, β, γ, δ въ линейной подстановкѣ могутъ получать *непрерывно-измѣняющіяся* значенія.

Все сказанное въ этомъ параграфѣ о линейныхъ подстановкахъ можно формулировать въ слѣдующемъ предложеніи:

Всѣ линейныя подстановки вида

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_1 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

модуль которыхъ Δ *не равенъ нулю, образуютъ непрерывную группу* ∞^4 *попарно обратныхъ преобразованій перемѣнныхъ* (x_1, x_2) *и* (y_1, y_2).

Если функція $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ коэффиціентовъ данной бинарной формы обладаетъ инваріантнымъ свойствомъ относительно двухъ подстановокъ S и S', т. е. удовлетворяетъ соотношеніямъ

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$J(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n') = \Delta'^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$

то эта функція обладаетъ тѣмъ же свойствомъ и относительно составной подстановки $S'' = SS'$; въ самомъ дѣлѣ, примѣняя къ бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$ сначала подстановку S, а къ полученному результату подстановку S' мы будемъ имѣть соотвѣтственно для функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ соотношенія:

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', a_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta'^\lambda J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n);$$

откуда слѣдуетъ соотношеніе

$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta^\lambda \Delta'^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$$

или соотношеніе

$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta''^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$

выражающее инваріантное свойство функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ относительно составной подстановки S''.

§ 4. Унимодулярныя линейныя подстановки и новое опредѣленіе инваріанта бинарной формы.

Линейную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, у которой модуль $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ равенъ единицѣ, мы будемъ называть *унимодулярною*.

Очевидно, что двѣ унимодулярныхъ подстановки S и S' даютъ составную подстановку $S'' = SS'$, тоже унимодулярную, такъ какъ $\Delta'' = \Delta . \Delta' = 1 . 1 = 1$. Слѣдовательно, всѣ унимодулярныя линейныя подстановки образуютъ непрерывную группу преобразованій; а такъ какъ всѣ онѣ заключаются въ группѣ общихъ линейныхъ подстановокъ, то мы скажемъ, что онѣ образуютъ непрерывную *подгруппу* преобразованій въ группѣ всѣхъ линейныхъ подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

Конечно унимодулярная подстановка имѣетъ три существенныхъ параметра, ибо α, β, γ, δ для нея связаны соотношеніемъ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Слѣдовательно, подгруппа унимодулярныхъ подстановокъ содержитъ ∞^3 различныхъ преобразованій и при томъ попарно обратныхъ, потому что подстановка, обратная унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta = 1}$, есть сама унимодулярная подстановка $S^{-1}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}_{\Delta = 1}$.

Изученіе весьма разнообразныхъ свойствъ непрерывныхъ группъ линейныхъ подстановокъ облегчается въ значительной степени разсмотрѣніемъ группъ соотвѣтственныхъ *безконечно-малыхъ* линейныхъ преобразованій.

Идея о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій принадлежитъ норвежскому ученому Софусу Ли. Это понятіе было положено Софусомъ Ли въ основаніе его изслѣдованій о непрерывныхъ группахъ преобразованій, давшихъ столь много блестящихъ открытій. Такое огромное значеніе понятія о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій для теоріи непрерывныхъ группъ объясняется бóльшею простотою свойствъ группъ безконечно-малыхъ преобразованій сравнительно съ группами конечныхъ непрерывныхъ преобразованій; въ этомъ отношеніи понятіе о безконечно-малыхъ преобразованіяхъ на столько же упрощаетъ изученіе свойствъ непрерывныхъ группъ, на сколько исчисленіе безконечно-малыхъ упрощаетъ изученіе свойствъ непрерывныхъ функцій.

Нижеизложенныя изслѣдованія о группахъ линейныхъ подстановокъ въ примѣненіи къ теоріи инваріантовъ бинарныхъ формъ могутъ служить прекрасными примѣрами, какъ надо оперировать съ группами безконечно-малыхъ преобразованій. Но прежде, чѣмъ перейти къ этимъ изслѣдованіямъ, мы укажемъ на новое опредѣленіе инваріанта бинарной формы, которое представляетъ больше удобствъ для нашихъ цѣлей, чѣмъ опредѣленіе въ § 1.

Каждую линейную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно разсматривать какъ составную изъ двухъ подстановокъ:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\varDelta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\varDelta}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\sqrt{\varDelta}} & \frac{\beta}{\sqrt{\varDelta}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}} & \frac{\delta}{\sqrt{\varDelta}}\end{pmatrix},$$

изъ которыхъ вторая — унимодулярная, если $\varDelta = \alpha\delta - \beta\gamma$; эти составляющія подстановки въ развернутомъ видѣ —

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\varDelta} \, . \, y_1, \\ x_2 &= \sqrt{\varDelta} \, . \, y_2 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\varDelta}} y_1 + \frac{\beta}{\sqrt{\varDelta}} y_2, \\ x_2 &= \frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}} y_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varDelta}} y_2. \end{aligned}$$

Если цѣлая, раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы удовлетворяетъ извѣстному условію инваріантности по отношенію къ первой составляющей подстановкѣ, то это равносильно условію однородности функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ относительно количествъ a_0, a_1, $a_2, \ldots a_n$.

Слѣдовательно, для того, чтобы цѣлая раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы удовлетворяла условію инваріантности

$$J(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n)$$

относительно произвольной линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, необходимо и достаточно, чтобы она была, во-первыхъ, однородна и, во-вторыхъ, удовлетворяла бы условію инваріантности относительно всякой унимодулярной линейной подстановки, т. е. условію

$$J(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ \alpha_n) = J(a_0,\ a_1,\ a_1,\ .\ .\ .\ a_n).$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ новому опредѣленію инваріанта бинарной формы: *цѣлая, раціональная и однородная функція* $J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n)$ *служитъ инваріантомъ бинарной формы, если она совсѣмъ не измѣняется, когда перемѣнныя бинарной формы преобразуются посредствомъ подгруппы линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$.

§ 5. Группа безконечно-малыхъ линейныхъ подстановокъ. Унимодулярная подгруппа.

Если въ линейной подстановкѣ

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

положить параметры α, β, γ, δ соотвѣтственно равными 1, 0, 0, 1, то получится подстановка, такъ сказать, *тождественная,* не измѣняющая перемѣнныхъ. Если же α, β, γ, δ дать значенія, безконечно-мало отличающіяся отъ предыдущихъ: $1 + \alpha_1 . \delta t$, $\beta_1 . \delta t$, $\gamma_1 . \delta t$, $1 + \delta_1 . \delta t$, то перемѣнныя y_1, y_2, переходя въ x_1, x_2, измѣнятся на безконечно-малыя величины; поэтому подстановка

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + \alpha_1 . \delta t) y_1 + \beta_1 . \delta t\, y_2, \\ x_2 &= \gamma_1 . \delta t\, y_1 + (1 + \delta_1 . \delta t) y_2 \end{aligned}$$

называется *безконечно-малой линейной подстановкой;* мы будемъ обозначать ее черезъ $S\begin{pmatrix}1 + \alpha_1\, \delta t, & \beta_1\, \delta t\\ \gamma_1\, \delta t, & 1 + \delta_1\, \delta t\end{pmatrix}$.

Не трудно найти выраженіе безконечно-малыхъ приращеній x_1 и x_2 при такомъ безконечно-маломъ преобразованіи.

Пусть x_1, x_2 переходятъ черезъ подстановку $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\partial t & \beta_1\partial t\\ \gamma_1\partial t & 1+\delta_1\partial t\end{pmatrix}$ въ x_1', x_2', и пусть $\partial x_1 = x_1' - x_1$, $\partial x_2 = x_2' - x_2$; тогда мы будемъ имѣть:

$$x_1' = (1+\alpha_1\partial t)\,x_1 + \beta_1\partial t\,.\,x_2,$$
$$x_2' = \gamma_1\partial t\,.\,x_1 + (1+\delta_1\partial t)\,x_2;$$

отсюда

$$\partial x_1 = \alpha_1\partial t\,.\,x_1 + \beta_1\partial t\,.\,x_2 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\partial t,$$
$$\partial x_2 = \gamma_1\partial t\,.\,x_1 + \delta_1\partial t\,.\,x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\partial t.$$

Не трудно также вычислить приращеніе $\partial f(x_1, x_2)$ какой угодно функціи $f(x_1, x_2)$, когда ея перемѣнныя подвергнуты безконечно-малой подстановкѣ: въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\partial f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\partial x_2,$$

вставляя въ это равенство вмѣсто ∂x_1, ∂x_2 ихъ вышеприведенныя выраженія, мы получимъ

$$\partial f(x_1 x_2) = \left\{(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}.\,\partial t.$$

Выраженіе

$$U(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

вполнѣ опредѣляетъ нашу безконечно-малую подстановку, потому что, положивъ въ немъ послѣдовательно $f = x_1$ и $f = x_2$, мы будемъ имѣть

$$U(x_1) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,.\,1,$$
$$U(x_2) = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,.\,1,$$

и отсюда получаемъ

$$\partial x_1 = x'_1 - x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\partial t,$$
$$\partial x_2 = x'_2 - x_1 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\partial t$$

или

$$x_1' = (1 + \alpha_1 \partial t)\, x_1 + \qquad \beta_1 \partial t\, .\, x_2\,,$$
$$x_2' = \qquad \gamma_1 \partial t\, .\, x_1 + (1 + \delta_1 \partial t)\, x_2\,;$$

это и есть наша безконечно-малая подстановка. Вслѣдствіе всего этого мы можемъ назвать выраженіе $U(f)$ символомъ безконечно-малой линейной подстановки. Мы видимъ, что символъ $U(f)$ содержитъ четыре произвольныхъ количества α_1, β_1, γ_1, δ_1, но его существенными параметрами служатъ только ихъ отношенія $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$, потому что α_1 можно въ выраженіи $U(f)$ вынести за скобку и $\alpha_1 \partial t$ принять за новую безконечно-малую величину $\partial t'$. Кромѣ того, очевидно, что двѣ безконечно-малыхъ линейныхъ подстановки даютъ составную подстановку, тоже безконечно-малую и линейную.

Слѣдовательно, *безконечно-малыя линейныя подстановки образуютъ въ группѣ всѣхъ линейныхъ подстановокъ* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *новую подгруппу съ* ∞^3 *различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій.*

Если, наоборотъ, перейти отъ соотношеній между безконечно-малыми величинами

$$\partial x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\, \partial t,$$
$$\partial x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\, \partial t,$$

къ соотношеніямъ между конечными количествами, т. е. проинтегрировать систему дифференціальныхъ ур-ій d' Alembert'a

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2,$$

то мы получимъ, конечно, линейную подстановку

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,$$
$$x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

гдѣ α, β, γ, δ будутъ функціями трехъ параметровъ $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$ безконечно-малой подстановки $U(f)$ и четвертаго параметра t (или t'); произвольныя же постоянныя интегрированія опредѣлятся условіями: $t = 0$, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$. Слѣдовательно, каждая безконечно-малая подстановка $U(f)$ образуетъ цѣлый непрерывный рядъ конечныхъ линейныхъ подстановокъ, характеризуемый однимъ параметромъ t, т. е. ∞' конечныхъ линейныхъ подстановокъ. Остается показать, что всякую конечную подстановку можно получить изъ этихъ безконечно-малыхъ.

Коэффиціенты α, β, γ, δ опредѣляются какъ функціи t изъ соотношеній:

$$\frac{d\alpha}{dt}x_1 + \frac{d\beta}{dt}x_2 = \alpha_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + \beta_1(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

$$\frac{d\gamma}{dt}x_1 + \frac{d\delta}{dt}x_2 = \gamma_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + \delta_1(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

т. е.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1\alpha + \beta_1\gamma, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \alpha_1\beta + \beta_1\delta,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1\alpha + \delta_1\gamma, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \gamma_1\beta + \delta_1\delta.$$

Если при $t = 0$ начальныя значенія α, β, γ, δ обозначить черезъ α_0, β_0, γ_0, δ_0, то по строкѣ Тэйлора

$$\alpha = \alpha_0 + (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\gamma_0)t + \ldots \beta = \beta_0 + (\alpha_1\beta_0 + \beta_1\delta_0)t + \ldots$$

$$\gamma = \gamma_0 + (\gamma_1\alpha_0 + \delta_1\gamma_0)t + \ldots \delta = \delta_0 + (\gamma_1\beta_0 + \delta_1\delta_0)t + \ldots$$

слѣдовательно, α, β, γ, δ суть функціи $\alpha_1 t$, $\beta_1 t$, $\gamma_1 t$, $\delta_1 t$, — всегда существующія; кромѣ того, эти функціи независимы между собою, такъ какъ детерминантъ Якоби

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial(\alpha_1 t)} & \frac{\partial \alpha}{\partial(\beta_1 t)} & \frac{\partial \alpha}{\partial(\gamma_1 t)} & \frac{\partial \alpha}{\partial(\delta_1 t)} \\ \frac{\partial \beta}{\partial(\alpha_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\beta_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\gamma_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\delta_1 t)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

не равенъ нулю; слѣдовательно, всякая конечная подстановка $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ можетъ быть получена комбинаціей безконечно-малыхъ подстановокъ

$$U(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot$$

Разсмотримъ, далѣе, подгруппу линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{\Delta = 1}$.

Безконечно-малая линейная подстановка

$$\begin{aligned} x'_1 &= (1 + \alpha_1 \partial t)\ x_1 + \beta_1 \partial t \,.\, x_2, \\ x'_2 &= \gamma_1 \partial t \,.\, x_1 + (1 + \delta_1 \partial t)\, x_2 \end{aligned}$$

будетъ унимодулярной, если выполняется условіе

$$(1 + \alpha_1 \partial t)\,(1 + \delta_1 \partial t) - \beta_1 \gamma_1 \partial t^2 = 1$$

при всякомъ ∂t, то есть условіе

$$1 + (\alpha_1 + \delta_1)\,\partial t = 1,$$

если пренебречь безконечно-малою величиною втораго порядка; отсюда мы имѣемъ $\delta_1 = -\alpha_1$. Слѣдовательно, символъ безконечно-малой линейной унимодулярной подстановки долженъ имѣть видъ:

$$U_1(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

или

$$U_1(f) = \alpha_1\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \beta_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2};$$

отсюда мы заключаемъ, что безконечно-малая линейная унимодулярная подстановка имѣетъ *два существенныхъ* параметра $\frac{\beta_1}{d_1}$, $\frac{\gamma_1}{d_1}$, такъ какъ въ выраженіи

$$\partial f = U_1(f)\,.\,\partial t$$

можно α_1 вынесть за скобку и принять $\alpha_1\,\partial t$ за безконечно-малое приращеніе $\partial t'$ новой переменной величины t'.

Конечно, двѣ безконечно-малыхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановки даютъ подстановку того-же типа; слѣдовательно, *всѣ безконечно-малыя линейныя унимодулярныя подстановки образуютъ группу съ ∞^2 различныхъ преобразованій.*

Въ случаѣ унимодулярныхъ подстановокъ какъ и въ общемъ случаѣ какихъ угодно линейныхъ подстановокъ, если перейти отъ соотношеній

$$\partial x_1 = (\alpha_1\, x_1 + \beta_1\, x_2)\, \partial t,$$
$$\partial x_2 = (\gamma_1\, x_1 - \alpha_1\, x_2)\, \partial t,$$

къ соотношеніямъ между конечными величинами, т. е. проинтегрировать систему дифференціальныхъ ур-ій d' Alembert'а:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1\, x_1 + \beta_1\, x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma_1\, x_1 - \alpha_1\, x_2,$$

конечно, въ результатѣ получится линейное 1) унимодулярное преобразованіе

---

1) Выше мы видѣли, что всякую подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно получить, комбинируя безконечно-малыя подстановки

$$U(f) = (\alpha_1\, x_1 + \beta_1\, x_2)\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1\, x_1 + \delta_1\, x_2)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Если при этомъ $\delta_1 = -\alpha_1$, то не трудно показать, что детерминантъ $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$ конечной подстановки будетъ равенъ 1; въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{\partial\,\Delta}{\partial t} = \frac{\partial(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial\delta}{\partial t} + \delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \beta\,\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \gamma\,\frac{\partial\beta}{\partial t}$$

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

$$x'_1 = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

у котораго α, β, γ, δ суть функціи двухъ параметровъ $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ безконечно-малой подстановки $U(f)$ и третьяго параметра t (или t'), удовлетворяющія условія $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; произвольныя же постоянныя интегрированія опредѣляются изъ условій: $t = o$, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$.

Слѣдовательно, каждая безконечно-малая линейная унимодулярная подстановка образуетъ цѣлый непрерывный рядъ конечныхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ, характеризуемый однимъ параметромъ t, т. е. ∞^1 конечныхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ.

§ 6. Дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы. Способъ Gordan'a.

Въ 1852 году Cayley 1) и Sylvester 2) нашли систему дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, опредѣляющую инваріанты данной бинарной формы.

Эти дифференціальныя уравненія еще раньше были найдены Aronhold'омъ, который положилъ ихъ въ основаніе своихъ изслѣдованій, представленныхъ имъ Кёнигсберскому Университету въ 1851 году, но эти изслѣдованія были опубликованы только въ 1863 году въ журналѣ Crell'я, Bd. 62.

Gordan въ своихъ лекціяхъ по теоріи инваріантовъ 3) далъ слѣдующій весьма изящный выводъ этихъ дифферен-

---

или, принявъ во вниманіе формулы на страницѣ 28, получимъ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \alpha(\gamma_1\beta + \delta_1\delta) + \delta(\alpha_1\alpha + \beta_1\gamma) - \beta(\gamma_1\alpha + \delta_1\gamma) - \gamma(\alpha_1\beta + \beta_1\delta) =$$
$$= (\alpha_1 + \delta_1)\Delta;$$

при начальныхъ условіяхъ $t=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$ и, слѣдовательно, $\Delta=1$, мы получимъ $\Delta = e^{(\alpha_1+\delta_1)t}$; слѣдовательно $\Delta = 1$, если $\delta_1 = -\alpha_1$.

1) Crelle's Journal. Bd. 47, S. 109.

2) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1852, Section VI.

3) Gordan. *Vorlesungen über Invariantentheorie,* herausgegeben von G. Kerschensteiner. Bd. 2. S. 119.

ціальныхъ уравненій, въ сущности сходный съ общимъ выводомъ Aronhold'а въ журналѣ Crelle'я, Bd. 62.

Будемъ исходить изъ опредѣленія инваріанта бинарной формы, приведеннаго въ § 1: цѣлая раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ служитъ инваріантомъ послѣдней, если удовлетворяетъ тождественно равенству

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n), \qquad (1)$$

гдѣ Δ есть модуль линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, а количества $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть коэффиціенты бинарной формы $\varphi(y_1, y_2)$, полученной изъ $f(x_1, x_2)$ при помощи этой линейной подстановки.

Модуль $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ удовлетворяетъ слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}\gamma = \Delta, \\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\beta + \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}\delta = 0, \\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta}\gamma = 0, \\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta}\delta = \Delta; \end{aligned} \qquad (2)$$

въ справедливости ихъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ.

Если примѣнить къ обѣимъ частямъ равенства (1) четыре операціи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma, \\ &\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta + \frac{\partial}{\partial\gamma}\delta, \\ &\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial}{\partial\delta}\gamma, \\ &\frac{\partial}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial}{\partial\delta}\delta \end{aligned}$$

и принять во вниманіе равенства (2), то мы получимъ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial J(a)}{\partial a}\alpha+\frac{\partial J(a)}{\partial\gamma}\gamma=\lambda J(\alpha),\\
&\frac{\partial J(a)}{\partial a}\beta+\frac{\partial J(a)}{\partial\gamma}\delta=0,\\
&\frac{\partial J(a)}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial J(a)}{\partial\delta}\gamma=0,\\
&\frac{\partial J(a)}{\partial\beta}\beta+\frac{\partial J(a)}{\partial\delta}\delta=\lambda J(\alpha);
\end{aligned}
$$

эту же систему дифференціальныхъ уравненій можно представить въ другомъ видѣ, если замѣтимъ, что $J(\alpha)=$ $=J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ есть сложная функція отъ количествъ α, β, γ и δ, входящихъ въ количества a_0, α_1, a_2, $\ldots$ α_n; такимъ образомъ мы получимъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial a}\alpha+\frac{\partial a_k}{\partial\gamma}\gamma\right)=\lambda J(\alpha)\\
&\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial a}\beta+\frac{\partial a_k}{\partial\gamma}\delta\right)=0,\\
&\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial a_k}{\partial\delta}\gamma\right)=0,\\
&\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial\beta}\beta+\frac{\partial a_k}{\partial\delta}\delta\right)=\lambda J(\alpha).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Въ § 1 мы замѣтили, преобразуя бинарную форму $f(x_1, x_2)$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, что коэффиціенты α_0, α_1, α_2, $\ldots$ α_n преобразованной формы $\varphi(y_1, y_2)$ суть однородныя функціи каждой пары величинъ (α, γ) и (β, δ), при чемъ α_k имѣетъ степень $n-k$ относительно (α, γ) и степень k относительно (β, δ). Слѣдовательно, по теоремѣ Эйлера объ однородныхъ функціяхъ мы можемъ написать:

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\gamma = (n-k)\,\alpha_k,$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial a_k}{\partial \delta}\delta = \qquad k\,\alpha_k.$$

Точно также изъ выраженій коэффиціента α_k въ § 1 слѣдуетъ

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\delta = (n-k)\,\alpha_{k+1},$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\alpha + \frac{\partial a_k}{\partial \delta}\gamma = \qquad k\,\alpha_{k-1}.$$

Такимъ образомъ уравненія (3) можно представить въ формѣ:

$$\sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\alpha_k \;= \lambda J(a),$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\alpha_{k+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\qquad k\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\alpha_{k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\qquad k\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\alpha_k \;= \lambda J(a).$$

Эти уравненія должны имѣть мѣсто для всякой подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; слѣдовательно, разсматривая ихъ относительно подстановки $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и обозначая $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ черезъ J, мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
&n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0 + (n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1 + (n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2 + \ldots + 1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_{n-1} = \lambda J,\\
&n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1 + (n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2 + (n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3 + \ldots + 1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n \;\;= 0,\\
&1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0 + \quad 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1 + \quad 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2 + \ldots + n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1} = 0,\\
&1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1 + \quad 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2 + \quad 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_3 + \ldots + n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n \;\;= \lambda J.
\end{aligned}\tag{4}$$

Если сложить первое съ четвертымъ, то получится еще дифференціальное уравненіе инваріанта

$$n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+n\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+n\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots+n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n=2\lambda J,$$

или раздѣливъ обѣ части его на n и полагая $\frac{2\lambda}{n}=\mu$ (μ по § 2 есть степень инваріанта), мы получимъ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots\ldots+\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n=\mu\,.\,J, \qquad (5)$$

которое по теоремѣ Эйлера характеризуетъ однородность функціи J.

§ 7. Новый способъ выводить дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы.

Будемъ исходить изъ опредѣленія инваріанта бинарной формы, приведеннаго въ § 4: цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$ служитъ инваріантомъ послѣдней, если она совсѣмъ не измѣняется, когда бинарная форма подвергается преобразованію посредствомъ какой-нибудь подстановки подгруппы линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ.

Въ то время какъ перемѣнныя x_1, x_2 преобразуются линейною унимодулярною подстановкою $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ въ перемѣнныя y_1, y_2, *коэффиціенты* a_0, a_1, a_2, . . . a_n *переходятъ въ коэффиціенты* α_0, α_1, α_2, . . . α_n *тоже посредствомъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ*[1]), которыя получатся въ явномъ видѣ, если разрѣшить относительно a_0, a_1, a_2, . . . a_n систему уравненій § 1:

$$\frac{n-k\,!}{n\,!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)=\alpha_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

---

[1]) Не трудно доказать, что модуль подстановки S_a для коэффиціентовъ a равенъ степени модуля соотвѣтственной подстановки S для перемѣнныхъ.

или другую систему тогоже параграфа:

$$\frac{k!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta)=\alpha_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

Назовемъ эти выраженія для количествъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n *подстановкою* S_a. Очевидно, что подстановка S_a имѣетъ три существенныхъ параметра — количества α, β, γ, δ, связанныя соотношеніемъ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Кромѣ того, очевидно, что двѣ подстановки S_a и S'_a даютъ составную подстановку S''_a тогоже типа, потому что эта составная подстановка S''_a соотвѣтствуетъ подстановкѣ $S''\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ (x_1, x_2). Слѣдовательно, *линейныя унимодулярныя подстановки* S_a *коэффиціентовъ* a_0, a_1, . . . a_n, *соотвѣтствующія линейнымъ унимодулярнымъ подстановкамъ* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ *перемѣнныхъ* (x_1, x_2), *образуютъ группу* ∞^3 *различныхъ попарно обратныхъ преобразованій.*

Если въ подстановкѣ S_a, имѣющей видъ

$$a'_k=\alpha_{k,0}\,a_0+\alpha_{k,1}\,a_1+\ldots+\alpha_{k,n}\,a_n,\ k=0,1,2,\ldots n,\qquad \text{(A)}$$

положить $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{1,1}$, . . . $\alpha_{n,n}$ соотвѣтственно равными $1+\beta_{0,0}\,\delta t$, $1+\beta_{1,1}\,\delta t$, . . . $1+\beta_{n,n}\,\delta t$, а остальные коэффиціенты $\alpha_{i,k}$ — равными $\beta_{i,k}\,\delta t$, то мы получимъ безконечно-малую подстановку группы подстановокъ S_a, принявъ, конечно, во вниманіе, что детерминантъ изъ коэффиціентовъ подстановки долженъ равняться 1. Перенеся, затѣмъ, изъ вторыхъ частей конечныя члены a_0, a_1, . . . a_n въ первыя, мы получимъ выраженія приращеній $a'_k - a_k = \delta a_k$ количествъ a_k при этомъ безконечно-маломъ преобразованіи:

$$\delta a_k=a_0\,\beta_{k,0}\,\delta t+a_1\,\beta_{k,1}\,\delta t+\ldots+a_n\,\beta_{k,n}\,\delta t,\ k=0,1,2,\ldots n,$$

или сокращено

$$\delta a_k=-\,\xi_k\,(a_0,a_1,a_2,\ldots a_n)\,\delta t\ ^{1)}.$$

---

1) Знакъ — ставимъ для большаго удобства въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Слѣдовально, какая-нибудь функція $F(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ получаетъ приращеніе:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial F}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\delta a_n =$$

$$= -\left\{\frac{\partial F}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial F}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\xi_n\right\}.\,\delta t, \tag{B}$$

или сокращено $\delta F = V(F).\,\delta t$.

Въ то время какъ конечныя преобразованія (A) группы S_a опредѣляются сравнительно сложно, весьма не трудно опредѣлить ея безконечно-малыя преобразованія; въ этомъ мы можемъ уже замѣтить плодотворность идеи норвежскаго ученаго о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій.

Преобразуемъ перемѣнныя x_1, x_2 бинарной формы $f(x_1, x_2)$ посредствомъ унимодулярной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, а коэффиціенты ея посредствомъ соотвѣтственной унимодулярной подстановки S_a, тогда бинарная форма $f(x_1, x_2)$ обратится въ бинарную форму $\varphi(y_1, y_2)$, равную ей самой: $f(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2)$. Слѣдовательно, при безконечно-малыхъ преобразованіяхъ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t\\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ и S_a приращеніе $\delta f(x_1, x_2)$ должно равняться нулю независимо отъ δt; но при этихъ двухъ преобразованіяхъ приращеніе будетъ имѣть видъ:

$$\delta f(x_1 x_2) = \{U_1(f) - V(f)\}\,\delta t,$$

гдѣ $U_1(f)$ по § 5 равно $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, а $V(f)$ дано выше формулой (B). Слѣдовательно, мы получаемъ равенство:

$$(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0 - \frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1 - \frac{\partial f}{\partial a_2}\xi_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_n = 0,$$

которое должно имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x_1, x_2, т. е. коэффиціенты всѣхъ его членовъ по ихъ приведеніи должны быть нулями. Это равенство въ развернутой формѣ имѣетъ видъ:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\Big[n a_0 x_1^{n-1} + \binom{n}{1}(n -- 1)\, a_1\, x_1^{n-2}\, x_2 + \,.\,.\,.\,.\Big] \\
+ (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\Big[\qquad + \binom{n}{1} \qquad 1.\, a_1\, x_1^{n-1} \qquad + \,.\,.\,. + \\
+ \binom{n}{1}(n-1)\, a_{n-1}\, x_1\, x_2^{n-2} + n a_n x_2^{n-1}\Big] \\
- \Big[\xi_0 x_1^n + \binom{n}{1}\xi_1 x_1^{n-1} x_2 + \,.\,.\,. + \xi_n x_2^n\Big] \equiv 0\,;
\end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\begin{array}{lllllll}
\xi_0 & = & n\, a_0 & .\,\alpha_1 + & 0 & .\,\beta_1 + & n\,.\,a_1\,.\,\gamma_1, \\
\xi_1 & = & (n-2)\, a_1 & .\,\alpha_1 + & 1\,.\,a_0 & .\,\beta_1 + & (n-1)\,.\,a_2\,.\,\gamma_1, \\
\xi_2 & = & (n-4)\, a_2 & .\,\alpha_1 + & 2\,.\,a_1 & .\,\beta_1 + & (n-2)\,.\,a_3\,.\,\gamma_1, \\
. & . & . & . & . & . & . \qquad (6) \\
\xi_{n-1} & = & (n-2n+2)\, a_{n-1} & .\,\alpha_1 + & (n-1)\,.\,a_{n-2} & .\,\beta_1 + & 1\,.\,a_n\,.\,\gamma_1, \\
\xi_n & = & (n-2n)\, a_n & .\,\alpha_1 + & n\,.\,a_{n-1} & .\,\beta_1 + & 0\quad .\,\gamma_1.
\end{array}$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили безконечно-малыя подстановки группы S_a.

Теперь не трудно вывесть дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы, исходя изъ ихъ опредѣленія, приведеннаго въ началѣ этого параграфа.

Приращеніе инваріанта $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ при какихъ угодно безконечно-малыхъ преобразованіяхъ группы S_a должно равняться нулю; слѣдовательно,

$$V[J(a)] = \frac{\partial J(a)}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial J(a)}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial J(a)}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial J(a)}{\partial a_n}\xi_n \qquad (7)$$

должно равняться нулю независимо отъ α_1, β_1, γ_1; поэтому, принимая во вниманіе значенія (6) количествъ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, мы получаемъ три дифференціальныхъ уравненія инваріантовъ бинарной формы:

$$2\left[1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_3+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n\right]-n\mu.J=0, \quad \left(\frac{n\mu}{2}=\lambda\right)$$

$$1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}=0, \qquad \text{(D)}$$

$$n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+(n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+(n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+\ldots+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n=0\,;$$

этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ должна удовлетворять цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, служащая инваріантомъ бинарной формы.

Наоборотъ, если цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ удовлетворяетъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, то не трудно показать, что она служитъ инваріантомъ бинарной формы.

Въ самомъ дѣлѣ, если цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то приращеніе этой функцій при всякомъ безконечно-маломъ преобразованіи группы S_a равно нулю. Но такъ какъ всякую конечную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ

$$U_1(f)=(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(\gamma_1 x_1-\delta_1 x_2)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\,{}^{1)},$$

то и всякую конечную подстановку группы S_a можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ этой группы:

$$V(f)=\frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1+\frac{\partial f}{\partial a_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_n\,;$$

---

1) См. § 5.

слѣдовательно, приращеніе функціи $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ и при всякой конечной подстановкѣ группы S_a будетъ равно нулю, если оно равно нулю для всякой безконечно-малой подстановки $V(f)$, и функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ будетъ инваріантомъ бинарной формы.

Присоединимъ къ системѣ дифференціальныхъ уравненій (D) еще уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \frac{\partial J}{\partial a_n} a_n = \mu J, \qquad (\mathrm{D}')$$

характеризующее по теоремѣ Эйлера однородность функціи J, и еще уравненіе

$$n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + (n-1) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + (n-2) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + 1 \cdot \frac{\partial J}{a_{n-1}} a_{n-1} = \lambda J \qquad (\mathrm{D}'')$$

которое получается вычитаніемъ перваго уравненія (D) изъ уравненія (D′), предварительно умноженнаго на n. Такимъ образомъ получится система дифференціальныхъ уравненій (D), (D′), (D″) совершенно тождественная съ системою уравненій 4 и 5 предыдущаго параграфа.

§ 8. Значеніе дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ бинарной формы.

Если обозначить сокращенно первыя части уравненій (D) предыдущаго параграфа черезъ $-X_3(J)$, $X_2(J)$ и $X_1(J)$ то символъ (7) всѣхъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы S_a приметъ видъ

$$V(J) = \alpha_1 X_3(J) + \beta_1 X_2(J) + \gamma_1 X_1(J);$$

слѣдовательно, $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$ суть ничто другое какъ символы трехъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы S_a, соотвѣтствующихъ частнымъ значеніямъ α_1, β_1, γ_1:

$$1,\ 0,\ 0; \quad 0,\ 1,\ 0; \quad 0,\ 0,\ 1.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что дифференціальныя уравненія (D) предыдущаго параграфа:

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0,$$

опредѣляющія инваріанты бинарной формы, имѣютъ слѣдующій смыслъ: *для того, чтобы цѣлая раціональная и однородная функція* $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила инваріантомъ бинарной формы, т. е. не измѣнялась при всѣхъ преобразованіяхъ группы* S_a, *вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ трехъ безконечно-малыхъ преообразованій* $X_3(J)$, $X_2(J)$ и $X_1(J)$ *группы* S_a.

Далѣе, мы докажемъ, что изъ трехъ уравненій

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0$$

только два существенно необходимы, а третье есть слѣдствіе этихъ двухъ.

Разсмотримъ два линейныхъ выраженія съ частными производными перваго порядка:

$$Z_2(f) = A_0'' \frac{\partial f}{\partial a_0} + A_1'' \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2'' \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + A_n'' \frac{\partial f}{\partial a_n} = \sum_0^n A_k'' \frac{\partial f}{\partial a_k},$$

$$Z_1(f) = A_0' \frac{\partial f}{\partial a_0} + A_1' \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2' \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + A_n' \frac{\partial f}{\partial a_n} = \sum_0^n A_k' \frac{\partial f}{\partial a_k},$$

гдѣ A_k'' и A_k' суть функціи количествъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$.

Возьмемъ операцію Z_1 отъ $Z_2(f)$; получится

$$Z_1[Z_2(f)] = \sum_0^n B_k'' \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum A_k' A_i'' \frac{\partial^2 f}{\partial a_k \partial a_i};$$

точно также

$$Z_2[Z_1(f)] = \sum_0^n B_k' \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum A_k' A_i'' \frac{\partial^2 f}{\partial a_k \partial a_i};$$

слѣдовательно, выраженіе

$$Z_1[f_2(f)] - Z_2[Z_1(f)]$$

есть линейное и перваго порядка относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial a_k}$. Такимъ образомъ, мы видимъ, если операціи Z_2 и Z_1 линейныя и перваго порядка относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial}{\partial a_k}$, то операція $(Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1)$ тоже будетъ линейная и перваго порядка относительно этихъ частныхъ производныхъ.

Не трудно видѣть, что функція, удовлетворяющая уравненіямъ $Z_2(f) = 0$ и $Z_1(f) = 0$, удовлетворяетъ и уравненію

$$Z_3(f) = (Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1) f = 0,$$

потому что послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ

$$Z_1[Z_2(f)] - Z_2[Z_1(f)] = 0,$$

гдѣ каждый членъ обращается въ нуль въ силу равенствъ $Z_2(f) = 0$ и $Z_1(f) = 0$.

Слѣдовательно, имѣя два линейныхъ уравненія съ частными производными перваго порядка

$$Z_2(f) = 0 \quad Z_1(f) = 0,$$

мы можемъ получить уравненіе

$$Z_3(f) = (Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1) f = 0,$$

какъ слѣдствіе двухъ данныхъ, но не равное ихъ линейному сочетанію. Затѣмъ, посредствомъ операцій

$$(Z_2 Z_3 - Z_3 Z_2) \quad \text{и} \quad (Z_1 Z_3 - Z_3 Z_1)$$

можемъ получить еще два уравненія

$$Z_5(f) = 0 \quad \text{и} \quad Z_4(f) = 0; \quad \text{и т. д.}$$

наконецъ, мы должны получить такую систему равненій

$$Z_m(f) = 0, \quad Z_{m-1}(f) = 0 \ . \ . \ . \ Z_2(f) = 0 \ \text{и} \ Z_1(f) = 0,$$

что дальнѣйшее примѣненіе нашихъ операцій даютъ линейныя сочетанія уравненій, уже полученныхъ; тогда система уравненій называется *полною* [1]).

Не трудно видѣть, что уравненіе $X_3(J) = 0$ инваріан-

---

[1]) Этотъ процесъ долженъ имѣть конецъ, потому что для $n+1$ перемѣнныхъ могутъ быть только $n+1$ линейно независимыхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

товъ бинарной формы есть слѣдствіе другихъ двухъ уравненій $X_2(J)=0$ и $X_1(J)=0$, и есть ничто другое какъ уравненіе

$$(X_1 X_2 - X_2 X_1)\, J = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$X_1(J) = n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 + (n-2) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 + \ldots + \\ + 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n,$$

$$X_2(J) = 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \quad 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \quad 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \\ + n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1}$$

слѣдовательно,

$$X_1[X_2(J)] = n \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + 2(n-1) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + 3(n-2) \frac{\partial J}{\partial a_3} a_3 + \ldots + \\ + n \cdot 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} a_n + \sum k(n-i) \frac{\partial^2 J}{\partial a_k\, \partial a_i} a_{k-1}\, a_{i+1},$$

$$X_2[X_1(J)] = n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + 2(n-1) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + 3(n-2) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \\ + n \cdot 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_{n-1} + \sum k(n-i) \frac{\partial^2 J}{\partial a_k\, \partial a_i} a_{k-1}\, a_{k+1};$$

отсюда получаемъ выраженіе

$$(X_1 X_2 - X_2 X_1) J = -n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 - (n-2) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 - (n-4) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 - \ldots - \\ -(n-2n+2) \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_{n-1} + n \frac{\partial J}{\partial a_n} a_n \\ = 2\left[1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + n \frac{\partial J}{\partial a_n} a_n\right] - n\mu J,$$

которое, будучи приравнено нулю, и даетъ намъ третье уравненіе инваріантовъ

$$X_3(J) = 0.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная функція* $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ*

$$X_2(J) = 0 \quad \text{и} \quad X_1(J) = 0,$$

или, что тоже самое, чтобы она не измѣнялась отъ двухъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_1(f)$ и $X_2(f)$ *группы* S_a.

Не трудно показать, что система трехъ дифференціальныхъ уравненій

$$X_3(J) = 0, X_2(J) = 0, X_1(J) = 0.$$

есть *полная система*.

Составимъ выраженія $(X_1 X_3 - X_3 X_1)J$ и $(X_2 X_3 - X_3 X_2)J$:

$$(X_1 X_3 - X_3 X_1)J =$$

$$= n \cdot n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1)(n-2) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 +$$

$$+ (n-2)(n-4) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 + \ldots + 1 . (n - 2n + 2) \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n$$

$$-(n-2) n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 - (n-4)(n-1) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 -$$

$$-(n-6)(n-2) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 - \ldots - (n-2n) . 1 \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n$$

$$= 2n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + 2(n-1) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 + 2(n-2) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 +$$

$$+ \ldots 2 \cdot 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n$$

$$= 2 [X_1(J)];$$

$$(X_2 X_3 - X_3 X_2)J =$$

$$= 1 . (n-2) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2(n-4) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3(n-6) \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 +$$

$$+ \ldots + n(n-2n) \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1}$$

$$-n\cdot 1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0-(n-2)\cdot 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1-(n-4)\cdot 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2-$$

$$-\ldots-(n-2n+2)\cdot n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$

$$=-2\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0-2\cdot 2\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1-2\cdot 3\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2-\ldots-2\cdot n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$

$$=-2\,[X_2(J)]\,;$$

отсюда заключаемъ, что наши операціи не даютъ новыхъ уравненій, линейно независимыхъ отъ прежнихъ трехъ, и слѣдовательно система

$$X_3(J)=0\,,\ X_2(J)=0\,,\ X_1(J)=0$$

есть полная1).

Если $n=2$, то мы имѣемъ

$$X_2(J)=1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1,$$

$$X_1(J)=2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2;$$

слѣдовательно,

$$X_3(J)=(X_1X_2-X_2X_1)\,J=-2\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+2\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2$$

или

$$a_1X_3(J)=-a_0X_1(J)+a_2X_2(J)\,;$$

отсюда мы видимъ, что при $n=2$ два изъ дифференціальныхъ уравненій

$$X_3(J)=0, X_2(J)=0, X_1(J)=0$$

образуютъ полную систему. Тоже самое имѣетъ мѣсто при $n=1$.

---

1) Это вытекаетъ также какъ слѣдствіе изъ основнаго предложенія теоріи непрерывныхъ группъ Софуса Ли: *Для того, чтобы* r *линейно независимыхъ безконечно-малыхъ преобразованій* $X_1(f)$, $X_2(f)$, $\ldots$ $X_r(f)$ *образовали непрерывную группу* ∞^r *попарно обратныхъ преобразованій, заключающую въ себѣ всѣ конечныя преобразованія, которыя образуются посредствомъ всякаго безконечно-малаго преобразованія* $X(f)=e_1\,X_1(f)+e_2\,X_2(f)+\ldots+e_n\,X_n(f)$, *необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы каждое изъ выраженій* $(X_i\,X_k-X_k\,X_i)\,f$ *равнялось линейному сочетанію выраженій* $X_1(f)$, $X_2(f)$, $\ldots$ $X_r(f)$.

§ 9. Конечныя подстановки, образуемыя безконечно-малыми преобразованіями $X_2(J)$ и $X_1(J)$.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы показали, что цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ только тогда служитъ инваріантомъ бинарной формы, когда она не измѣняется отъ двухъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$; но если она не измѣняется отъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$, то, конечно, она не измѣняется отъ конечныхъ преобразованій, получаемыхъ послѣдовательными примѣненіями этихъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$. Такимъ образомъ, для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ служила инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ конечныхъ преобразованій, получаемыхъ безконечно-малыми преобразованіями $X_2(J)$ и $X_1(J)$.

Найдемъ эти двѣ системы [1]) конечныхъ преобразованій, которыя вполнѣ опредѣляютъ инваріантъ бинарной формы.

При этихъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ функція J получаетъ безконечно-малыя приращенія:

$$\delta'' J = \left[1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \ldots + n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1}\right] \partial t,$$

$$\delta' J = \left[n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1) \frac{\partial J}{\partial a^1} a_2 + \ldots + 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n\right] \partial t:$$

полагая послѣдовательно $J = a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, мы получимъ безконечно-малыя приращенія

$$1)\ \delta'' a_0 = 0,\ \delta'' a_1 = 1 . a_0 \partial t,\ \delta'' a_2 = 2 . a_1 \partial t, \ldots \delta'' a_n = n . a_{n-1} \partial t,$$

$$2)\ \delta' a_0 = n a_1 \partial t,\ \delta' a_1 = (n-1) . a_2 \partial t,\ \delta' a_2 = (n-2) . a_3 \partial t, \ldots$$
$$\delta' a_{n-1} = 1 . a_n \partial t,\ \delta' a_n = 0; \qquad (A)$$

---

1) Каждая изъ этихъ системъ въ отдѣльности составляетъ *группу* ∞^1 преобразованій; *см.* Sophus Lie. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitezimalen Transformationen.* (Кар. 2). Leipzig. 1891; это слѣдуетъ также изъ ихъ формулъ (B) и (C).

первая система имѣетъ интегралы вида

$$a_0 = c_0, \;\; a_1 = c_0 t + c_1, \;\; a_2 = c_0 t^2 + 2\, c_1 t + c_2, \ldots \qquad (B)$$

это и есть система конечныхъ преобразованій, получаемыхъ безконечно-малымъ преобразованіемъ $X_2(J)$.

Возьмемъ цѣлую, раціональную и однородную функцію J отъ этихъ интеграловъ, тогда $\delta'' J = 0$ и, слѣдовательно,

$$J(c_0, \; c_0 t + c_1, \; c_0 t^2 + 2\, c_1 t + c_2, \ldots) = C,$$

или полагая $t = 0$, получимъ $C = J(c_0, \; c_1, \; c_2, \; . \; . \; . \; c_n)$; слѣдовательно, функціональное соотношеніе

$$J(c_0, \; c_0 t + c_1, \; c_0 t^2 + 2\, c_1 t + c_2, \ldots) = J(c_0, \; c_1, \; c_2, \ldots c_n)$$

совершенно равносильно дифференціальному соотношенію $\delta'' J = 0$; это же функціональное соотношеніе есть ничто иное какъ условіе инваріантности функціи J относительно преобразованій (B), соотвѣтствующихъ линейной унимодулярной подстановкѣ:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + t y_2, \\ x_2 &= y_2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Точно также вторая система уравненій (A) имѣетъ интегралы вида

$$a_n = c_n, \;\; a_{n-1} = c_n t + c_{n-1}, \;\; a_{n-2} = c_n t^2 + 2\, c_{n-1} t + c_{n-2}, \ldots, \qquad (C),$$

и эта система преобразованій коэффиціентовъ c_n, c_{n-1}, . . . c_0 въ коэффиціенты a_n, a_{n-1}, . . . a_0, соотвѣтствуетъ линейной унимодулярной подстановкѣ

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \tau y_1 + y_2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Слѣдовательно, для того, чтобы цѣлая раціональная и однородная функція $J(a_0, \; a_1, \; a_2, \ldots a_n)$ служила инваріантомъ бинарной формы необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла равенству

$$J(\alpha_0, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; . \; . \; . \; \alpha_n) = J(a_0, \; a_1, \; a_2, \; . \; . \; . \; a_n)$$

относительно двухъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ

$$T\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } R\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}.$$

Не трудно также показать, что всякую линейную унимодулярную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ можно составить изъ подстановокъ T и R. Въ самомъ дѣлѣ, если взять подстановки T и R, то составная изъ нихъ будетъ

$$TR=\begin{pmatrix}1+t\tau & t\\ \tau & 1\end{pmatrix};$$

возьмемъ еще подстановку $T'\begin{pmatrix}1 & t'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, тогда составная

$$TRT'=\begin{pmatrix}1+t\tau & (1+t\tau)\,t'+t\\ \tau & \tau t'+1\end{pmatrix};$$

если

$$TRT'=S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1},$$

то

$$\tau=\gamma,\ t=\frac{\alpha-1}{\gamma},\ t'=\frac{\delta-1}{\gamma};$$

слѣдовательно, можно найти такія значенія τ, t, t', чтобы подстановка TRT' представляла $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, если только $\gamma \neq 0$; если же $\gamma=0$, то данная унимодулярная подстановка $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}$ равна $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\tau\alpha & \frac{1}{\alpha}-\tau\beta\end{pmatrix}$, и слѣдовательно равна подстановкѣ $RTR'T'$; причемъ подстановку $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\tau\alpha & \frac{1}{\alpha}-\tau\beta\end{pmatrix}$ всегда можно представить черезъ $TR'T'$, потому что $-\tau\alpha \neq 0$, ибо $\alpha \neq 0$, иначе модуль $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma$ равнялся бы нулю.

Наконецъ, подобно предыдущему, мы можемъ найти такую подстановку, чтобы условіе инваріантности относительно ней было равносильно равенству $X_3(J)=0$, или равенству

$$\delta''' J = \left[n\frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + (n-2)\frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + (n-4)\frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ . \ . \ . + \right.$$
$$\left. + (n-2n)\frac{\partial J}{\partial a_n} a_n \right] \delta t = 0.$$

Для этого надо найти систему конечныхъ преобразованій, получаемыхъ послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_3(J)$.

Полагая въ послѣдней формулѣ $J=a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n$, мы получимъ выраженія безконечно-малыхъ приращеній:

$$\delta''' a_0 = na_0\,\delta t,\ \ \delta''' a_1 = (n-2)\,a_1\,\delta t,\ \ \delta''' a_2 = (n-4)\,a_2\,\delta t,\ .\ .\ .$$
$$\delta''' a_n = (n-2n)\,a_n\,\delta t;$$

интегрируя эту систему, мы получимъ:

$$a_0 = e^{nt+\sigma_0},\ \ a_1 = e^{(n-2)\,t+\sigma_1},\ \ a_2 = e^{(n-4)\,t+\sigma_2},\ .\ .\ .\ a_n = e^{(n-2n)\,t+\sigma_n};$$

или, обозначивъ $e^{\sigma_0},\ e^{\sigma_1},\ e^{\sigma_2},\ .\ .\ .\ e^{\sigma_n}$ соотвѣтственно черезъ $c_0,\ c_1,\ c_2\ .\ .\ .\ c_n$, получимъ

$$a_0 = c_0 e^{nt},\ \ a_1 = c_1 e^{(n-2)t},\ \ a_2 = c_2 e^{(n-4)t},\ .\ .\ .\ a_n = c_n e_n^{(n-2n)t}; \quad \text{(D)}$$

это и есть система конечныхъ преобразованій, получаемыхъ при помощи безконечно-малаго преобразованія $X_3(J)$.

Если взять цѣлую, раціональную и однородную функцію J отъ выраженій (D), то $\delta''' J$ будетъ равно нулю, и слѣдовательно

$$J\,(c_0\,e^{nt},\ \ c_1\,e^{(n-2)\,t},\ \ c_2\,e^{(n-4)\,t},\ .\ .\ .\ c_n\,e^{(n-2n)\,t}) = C;$$

а полагая $t=0$, получимъ $C=J\,(c_0,\ c_1,\ c_2,\ .\ .\ .\ c_n)$; слѣдовательно, функція J удовлетворяетъ функціональному уравненію

$$J(c_0 e^{nt},\ \ c_1 e^{(n-2)t},\ \ c_2 e^{(n-4)t},\ .\ .\ .\ c_n e^{(n-2n)t}) = J(c_0,\ c_1,\ c_2,\ .\ .\ .\ c_n) \quad \text{(E)}$$

т. е. не измѣняется отъ преобразованій (D).

Конечныя преобразованія (D) можно представить въ такомъ видѣ:

$$a_0 = c_0\, e^{nt},\quad a_1 = c_1\, e^{nt} e^{-2t},\quad a_2 = c_2\, e^{nt} e^{-4t}, \ldots \quad a_n = c_n\, e^{nt} e^{-2nt}$$

слѣдовательно, эти преобразованія коэффиціентовъ бинарной формы соотвѣтствуютъ составной линейной унимодулярной подстановкѣ перемѣнныхъ $(x_1,\ x_2)$:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

или иначе — подстановкѣ

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix},$$

если положить $e^t = \sigma$.

Подстановка $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$, или иначе — подстановка $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$, какъ мы знаемъ, преобразуетъ перемѣнныя бинарной формы такъ, что соотвѣтственное преобразованіе ея коэффиціентовъ не измѣняетъ цѣлой, раціональной и однородной функціи $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$, а даетъ ей только факторъ $e^{n\mu t} = \sigma^{n\mu}$; слѣдовательно, для выполненія соотношенія (E) необходимо, чтобы преобразованіе коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующее подстановкѣ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} \end{pmatrix}$, не измѣняя функціи $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$, давало бы факторъ $e^{-n\mu t} = \sigma^{-n\mu}$; это же возможно только въ томъ случаѣ, если функція $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$ *изобарна*, и вѣсъ ея равенъ $\frac{n\mu}{2}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что условіе неизмѣняемости цѣлой, раціональной и однородной функціи $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$ относительно безконечно-малаго преобразованія $X_3(J)$, равносильно условію изобарности съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2}$.

Изъ всего предыдущаго слѣдуетъ, что *цѣлая раціональная и однородная функція* $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$ *коэффи-*

ціентовъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n *бинарной формы, служитъ инваріантомъ послѣдней, если выполняются условія: во-первыхъ, если она изобарна съ вѣсомъ* $\frac{n\mu}{2}$ *(гдѣ* μ *— порядокъ инваріанта), и во-вторыхъ, если она удовлетворяетъ уравненіямъ съ частными производными*

$$X_2(J) = 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \quad 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \quad 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + \ldots +$$
$$+ \; n \frac{\partial J}{\partial a_n} \; a_{n-1} = 0,$$

$$X_1(J) = n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 + (n-2) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 + \ldots +$$
$$+ 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n \quad = 0.$$

Теперь мы докажемъ, что послѣднее условіе $X_1(J) = 0$ можетъ быть опущено, потому что оно вытекаетъ изъ остальныхъ.

Мы знаемъ, что

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2) J = X_3(J) = \sum_0^n (n - 2i) \frac{\partial J}{\partial a_i} a_i ;$$

если же взять изобарную функцію J съ вѣсомъ p въ видѣ суммы $\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$, то

$$\sum_0^n (n - 2i) \frac{\partial J}{\partial a_i} a_i = \sum A \,.\, [(n - 2\,.\,0) e_0 + (n - 2\,.\,1) e_1 + \ldots +$$
$$+ (n - 2\,.\,n) e_n] \, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$$
$$= (n\mu - 2p) \,.\, \sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$$
$$= \chi \,.\, J ;$$

слѣдовательно, операція X_3 измѣняетъ изобарную функцію J съ вѣсомъ p на постоянный множитель $\chi = n\mu - 2p$, который будемъ называть *эксцессомъ* изобарной функціи J. Очевидно, что условіе $X_3(J) = 0$ тождественно съ условіемъ $\chi = 0$ для изобарной функціи J.

Изъ соотношенія $(X_2 X_1 - X_1 X_2) J = \chi J$, слѣдуетъ соотношеніе

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2) X_1 J = (\chi - 2) X_1 J,$$

потому что операція X_1 повышаетъ вѣсъ функціи J на единицу, а эксцессъ $\chi = n\mu - 2p$ понижаетъ на 2. Кромѣ того, мы имѣемъ соотношеніе

$$X_1 (X_2 X_1 - X_1 X_2) J = \chi X_1 (J);$$

изъ этихъ двухъ соотношеній, складывая ихъ почленно, получимъ соотношеніе

$$(X_2 X_1^2 - X_1^2 X_2) J = 2(\chi - 1) X_1 J;$$

способомъ отъ ν къ $\nu + 1$ можемъ доказать

$$(X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2) J = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1} (J).$$

Пусть однородная изобарная функція J имѣетъ эксцессъ χ, равный нулю, и удовлетворяетъ уравненію $X_2(J) = 0$; тогда послѣдняя формула дастъ рядъ соотношеній, если въ ней послѣдовательно положить $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$X_2 X_1 (J) = 0, \quad X_2 X_1^2 (J) = -2 . 1 X_1 (J),$$
$$X_2 X_1^3 (J) = -3 . 2 X_1^2 (J), \ldots;$$

но операція X_1 повышаетъ на единицу вѣсъ изобарной функціи J, который имѣетъ высшій предѣлъ $p = n\mu$, слѣдовательно въ ряду $X_1 J$, $X_1^2 J$, $X_1^3 (J)$, ... мы встрѣтимъ $X_1^\nu (J) \equiv 0$; тогда въ силу нашихъ соотношеній $X_2 X_1^\nu (J) \equiv 0$, $X_1^{\nu-1} (J) \equiv 0$, $X_1^{\nu-2} (J) \equiv 0$ ... $X_1 (J) \equiv 0$.

Такимъ образомъ мы доказали, *что цѣлая, однородная и изобарная функція J, имѣющая вѣсъ $p = \frac{n\mu}{2}$ и удовлетворяющая дифференціальному уравненію $X_2 (J) = 0$, удовлетворяетъ также уравненію $X_1 (J) = 0$ и, слѣдовательно, служитъ инваріантомъ бинарной формы.*

Этимъ послѣднимъ опредѣленіемъ инваріанта мы воспользуемся въ слѣдующемъ параграфѣ для построенія инваріантовъ бинарныхъ формъ различныхъ порядковъ.

§ 10. Примѣры построенія инваріантовъ бинарныхъ формъ.

Если мы имѣемъ бинарную форму n-го порядка:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

то всякая цѣлая раціональная функція J ея коэффиціентовъ можетъ быть представлена въ видѣ суммы

$$J = \sum c \, . \, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \, . \, . \, . \, a_n^{e_n} \, .$$

Такая функція J служитъ инваріантомъ бинарной формы, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, въ томъ случаѣ, если она, во-первыхъ, однородна, т. е.

$$e_0 + e_1 + e_2 + \, . \, . \, . + e_n = \mu,$$

во-вторыхъ — изобарна съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2}$, т. е. $1 \, . \, e_1 + 2 \, . \, e_2 + + \, . \, . \, . + n \, . \, e_n = \frac{n\mu}{2}$ и, въ-третьихъ, удовлетворяетъ уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + \, . \, . \, . + n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1} = 0.$$

Примѣръ 1. Пусть мы имѣемъ бинарную форму втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2.$$

Инваріантъ второй степени разсматриваемой бинарной формы долженъ имѣть видъ цѣлаго, однороднаго и изобарнаго многочлена съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2} = \frac{2 \, . \, 2}{2} = 2$ относительно количествъ a_0, a_1, a_2:

$$J = c_0 a_0 a_2 + c_1 a_1^2,$$

и долженъ удовлетворять уравненію

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 = 0; \tag{10}$$

подставивъ это выраженіе J въ уравненіе съ частными производными $1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1$, мы получимъ соотношеніе

$$2 c_1 a_1 a_0 + 2 c_0 a_0 a_1 \equiv 0, \text{ или } 2 (c_1 + c_0) a_0 a_1 \equiv 0;$$

отсюда получаемъ $c_1 = - c_0$; слѣдовательно, искомый инваріантъ —

$$J = c_0 (a_0 a_2 - a_1^2),$$

т. е. бинарная форма втораго порядка имѣетъ *одинъ* инваріантъ

$$D = a_0 a_2 - a_1^2$$

второй степени, если принимать во вниманіе только *линейно-независимыя* выраженія J. Этомъ единственный инваріантъ второй степени бинарной формы втораго порядка называется ея *дискриминантомъ;* приравненный нулю, онъ даетъ условіе того, что данная бинарная форма второй степени обращается въ квадратъ бинарной формы перваго порядка; и въ самомъ дѣлѣ, если $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, то

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = (\sqrt{a_0}\, x_1 + \sqrt{a_2}\, x_2)^2.$$

Примѣръ 2. Не трудно показать, что всякій инваріантъ — какой угодно четной степени $\mu = 2m$ бинарной формы втораго порядка равенъ m-й степени ея дискриминанта, и что инваріантовъ нечетной степени она совсѣмъ не имѣетъ.

Инваріантъ степени μ долженъ имѣть видъ

$$J = \sum c \,.\, a_0^{e_0} \, a_1^{e_1} \, a_2^{e_2},$$

при чемъ $e_0 + e_1 + e_2 = \mu$ и $e_1 + 2e_2 = \frac{2 . \mu}{2} = \mu$; слѣдовательно, $e_2 = e_0$ и $e_1 = \mu - 2e_0$, и поэтому

$$J = \sum c \,.\, (a_0 a_2)^{e_0} a_1^{\mu - 2e_0};$$

если положить $\mu = 2m$, то получимъ

$$J = c_0 a_1^{2m} + c_1 (a_0 a_2) a_1^{2(m-1)} + c_2 (a_0 a_2)^2 a_1^{2(m-2)} + \ldots + c_m (a_0 a_2)^m;$$

подставивъ это выраженіе J въ уравненіе съ частными производными (10), мы получимъ

$$a_0\,[c_0\,.\,2m\,.\,a_1^{2m-1}+c_1\,(a_0\,a_2)\,.\,2\,(m-1)\,a_1^{2m-3}+$$
$$+\,c_2\,(a_0\,a_2)^2\,2\,(m-2)\,a_1^{2m-5}+\ldots+c_{m-1}\,(a_0\,a_2)^{m-1}]$$
$$+\,2a_1\,[c_1\,a_0\,a_1^{2m-2}+c_2\,2a_0\,(a_0\,a_2)\,a_1^{2m-4}+\ldots+$$
$$c_{m-1}\,(m-1)\,a_0\,(a_0\,a_2)^{m-2}\,a_1+c_m\,ma_0\,(a_0\,a_2)^{m-1}]\equiv 0,$$

или

$$mc_m+c_{m-1}=0,\ (m-1)\,c_{m-1}+2c_{m-2}=0,\ (m-2)\,c_{m-2}+3\,c_{m-3}=0,$$
$$\ldots\,c_1+mc_0=0\,;$$

отсюда получаемъ

$$c_{m-1}=-\frac{m}{1}\,c_m,\quad c_{m-2}=\frac{m(m-1)}{1.2}\,c_m,\quad c_{m-3}=-\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\,c_m,$$
$$\ldots\,c_0=(-1)^m\,c_m\,;$$

слѣдовательно, инваріантъ четной степени $\mu=2m$ равенъ

$$J=c_m\,[(a_0\,a_2)^m-\frac{m}{1}\,(a_0\,a_2)^{m-1}\,a_1^2+\ldots+(-1)^m\,a_1^{2m}]$$
$$=c_m\,(a_0\,a_2-a_1^2)^m.$$

Если же положить $\mu=2m+1$, то

$$J=c_0a_1^{2m+1}+c_1(a_0a_2)a_1^{2m-1}+c_2(a_0a_2)^2a_1^{2m-3}+\ldots+c_m(a_0a_2)^m a_1\,;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе (10), мы получимъ

$$a_0\,[c_0\,(2m+1)\,a_1^{2m}+c_1\,(a_0\,a_2)\,(2m-1)\,a_1^{2m-2}+\ \ldots\ +$$
$$+\,c_{m-1}\,(a_0\,a_2)^{m-1}\,3a_1^2+c_m\,(a_0\,a_2)^m]$$
$$+\,2a_1\,[c_1\,a_0\,a_1^{2m-1}+c_2\,a_0\,2\,(a_0\,a_2)\,a_1^{2m-3}+\ \ldots\ +$$
$$+\,c_m\,a_0\,m\,(a_0\,a_2)^{m-1}\,a_1]\equiv 0,$$

отсюда имѣемъ

$$(2m+1)\,c_0+2c_1=0,\quad (2m-1)\,c_1+4c_2=0,\ \ldots$$
$$3c_{m-1}+2m\,c_m=0,\quad c_m=0,$$

слѣдовательно, $c_m = 0$, $c_{m-1} = 0$, $c_{m-2} = 0$, . . . $c_0 = 0$, т. е. *бинарная форма второй степени совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетныхъ степеней.*

Примѣръ 3. Возьмемъ бинарную форму третьяго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

и построимъ ея инваріантъ четвертой степени.

Искомый инваріантъ долженъ быть цѣлымъ, однороднымъ и изобарнымъ многочленомъ съ вѣсомъ $\frac{3\,.\,4}{2} = 6$, т. е.

$$J = c_0 a_3^2 a_0^2 + c_1 a_3 a_2 a_1 a_0 + c_2 a_3 a_1^3 + c_3 a_1^3 a_0 + c_4 a_2^2 a_1^2,$$

и долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 = 0;$$

это послѣднее условіе даетъ возможность опредѣлить коэффиціенты c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{aligned} & a_0 (\, c_1 a_3 a_2 \, a_0 + 3c_2 a_3 \, a_1^2 \quad + 2c_4 a_2^2 a_1) \\ & + 2a_1 (\, c_1 a_3 a_1 \, a_0 + 3c_3 a_2^2 a_0 \quad + 2c_4 a_2 \, a_1^2) \\ & + 3a_1 (2c_0 a_3 a_0^2 \quad + \quad c_1 a_2 \, a_1 a_0 + c_2 a_1^3) \equiv 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$c_1 + 6c_0 = 0, \;\; 3c_2 + 2c_1 = 0, \;\; 2c_4 + 6c_3 + 3c_1 = 0, \;\; 4c_4 + 3c_2 = 0,$$

или

$$c_1 = -6c_0, \;\; c_2 = 4c_0, \;\; c_3 = 4c_0, \;\; c_4 = -3c_0;$$

слѣдовательно, искомый инваріантъ имѣетъ видъ

$$J = c_0 (a_3^2 a_0^2 - 6\, a_3 a_2 a_1 a_0 + 4\, a_3 a_1^3 + 4\, a_2^3 a_0 - 3\, a_2^2 a_1^2).$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ единственный инваріантъ, если принимать во вниманіе только линейно-независимыя выраженія J; этотъ инваріантъ есть ея *дискриминантъ*

$$R = a_3^2 a_0^2 - 6a_3 a_2 a_1 a_0 + 4a_3 a_1^3 + 4a_2^3 a_0 - 3a_2^2 a_1^2;$$

приравненный нулю, онъ даетъ условіе того, что бинарная форма третьей степени выдѣляетъ квадратъ линейнаго фактора, т. е.

$$a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3\equiv(a_0'x_1+a_1'x_2)^2(a_0''x_1+a_1''x_2).$$

Примѣръ 4. Не трудно показать, *что бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ первыхъ степеней.*

Пусть мы имѣемъ форму n-го порядка

$$f(x_1,\, x_2)=a_0\,x_1^n+\binom{n}{1}a_1\,x_1^{n-1}\,x_2+\ldots+a_n\,x_2^n;$$

ея инваріантъ первой степени долженъ имѣть видъ

$$J=c_0\,a_0+c_1\,a_1+c_2\,a_2+\ldots+c_n a_n;$$

кромѣ того, вѣсъ каждаго его члена долженъ равняться $\frac{n.1}{2}$; это есть цѣлое число только въ случаѣ четнаго n; слѣдовательно, для нечетной формы невозможность инваріанта первой степени очевидна; въ случаѣ четнаго n

$$J=c\,.\,a_{\frac{n}{2}}\,;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}=0, \qquad (11)$$

мы получимъ

$$\frac{n}{2}\,.\,c\,.\,a_{\frac{n}{2}-1}\equiv 0,$$

т. е. $c=0$; слѣдовательно, у формъ четныхъ порядковъ тоже нѣтъ инваріантовъ первой степени.

Примѣръ 5. Построимъ инваріантъ второй степени для бинарной формы n-го порядка.

Искомый инваріантъ долженъ быть вида:

$$J=c_0\,a_0\,a_n+c_1\,a_1\,a_{n-1}+c_2\,a_2\,a_{n-2}+\ldots+c_n\,a_n\,a_0,$$

такъ какъ его вѣсъ равенъ $\frac{n.2}{2}=n$; при чемъ мы можемъ положить $c_n = c_0$, $c_{n-1} = c_1$, ... Уравненіе (11) даетъ тождество:

$$a_0(c_1 a_{n-1} + c_{n-1} a_{n-1}) + 2a_1(c_2 a_{n-2} + c_{n-2} a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ n a_{n-1}(c_0 a_0 + c_n a_0) \equiv 0,$$

которое можно представить въ видѣ

$$[c_1 + nc_0]a_0 a_{n-1} + [2c_2 + (n-1)c_1]a_1 a_{n-2} + [3c_3 + (n-2)c_2]a_2 a_{n-3} +$$
$$+ \ldots \equiv 0;$$

отсюда мы имѣемъ

$$c_1 + nc_0 = 0,\ 2c_2 + (n-1)c_1 = 0,\ 3c_3 + (n-2)c_2 = 0, \ldots$$

или

$$c_1 = -\frac{n}{1}c_0,\quad c_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}c_0,\quad c_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c_0, \ldots\ldots;$$

слѣдовательно, если n есть четное число, то получится единственный инваріантъ второй степени:

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 a_{n-2} - \ldots + a_n a_0;$$

если же n есть нечетное число, то всѣ c должны изчезнуть, т. е. *бинарныя формы нечетныхъ порядковъ не имѣютъ инваріантовъ второй степени.*

Примѣръ 6. Возьмемъ бинарную форму четвертаго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Инваріантъ второй степени этой формы опредѣлится по формулѣ предыдущаго примѣра:

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Построимъ ея инваріантъ третьей степени, пользуясь нашимъ общимъ способомъ.

Искомый инваріантъ долженъ быть цѣлымъ, однороднымъ и изобарнымъ многочленомъ съ вѣсомъ $\frac{4\,.\,3}{2} = 6$, т. е. такого вида:

$$J = c_0\, a_0\, a_3^2 + c_1\, a_1\, a_2\, a_3 + c_2\, a_0\, a_2\, a_4 + c_3\, a_2^3 + c_4\, a_1^2\, a_4\,;$$

кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + 4 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_4} a_3 = 0;$$

это послѣднее условіе даетъ тождественное равенство:

$$\begin{aligned} & a_0\,(\;\;c_1\, a_2\, a_3 + 2c_4\, a_1\, a_4) \\ + & 2a_1\,(\;\;c_1\, a_1\, a_3 + \;\;c_2\, a_0\, a_4 + 3c_3\, a_2^2) \\ + & 3a_2\,(2c_0\, a_0\, a_3 + \;\;c_1\, a_1\, a_2) \\ + & 4a_3\,(\;\;c_2\, a_0\, a_2 + \;\;c_4\, a_1^2) \equiv 0\,, \end{aligned}$$

которое можно представить въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} c_1 & a_0\, a_2\, a_3 + 2c_4 & a_0\, a_1\, a_4 + 2c_1 & a_1^2\, a_3 + 6c_3 & a_1\, a_2^2 \equiv 0\,; \\ + 6c_0 & + 2c_2 & + 4c_4 & + 3c_1 & \\ + 4c_2 & & & & \end{array}$$

отсюда получаемъ

$$c_1 + 6c_0 + 4c_2 = 0\,, \quad 2c_4 + 2c_2 = 0\,, \quad 2c_1 + 4c_4 = 0\,,$$
$$6c_3 + 3c_1 = 0\,,$$

или

$$c_1 = -\,2c_0\,, \quad c_2 = -\,c_0\,, \quad c_3 = +\,c_0\,, \quad c_4 = c_0\,;$$

слѣдовательно, бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ единственный инваріантъ третьей степени:

$$T = a_0\, a_3^2 - 2a_1\, a_2\, a_3 - a_0\, a_2\, a_4 + a_2^3 + a_1^2\, a_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Далѣе мы покажемъ, что всѣ инваріанты бинарной формы четвертаго порядка суть цѣлыя раціональныя функціи этихъ двухъ инваріантовъ.

§ 11. Абсолютные инваріанты бинарной формы.

Абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы называется такая раціональная функція ея коэффиціентовъ, которая совсѣмъ не измѣняется отъ всякой линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ перемѣнныхъ бинарной формы.

Слѣдовательно, абсолютный инваріантъ характеризуется равенствомъ

$$\Pi(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ \alpha_n) = \Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n),$$

которое обращается въ тождество, если количества α_0, α_1, α_2, . . . α_n замѣнить ихъ выраженіями черезъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n и α, β, γ, δ по формуламъ § 1:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(n-k)!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial}{\partial \gamma}\delta\right)^k f(\alpha, \gamma) \\ &= \frac{k!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta}\alpha + \frac{\partial}{\partial \delta}\gamma\right)^{n-k} f(\beta, \delta),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ n. \end{aligned} \tag{A}$$

Обозначимъ эти выраженія новыхъ коэффиціентовъ черезъ старыя сокращенно такимъ образомъ

$$\alpha_k = A_k(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ n. \tag{A'}$$

Если эти равенства раздѣлить почленно на одно изъ нихъ, напримѣръ, — на $\alpha_n = A_n(a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$, то мы получаемъ соотношенія

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_n} = \frac{A_k(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)}{A_n(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ (n-1);$$

гдѣ вторыя части можно разсматривать какъ раціональныя функціи отношеній $\frac{a_0}{a_n}$, $\frac{a_1}{a_n}$, $\frac{a_2}{a_n}$, . . . и отношеній $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$; если освободить эти соотношенія отъ знаменателей, то получится n соотношеній, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно

$\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, которыя имѣютъ коэффиціентами линейныя сочетанія отношеній $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \frac{a_2}{a_n}, \ldots \frac{\alpha_0}{\alpha_n}, \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ldots$; если изъ послѣднихъ n соотношеній исключить $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, то получится вообще $n-3$ соотношенія, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно количествъ $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \frac{a_2}{a_n}, \ldots \frac{\alpha_0}{\alpha_n}, \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ldots$, если соотношенія (A) между собою независимы. Полученныя такимъ образомъ $n-3$ соотношенія можно представить въ видѣ:

$$R_k(a, \alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots (n-3), \tag{B}$$

гдѣ $R_k(a, \alpha)$ суть цѣлые многочлены, однородные какъ относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, такъ и относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$. Слѣдовательно каждое изъ этихъ соотношеній можно представить въ видѣ:

$$P \cdot Q + P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 + \ldots = 0, \tag{B$'$}$$

гдѣ $P, P_1, \ldots$ суть цѣлые однородные многочлены относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, и $Q, Q_1, \ldots$ суть цѣлые однородные многочлены относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; кромѣ того, степени всѣхъ P между собой равны, и степени всѣхъ Q — между собой.

Если разрѣшить равенство (B$'$) относительно P, то получимъ равенство

$$P = -\frac{P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \ldots}{Q}; \tag{C}$$

обозначимъ вторую часть послѣдняго равенства черезъ $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Очевидно, что раціональная функція $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ остается безъ перемѣны при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ бинарной формы, и, слѣдовательно, она для всякой подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & a\end{pmatrix}$ удовлетворяетъ равенству

$$\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n), \tag{D}$$

т. е. служитъ абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы. Такимъ образомъ можно получить, конечно, безчисленное множество абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы, но они будутъ между собою зависимы; независимыхъ же абсолютныхъ инваріантовъ должно быть число конечное, потому что каждый изъ абсолютныхъ инваріантовъ налагаетъ опредѣленное соотношеніе (D) на коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, и такихъ независимыхъ соотношеній существуетъ вполнѣ опредѣленная система (B); другихъ соотношеній между коэффиціентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, неприводимыхъ къ соотношеніямъ системы (B), быть не можетъ.

Очевидно, что функція $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, обозначающая вторую часть равенства (C) есть отношеніе двухъ цѣлыхъ, раціональныхъ и однородныхъ функцій коэффиціентовъ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, имѣющихъ, кромѣ того, одинаковыя степени относительно этихъ коэффиціентовъ; слѣдовательно, *всякій абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ цѣлыхъ, раціональныхъ и однородныхъ функцій коэффиціентовъ бинарной формы, которыя имѣютъ одинаковыя степени.*

Теперь мы перейдемъ къ выводу дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ абсолютные инваріанты бинарныхъ формъ, при чемъ воспользуемся опять методомъ, посредствомъ котораго мы вывели въ § 7 дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарныхъ формъ.

§ 12. Дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ бинарныхъ формъ.

Изъ опредѣленія абсолютнаго инваріанта, даннаго въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что раціональная функція $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы въ томъ случаѣ служитъ абсолютнымъ инваріантомъ послѣдней, если она совершенно не измѣняется отъ линейныхъ подстановокъ S_a, преобразующихъ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ въ коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, когда перемѣнныя бинарной формы преобразуются посредствомъ группы подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Эти линейныя подстановки для коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующія подстановкамъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ для перемѣнныхъ, можно получить, разрѣшивъ систему уравненій (A) въ предыдущемъ параграфѣ относительно a_0, a_1, a_2, . . . a_n. Очевидно, что эти подстановки для коэффиціентовъ бинарной формы

$$a_k = A_k^{-1}(\alpha;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ n, \qquad (S_a)$$

содержатъ четыре существенныхъ параметра α, β, γ, δ, такъ какъ двѣ подобныхъ подстановки тождественно равны только въ томъ случаѣ, если соотвѣтственныя подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ тождественно равны, что имѣетъ мѣсто только при равенствѣ параметровъ α, β, γ, δ для этихъ двухъ подстановокъ. Очевидно также, что подстановки S_a образуютъ непрерывную группу, потому что двѣ подстановки S_a и S_a' составляютъ вмѣстѣ подстановку, которая соотвѣтствуетъ подстановкѣ $S'' = SS'$ для перемѣнныхъ бинарной формы, слѣдовательно, составная подстановка $S_a S_a' = S_a''$ есть подстановка того же типа какъ и составляющія S_a и S_a'.

Слѣдовательно, *подстановки* S_a, *преобразующія коэффиціенты бинарной формы, образуютъ* ∞^4 *попарно обратныхъ преобразованій.*

Подгруппѣ безконечно-малыхъ линейныхъ преобразованій $S\begin{pmatrix}1 + \alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t \\ \gamma_1\,\partial t & 1 + \delta_1\,\partial t\end{pmatrix}$ соотвѣтствуетъ, конечно, подгруппа безконечно-малыхъ преобразованій коэффиціентовъ S_a.

Мы знаемъ изъ § 5, что при безконечно-маломъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}1 + \alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t \\ \gamma_1\,\partial t & 1 + \delta_1\,\partial t\end{pmatrix}$ перемѣнныя x_1 и x_2 получаютъ приращенія

$$\partial x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\partial t,$$
$$\partial x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\partial t,$$

а какая-нибудь функція $F(x_1,\ x_2)$ получаетъ приращеніе

$$\partial F(x_1,\ x_2)=\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(\gamma_1 x_1+\delta_1 x_2)\right\}\partial t.$$

Но намъ еще не извѣстны выраженія приращеній ∂a_0, ∂a_1, ∂a_2, . . . ∂a_n, которыя получаютъ коэффиціенты бинарной формы, когда перемѣнныя x_1, x_2 получаютъ вышеуказанныя приращенія ∂x_1, ∂x_2 вслѣдствіе безконечно-малаго преобразованія $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\partial t & \beta_1\partial t\\ \gamma_1\partial t & 1+\delta_1\partial t\end{pmatrix}$; пусть они имѣютъ выраженія:

$$\partial a_k=-\xi_k(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n)\partial t,\ k=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ n$$

подобно тому, какъ и въ § 7. Приращеніе какой-нибудь функціи $\phi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n)$ при такомъ безконечно-маломъ преобразованіи S_a будетъ имѣть выраженіе

$$\partial\phi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_n)=-\left\{\frac{\partial\phi}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial\phi}{\partial a_1}\xi_1+\ldots+\frac{\partial\phi}{\partial a_n}\xi_n\right\}\partial t.$$

Для того, чтобы опредѣлить эти неизвѣстныя выраженія ξ_0, ξ_1, ξ_2, . . . ξ_n, обратимъ вниманіе на то, что данная бинарная форма $f(x_1,\ x_2)$ остается безъ приращенія, если перемѣнныя x_1, x_2 преобразовать посредствомъ кокой-нибудь подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и въ тоже время коэффиціенты ея — посредствомъ соотвѣтственной подстановки S_a. Слѣдовательно, приращеніе

$$\partial f(x_1,\ x_2)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_1 x_1+\delta_1 x_2)-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_1\right]\right\}\partial t$$

должно равняться нулю независимо отъ x_1 и x_2. Это условіе въ развернутой формѣ будетъ:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)\Big[n a_0 x_1^{n-1}+\left(\frac{n}{1}\right)(n-1)\,a_1 x_1^{n-2} x_2+\ldots+&\\ +\left(\frac{n}{1}\right)\qquad a_{n-1} x_2^{n-1}+\qquad\Big]&\\ +(\gamma_1 x_1+\delta_1 x_2)\Big[\qquad +\left(\frac{n}{1}\right)\qquad a_1 x_1^{n-1}\quad+\ldots+&\\ +\left(\frac{n}{1}\right)(n-1)\,a_{n-1} x_1 x_2^{n-2}+n a_n x_2^{n-1}\Big]&\\ -\Big[\xi_0 x_1^n+\left(\frac{n}{1}\right)\xi_1 x_1^{n-1} x_2+\ldots+\xi_n x_2^n\Big]\equiv 0\,;&\end{aligned}$$

отсюда получаемъ искомыя выраженія $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n$:

$$\begin{aligned}\xi_0&=\qquad n\,.\,a_0\,.\,\alpha_1+0\qquad .\,\beta_1+\qquad n\,.\,a_1\,.\,\gamma_1+0\qquad .\,\delta_1\,,\\ \xi_1&=(n-1)\,.\,a_1\,.\,\alpha_1+1\,.\,a_0\quad .\,\beta_1+(n-1)\,.\,a_2\,.\,\gamma_1+1\,.\,a_1\,.\,\delta_1\,,\\ \xi_2&=(n-2)\,.\,a_2\,.\,\alpha_1+2\,.\,a_1\quad .\,\beta_1+(n-2)\,.\,a_3\,.\,\gamma_1+2\,.\,a_2\,.\,\delta_1\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad (12)\\ \xi_n&=\qquad 0\qquad .\,\alpha_1+n\,.\,a_{n-1}\,.\,\beta_1+\qquad 0\qquad .\,\gamma_1+n\,.\,a_n\,.\,\delta_1\,;\end{aligned}$$

такимъ образомъ мы опредѣлили безконечно-малую подстановку S_a для коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующую безконечно-малой подстановкѣ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t\\ \gamma_1\,\partial t & 1+\delta_1\,\partial t\end{pmatrix}$ для ея перемѣнныхъ $x_1,\ x_2$.

Теперь не трудно вывести дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Такъ какъ абсолютный инваріантъ $\Pi\,(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ не измѣняется при всѣхъ преобразованіяхъ группы S_a, то онъ, конечно, не долженъ измѣняться при всѣхъ преобразованіяхъ подгруппы безконечно-малыхъ преобразованій S_a; слѣдовательно, приращеніе его

$$\partial\Pi=-\Big[\frac{\partial\Pi}{\partial a_0}\,\xi_0+\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\,\xi_1+\ldots+\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}\,\xi_n\Big]\,\partial t \qquad (13)$$

должно равняться нулю независимо отъ коэффиціентовъ $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$

безконечно-малаго преобразованія $S\begin{pmatrix} 1+\alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t \\ \gamma_1\,\partial t & 1+\delta_1\,\partial t \end{pmatrix}$; принимая во вниманіе вышеприведенныя значенія количествъ $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \xi_n$, мы получимъ четыре дифференціальныхъ уравненія съ частными производными перваго порядка:

$$n\,.\,a_0\frac{\partial\Pi}{\partial a_0}+(n-1)\,.\,a_1\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}+\ldots+\quad 1\,.\,a_{n-1}\frac{\partial\Pi}{\partial a_{n-1}}=0,$$

$$1\,.\,a_0\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}+\ldots+(n-1)\,.\,a_{n-2}\frac{\partial\Pi}{\partial a_{n-1}}+$$

$$+\,n\,.\,a_{n-1}\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}=0,$$

$$\text{(D)}$$

$$n\,.\,a_1\frac{\partial\Pi}{\partial a_0}+(n-1)\,.\,a_2\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}+\ldots+\quad 1\,.\,a_n\frac{\partial\Pi}{\partial a_{n-1}}=0,$$

$$1\,.\,a_1\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}+\ldots+(n-1)\,.\,a_{n-2}\frac{\partial\Pi}{\partial a_{n-1}}+$$

$$+\,n\,.\,a_n\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}=0;$$

этимъ уравненіямъ долженъ удовлетворять каждый абсолютный инваріантъ бинарной формы.

Наоборотъ, если какая-либо раціональная функція $\Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n)$ удовлетворяетъ всѣмъ этимъ уравненіямъ, то не трудно показать, что она служитъ абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы.

Въ самомъ дѣлѣ, если данная раціональная функція $\Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то ея приращеніе $\partial\Pi$ при всякомъ безконечно-маломъ преобразованіи $S.$, равно нулю. Но такъ какъ всякую подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ этой группы [1])

$$U(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha_1\,x_1+\beta_1\,x_2)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_1\,x_1+\delta_1\,x_2),$$

---

1) См. § 5.

то и всякую конечную подстановку группы S_a можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы S_a —

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_n;$$

отсюда слѣдуетъ то, что приращеніе функціи $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ и при всякомъ конечномъ преобразованіи группы S_a будетъ равно нулю, если оно равно нулю для всякой безконечно-малой подстановки $V(f)$, и функція $\Pi(a_0, a_1, a_2 \, . \; . \; . \; a_n)$ будетъ служить абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы.

§ 13. Значеніе дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Обозначимъ сокращенно первыя уравненій (D) предыдущаго параграфа черезъ $Y_1(\Pi)$, $Y_2(\Pi)$, $Y_3(\Pi)$ и $Y_4(\Pi)$, тогда символъ безконечно-малой подстановки группы S_a приметъ видъ

$$V(f) = \alpha_1 Y_1(f) + \beta_1 Y_2(f) + \gamma_1 Y_3(f) + \delta_1 Y_4(f);$$

слѣдовательно, $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_3(f)$, $Y_4(f)$ суть ничто другое какъ символы четырехъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы S_a, соотвѣтствующихъ частнымъ значеніямъ параметровъ α_1, β_1, γ_1, δ_1:

$$1, 0, 0, 0; \; 0, 1, 0, 0,; \; 0, 0, 1, 0; \; 0, 0, 0, 1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что дифференціальныя уравненія (D) предыдущаго параграфа, опредѣляющія абсолютныя инваріанты бинарной формы, имѣютъ слѣдующій смыслъ: *для того, чтобы раціональная функція* $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы, т. е. не измѣнялась при всѣхъ преобразованіяхъ группы* S_a, *необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ четырехъ безконечно-малыхъ преобразованій* $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_3(f)$, $Y_4(f)$.

Принимая во вниманіе свойства линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, изложенныя въ § 8, мы можемъ замѣтить что четыре уравненія системы (D) предыдущаго параграфа между собою зависимы; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$(Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1)\varphi \equiv Y_2(\varphi),$$

$$(Y_1 Y_3 - Y_3 Y_1)\varphi \equiv Y_3(\varphi),$$

$$(Y_2 Y_3 - Y_3 Y_2)\varphi \equiv Y_1(\varphi) - Y_4(\varphi);$$

отсюда слѣдуетъ, что функція φ, удовлетворяющая тремъ уравненіямъ системы (D):

$$Y_1(\varphi) = 0, \; Y_2(\varphi) = 0, \; Y_3(\varphi) = 0,$$

удовлетворяетъ и четвертому уравненію $Y_4(\varphi) = 0$; такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *для того, чтобы раціональная функція* $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла тремъ дифференціальнымъ* $Y_1(\varphi) = 0$, $Y_2(\varphi) = 0$, $Y_3(\varphi) = 0$, *или, что тоже самое, чтобы она не измѣнялась при трехъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ* $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$, $Y_3(\varphi)$.

Не трудно найти конечныя подстановки S_a, образуемые безконечно-малыми подстановками $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$, $Y_3(\varphi)$, $Y_4(\varphi)$.

Изъ развернутыхъ формъ этихъ подстановокъ можно замѣтить, что безконечно-малыя приращенія, получаемыя количествами a_0, a_1, a_2, $\ldots$ a_n при этихъ подстановкахъ $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$, $Y_3(\varphi)$, $Y_4(\varphi)$ имѣютъ соотвѣтственно слѣдующія выраженія:

$$\delta' \; a_0 = n a_0 \delta t, \; \delta' \; a_1 = (n-1) a_1 \delta t, \; \delta' \; a_2 = (n-2) a_2 \delta t, \ldots \delta a_n = 0,$$

$$\delta'' \; a_0 = 0 \quad, \; \delta'' \; a_1 = \quad a_0 \delta t, \; \delta'' \; a_2 = \quad 2\, a_1 \delta t, \ldots \delta a_n = n a_{n-1} \delta t,$$

$$\delta''' \, a_0 = n a_1 \delta t, \; \delta''' \, a_1 = (n-1) a_2 \delta t, \; \delta''' \, a_2 = (n-2) a_3 \delta t, \ldots \delta a_n = 0,$$

$$\delta'''' a_0 = 0 \quad, \; \delta'''' a_1 = \quad a_1 \delta t, \; \delta'''' a_2 = \quad 2\, a_2 \delta t, \ldots \delta a_n = n a_n \delta t.$$

Проинтегрировавъ эти системы дифференціальныхъ уравненій, мы получимъ конечныя преобразованія группы S_a:

$$\begin{array}{llll}
a_0 = c_0 e^{nt}, & a_1 = c_1 e^{(n-1)t}, & a_2 = c_2 e^{(n-2)t} & ,\ldots a_n = c_n, \\
a_0 = c_0 \quad, & a_1 = c_0 t + c_1 \quad, & a_2 = c_0 t^2 + 2c_1 t + c_2, & \ldots a_n = c_0 t^n + nc_1 t^{n-1} + \ldots, \\
\multicolumn{3}{l}{a_0 = c_n t^n + nc_{n-1} t^{n-1} + \ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & a_n = c_n \\
a_0 = c_0 \quad, & a_1 = c_1 e^t \quad, & a_2 = c_2 e^{2t} & ,\ldots a_n = c_n e^{nt};
\end{array}$$

эти преобразованія коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n бинарной формы соотвѣтствуютъ слѣдующимъ четыремъ подстановкамъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ для ея перемѣнныхъ x_1, x_2:

$$S'\begin{pmatrix}e^t & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad S''\begin{pmatrix}1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad S'''\begin{pmatrix}1 & 0 \\ t & 1\end{pmatrix}, \quad S''''\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & e^t\end{pmatrix}; \qquad (14)$$

ихъ можно написать такъ:

$$S'\begin{pmatrix}\rho & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad S''\begin{pmatrix}1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad S'''\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \tau & 1\end{pmatrix}, \quad S''''\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \sigma\end{pmatrix}. \qquad (14')$$

Эти подстановки даютъ составную подстановку

$$\begin{pmatrix}\rho + t\tau\rho & t\rho \\ \tau\sigma & \sigma\end{pmatrix},$$

и можно подобрать ρ, t, τ, σ такъ, чтобы эта составная подстановка представляла какую-нибудь подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; для этого надо взять

$$\sigma = \delta, \quad \tau = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \rho = \frac{\varDelta}{\delta} \quad \text{и} \quad t = \frac{\beta\delta}{\varDelta};$$

если же $\delta = 0$, то $\beta\gamma = \varDelta$, и данная подстановка $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \frac{\varDelta}{\beta} & 0\end{pmatrix}$ равна

$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\alpha\tau + \frac{\varDelta}{\beta} & -\beta\tau\end{pmatrix},$$

слѣдовательно, можетъ быть представлена какъ составная

$$S''' \; S' \; S'' \; S''' \; S'''',$$

потому что въ подстановкѣ

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha\tau + \frac{\Delta}{\beta} & -\beta\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = -\beta\tau$ не равно нулю, иначе при $\beta = 0$, и $\Delta = \beta\gamma = 0$.

§ 14. Число основныхъ абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы. Замѣчаніе.

Система дифференціальныхъ уравненій

$$Y_1(\varphi) = 0,\ Y_2(\varphi) = 0,\ Y_3(\varphi) = 0, Y_4(\varphi) = 0, \tag{D}$$

опредѣляющихъ абсолютные инваріанты бинарной формы есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, потому что всѣ операціи $(Y_i\, Y_k - Y_k\, Y_i)$ выражаются линейно черезъ операціи Y_1, Y_2, Y_3, Y_4; въ послѣднемъ не трудно убѣдиться непосредственными вычисленіями:

$$\begin{aligned}
&(Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1)\varphi \equiv Y_2(\varphi),\\
&(Y_1 Y_3 - Y_3 Y_1)\varphi \equiv Y_3(\varphi),\\
&(Y_2 Y_3 - Y_3 Y_2)\varphi \equiv Y_1(\varphi) - Y_4(\varphi), \qquad (15)\\
&(Y_1 Y_4 - Y_4 Y_1)\varphi \equiv 0,\\
&(Y_2 Y_4 - Y_4 Y_2)\varphi \equiv Y_2(\varphi),\\
&(Y_3 Y_4 - Y_4 Y_3)\varphi \equiv Y_3(\varphi).
\end{aligned}$$

Изъ теоріи линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка извѣстно, что полная система k такихъ уравненій съ m независимыми перемѣнными всегда имѣетъ

$$m - k$$

независимыхъ общихъ уравненій; слѣдовательно, система дифференціальныхъ уравненій (D) абсолютныхъ инваріантовъ имѣетъ

$$n + 1 - 4 = n - 3$$

независимыхъ рѣшеній. Каждое рѣшеніе $\varphi_i(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n)$, гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots (n - 3)$, системы (D), какъ мы знаемъ изъ § 12, должно не измѣняться при преобразованіяхъ группы S_a, соотвѣтствующихъ линейнымъ подстановкамъ группы $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; слѣдовательно, каждое рѣшеніе системы (D) даетъ опредѣленное соотношеніе между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы:

$$\varphi_i(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \varphi_i(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n);$$

слѣдовательно, независимыя рѣшенія системы (D) дадутъ $n-3$ подобныхъ соотношеній между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы; съ другой же стороны, намъ извѣстно изъ § 11, что между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы возможны только раціональныя соотношенія (B) въ § 11, или же соотношенія, къ нимъ приводимыя. Сопоставляя это вмѣстѣ, мы придемъ къ такому заключенію: *система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ имѣетъ $n-3$ независимыхъ рѣшеній, которыя могутъ быть приведены къ раціональному виду; и всякая бинарная форма n-го порядка имѣетъ $n-3$ основныхъ, независимыхъ между собою, абсолютныхъ инваріантовъ, черезъ которыя алгебраически выражаются всѣ остальныя ея абсолютныя инваріанты.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что бинарныя формы перваго, второго и третьяго порядка совсѣмъ не имѣютъ абсолютныхъ инваріантовъ, а бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ одинъ абсолютный инваріантъ, въ функціи котораго выражаются остальныя ея инваріанты. Изъ примѣра 6 въ § 10 мы знаемъ, что для бинарной формы четвертаго порядка функціи

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4,$$

послѣ преобразованія перемѣнныхъ x_1, x_2 посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, пріобрѣтаютъ соотвѣтственно множителей

$$\varDelta^4 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \quad \text{и} \quad \varDelta^6 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6;$$

слѣдовательно, функція

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{(a_0\, a_4 - 4a_1\, a_3 + 3a_2{}^2)^3}{(a_0\, a_3{}^2 - 2a_1\, a_2\, a_3 - a_0\, a_2\, a_4 + a_2{}^3 + a_1{}^2\, a_4)^2}$$

послѣ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ пріобрѣтаетъ множитель $\frac{\varDelta^{12}}{\varDelta^{12}}$, т. е. совсѣмъ не измѣняется; слѣдовательно, эта функція и есть единственный основной абсолютный инваріантъ бинарной формы четвертаго порядка черезъ который выражаются всѣ остальныя ея инваріанты.

Замѣчаніе. Въ изложенномъ опредѣленіи числа основныхъ абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы имѣетъ мѣсто одно обстоятельство, которое можетъ породить сомнѣніе въ вѣрности полученныхъ результатовъ: нами не доказано, что система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ содержитъ только линейно-независимыя уравненія и не доказано также, что въ системѣ (A) соотношеній въ § 11 коэффиціенты α, β, γ, δ подстановки не входятъ нѣкоторыми группами — въ числѣ $4-\mu$; если бы оказалось, что коэффиціенты α, β, γ, δ входятъ въ соотношенія (A) группами въ числѣ $4-\mu$, то для исключенія α, β, γ, δ изъ соотношеній (A) было бы достаточно исключить эти группы, и мы получили бы $n-3+\mu$ независимыхъ абсолютныхъ инваріентовъ, тогда и система дифференціальныхъ уравненіи абсолютныхъ инваріентовъ должна бы содержать μ лишнихъ уравненій, выражаемыхъ линейно черезъ остальныя. Докажемъ, что этого быть не можетъ[1]). Пусть посредствомъ подстановки

---

[1]) См. болѣе общее доказательство для формы съ n перемѣнными, данное Aronhold'омъ, Crelle's Journal, Bd. 69, S. 185—189. 1868.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

преобразована форма самаго общаго вида $f(x_1, x_2)$; тогда мы получимъ равенство

$$f(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2) \qquad (17)$$

обращающееся въ тождество, если x_1, x_2 замѣнить ихъ выраженіями черезъ y_1, y_2. Предположимъ, что коэффиціенты α, β, γ, δ послѣ замѣны x_1, x_2 черезъ y_1, y_2 въ формѣ $f(x_1, x_2)$ будутъ входить въ коэффиціенты преобразованной формы извѣстными группами въ числѣ $4-\mu$, т. е. будутъ зависѣть отъ μ параметровъ. Обозначимъ дифференцированіе по этимъ параметрамъ черезъ $\delta(\;)$; тогда

$$\left.\begin{aligned} \delta(x_1) &= \delta(\alpha)\, y_1 + \delta(\beta) y_2, \\ \delta(x_2) &= \delta(\gamma)\, y_1 + \delta(\delta) y_2, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

а дифференцированіе равенства (17) по этимъ параметрамъ дастъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta(x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta(x_2) = 0. \qquad (19)$$

Если мы выберемъ пару значеній x_1, x_2, удовлетворяющихъ уравненію $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, которыя не должны удовлетворять уравненію $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, иначе форма $f(x_1, x_2)$ не была бы общаго вида, то получимъ уравненіе

$$\delta(x_1) = 0,$$

которое удовлетворяется всѣми $n-1$ рѣшеніями уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$; но мы должны при этомъ въ $\delta(x_1)$ замѣнить y_1, y_2 черезъ x_1, x_2 посредствомъ обратной подстановки

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2, \\ y_2 &= \gamma' x_1 + \delta' x_2; \end{aligned}$$

слѣдовательно, уравненіе первой степени

$$[\alpha' \delta(\alpha) + \gamma' \delta(\beta)]\, x_1 + [\beta' \delta(\alpha) + \delta' \delta(\beta)]\, x_2 = 0$$

должно удовлетворяться всѣми $n-1$ рѣшеніями уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, при чемъ $n-1\geqq 2$, кромѣ двухъ случаевъ: $n=1$ или $n=2$. Такъ какъ форма $f(x_1,\ x_2)$ имѣетъ общій видъ, то всѣ рѣшенія уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ могутъ удовлетворять линейному уравненію только въ томъ случаѣ, если послѣднее имѣетъ оба коэффиціента, равные нулямъ, т. е.

$$\alpha'\delta(\alpha)+\gamma'\delta(\beta)=0,$$

$$\beta'\delta(\alpha)+\delta'\delta(\beta)=0;$$

но такъ какъ детерминантъ обратной подстановки $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ не равенъ нулю, то необходимо должно быть

$$\delta(\alpha)=0,\quad \delta(\beta)=0;$$

подобно предыдущему можно показать, что

$$\delta(\gamma)=0,\quad \delta(\delta)=0;$$

слѣдовательно, четыре коэффиціента α, β, γ, δ подстановки при преобразованіи бинарной формы не могутъ быть функціями какихъ-либо параметровъ. Исключеніе составляютъ случаи бинарныхъ формъ 1-го и 2-го порядковъ.

Изъ этого разсужденія не трудно получить также доказательство линейной независимости четырехъ дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе (19) внесемъ выраженія $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ изъ равенствъ (18), замѣнивъ въ нихъ предварительно y_1, y_2 черезъ x_1, x_2, то получится равенство

$$[\alpha'\delta(\alpha)+\gamma'\delta(\beta)]\,x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+[\alpha'\delta(\gamma)+\gamma'\delta(\delta)]\,x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+$$

$$+[\beta'\delta(\alpha)+\delta'\delta(\beta)]\,x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+[\beta'\delta(\gamma)+\delta'\delta(\delta)]\,x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$$

у котораго по предыдущему всѣ коэффиціенты при $x_i\frac{\partial f}{\partial x_k}$ суть нули; слѣдовательно, только въ этомъ одномъ смыслѣ оно и можетъ быть удовлетворено, и поэтому между выраженіями $x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ не можетъ существовать линейнаго соотношенія; если же въ этихъ выраженіяхъ замѣнить произведенія и степени перемѣнныхъ соотвѣтственными частными производными абсолютнаго инваріанта, то получатся первыя части дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ.

§ 15. Абсолютный инваріантъ бинарной формы какъ отношеніе двухъ инваріантовъ одинаковыхъ степеней.

Въ § 11 мы видѣли, что каждый абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ цѣлыхъ многочленовъ одинаковыхъ степеней:

$$\Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n) = \frac{P(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)}{Q(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)}.$$

Такъ какъ абсолютный инваріантъ, будучи подставленъ въ уравненія

$$Y_1(\phi) = 0, \quad Y_2(\phi) = 0, \quad Y_3(\phi) = 0, \quad Y_4(\phi) = 0,$$

обращаетъ ихъ въ тождества, то его числитель и знаменатель должны быть такими функціями, чтобы выполнялись условія

$$Y_1\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_2\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_3\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_4\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0,$$

которыя можно представить въ видѣ

$$Q Y_k(P) - P Y_k(Q) \equiv 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

или въ другомъ видѣ

$$\frac{Y_k(P)}{P} \equiv \frac{Y_k(Q)}{Q} = \lambda_k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

гдѣ λ_k, конечно, должно быть независимымъ отъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, потому что числители и знаменатели соотвѣтственно одинаковыхъ степеней. Если вмѣсто P взять $P'(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, т. е. ту же самую функцію, но только отъ коэффиціентовъ преобразованной формы, и положить $L = lg\,P'$, то L будетъ удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$Y_1'(L) = \lambda_1, \quad Y_2'(L) = \lambda_2, \quad Y_3'(L) = \lambda_3, \quad Y_4'(L) = \lambda_4.$$

Эти дифференціальныя уравненія можно написать въ такомъ видѣ

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_i = \lambda_1, \quad \sum_0^n i\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_{i-1} = \lambda_2, \quad \sum_0^n (n-i)\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_{i+1} = \lambda_3,$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_i = 0. \tag{D}$$

Мы представимъ эти уравненія нѣсколько въ иномъ видѣ.

Равенство

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$$

обращается въ тождество, если x_1, x_2 замѣнить выраженіями $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\gamma y_1 + \delta y_2$; предположивъ, что эта замѣна сдѣлана, мы получимъ дифференцированіемъ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial x_1} y_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial x_2} y_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2;$$

точно также получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta;$$

изъ всѣхъ этихъ равенствъ мы получаемъ

$$\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = y_1\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = y_2\frac{\partial \varphi}{\partial y_1},$$

$$\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \delta\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = y_1\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, \quad \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \delta\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = y_2\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\varphi(y_1, y_2) = \sum_0^n \binom{n}{i} \alpha_i y_1^{n-i} y_2^i,$$

мы получимъ при помощи послѣднихъ равенствъ слѣдующія тождества:

$$\alpha\sum_{0}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)\frac{\partial a_i}{\partial\alpha}y_1^{n-i}y_2^i+\gamma\sum_{0}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)\frac{\partial a_i}{\partial\gamma}y_1^{n-i}y_2^i=\sum\left(\frac{n}{i}\right)a_i(n-i)y_1{}^{n-i}y_2{}^i$$ 1)

. . . .:

посредствомъ этихъ тождествъ можно уравненія (D) привести къ виду

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\gamma}&=\lambda_1,\\ \alpha\frac{\partial L}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\delta}&=\lambda_2,\\ \beta\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial L}{\partial\gamma}&=\lambda_3,\\ \beta\frac{\partial L}{\partial\beta}+\delta\frac{\partial L}{\partial\delta}&=\lambda_4.\end{aligned}\tag{D'}$$

Не трудно показать, что въ послѣдней системѣ количества λ_1 и λ_4 должны быть равны между собою, а λ_2 и λ_3 равны нулямъ; и въ самомъ дѣлѣ, изъ перваго и третьяго получаемъ

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_1\delta-\lambda_3\gamma),$$

а изъ втораго и четвертаго —

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_2\delta-\lambda_4\gamma);$$

продифференцировавъ первое изъ этихъ двухъ равенствъ по β и второе — по α, мы должны получить одинаковые результаты; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\lambda_1\frac{\delta\gamma}{\varDelta^2}-\lambda_3\frac{\gamma^2}{\varDelta^2}=-\lambda_2\frac{\delta^2}{\varDelta^2}+\lambda_4\frac{\gamma\delta}{\varDelta^2};$$

---

1) Соотношенія между коэффиціентами a_i и ихъ частными производными по α, β, γ, δ, вытекающія изъ этихъ тождествъ, суть ничто другое какъ извѣстныя соотношенія Эйлера для однородныхъ функцій. См. § 6.

при независимости количествъ γ и δ это равенство возможно только при $\lambda_1 = \lambda_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Такимъ образомъ мы показали, что функція $L = lg\,P'$ должна удовлетворять уравненіямъ:

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \lambda,$$

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \delta} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \delta\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial \beta} + \delta\frac{\partial L}{\partial \delta} = \lambda.$$

Непосредственно можно убѣдиться, что $L = \lambda lg\,\varDelta + lg\,C$ удовлетворяетъ этимъ уравненіямъ; слѣдовательно, $lg\,P' = \lambda\,lg\,\varDelta + lg\,C$ или $P' = C\,.\,\varDelta^\lambda$; если же положить $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, то $P = C$, и слѣдовательно мы имѣемъ равенство

$$P' = P\,.\,\varDelta^\lambda,$$

характеризующее цѣлую и раціональную функцію P какъ инваріантъ бинарной формы.

Собственно говоря, эти послѣднія соображенія даже излишни: разъ мы показали, что въ системѣ (D) $\lambda_1 = \lambda_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то имѣемъ такую систему уравненій.

$$Y_1(P) = \lambda P,\quad Y_2(P) = 0,\quad Y_3(P) = 0,\quad Y_4(P) = \lambda P,$$

которымъ должна удовлетворять цѣлая раціональная функція P, служащая числителемъ абсолютнаго инваріанта, это же показываетъ на основаніи § 7, что функція P служитъ инваріантомъ бинарной формы.

Далѣе мы знаемъ, что и знаменатель Q абсолютнаго инваріанта удовлетворяетъ тѣмъ же самымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, какъ и его числитель; слѣдовательно, Q служитъ тоже инваріантомъ бинарной формы.

Такимъ образомъ мы доказали, что абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ ея инваріантовъ одинаковыхъ степеней.

Напримѣръ, для бинарной формы четвертаго порядка ея единственный основной абсолютный инваріантъ равенъ отношенію двухъ ея инваріантовъ S^3 и T^2, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа.

§ 16. Число основныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Изъ § 14 и предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что при $n > 3$ у бинарныхъ формъ существуютъ абсолютные инваріанты въ числѣ $n - 3$ и для ихъ образованія необходимо имѣть $n - 3 + 1 = n - 2$ простыхъ инваріанта, т. е. *каждая бинарная форма выше 3-го порядка имѣетъ* $n - 2$ *основныхъ инваріанта.*

Въ концѣ § 8 мы показали, что система уравненій

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0, \tag{D}$$

которымъ должна удовлетворять цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ для того, чтобы быть инваріантомъ бинарной формы, есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Только при $n = 2$ или $n = 1$ эта система приводится къ полной системѣ двухъ уравненій

$$X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0. \tag{D'}$$

Слѣдовательно, при $n > 2$ система уравненій (D) имѣетъ $n - 2$ независимыхъ рѣшенія[1]); всѣ эти рѣшенія при $n > 3$ должны приводиться къ $n - 2$ независимымъ цѣлымъ и однороднымъ многочленамъ, служащимъ инваріантами формы.

---

[1]) См. Goursat. *Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (deutsche Ausgabe von Maser),* § 27. Leipzig. 1893.

При $n = 3$ система уравненій (D) можетъ имѣть одно независимое рѣшеніе, которое должно приводиться къ виду

$$R = a_3^2 a_0^2 - 6a_3 a_2 a_1 a_0 + 4a_3 a_1^3 + 4_2^3 a_0 - 3a_2^2 a_1^2,$$

такъ какъ изъ § 10 (*Прим.* 3) мы знаемъ, что R служитъ общимъ рѣшеніемъ всѣхъ трехъ уравненій системы (D). При $n = 2$ система (D) приводится къ полной системѣ (D′) и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ существуетъ одно независимое рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій инваріанта

$$D = a_0 a_2 - a_1^2,$$

такъ какъ изъ § 10 (*Прим.* 1) намъ извѣстно, что D служитъ общимъ рѣшеніемъ обоихъ уравненій системы (D′).

При $n = 1$ система (D′) не имѣетъ рѣшеній, если не считать $J = \mathrm{Const}$.

Такимъ образомъ, мы не только доказали существованіе инваріантовъ у всякой бинарной формы степени выше первой, но доказали также, что число *основныхъ* инваріантовъ у каждой бинарной формы есть конечное и равно $n - 2$, если степень n бинарной формы больше 2, или равно $n - 1$, если степень n равна 2 или 1.

Для $n = 4$ число основныхъ инваріантовъ равно 2; остальные будутъ выражаться алгебраически черезъ эти два.

Такими двумя основными инваріантами бинарной формы четвертой степени могутъ служить инваріанты S и T, вычисленные нами въ § 10 (*Прим.* 6), потому что они между собою независимы; въ самомъ дѣлѣ, если бы между S и T существовала зависимость, то она имѣла бы мѣсто для всякой бинарной формы четвертой степени, но этого нѣтъ для бинарной формы $4x_1^3 x_2 - ux_1 x_2^3 - vx_2^4$, для которой $S = u$ и $T = v$, гдѣ u и v суть совершенно произвольныя величины.

ГЛАВА II.

Совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ.

§ 17. Опредѣленіе совмѣстнаго инваріанта системы бинарныхъ формъ.

Разсмотримъ систему k бинарныхъ формъ различныхъ порядковъ — n-го, m-го, . . . q-го;

$$f_1(x_1,\ x_2) = a_0\, x_1^n + \binom{n}{1} a_1\, x_1^{n-1}\, x_2 + \ .\ .\ . + a_n\, x_2^n,$$

$$f_2(x_1,\ x_2) = b_0\, x_1^m + \binom{m}{1} b_1\, x_1^{m-1}\, x_2 + \ .\ .\ . + b_m\, x_2^m,$$

. . . .

$$f_k(x_1,\ x_2) = s_0\, x_1^q + \binom{q}{1} s_1\, x_1^{q-1}\, x_2 + \ .\ .\ . + s_q\, x_2^q.$$

Если въ этой системѣ бинарныхъ формъ преобразовать перемѣнныя x_1, x_2 посредствомъ линейной подстановки

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то получится новая система бинарныхъ формъ тѣхъ же порядковъ — n-го, m-го, . . . q-го, съ новыми перемѣнными y_1, y_2:

$$\varphi_1(y_1,\ y_2) = \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} \alpha_1 y^{n-1} y_2 + \dots + \alpha_n y_2^n\,,$$

$$\varphi_2(y_1,\ y_2) = \beta_0 y_1^m + \binom{m}{1} \beta_1 y^{m-1} y_2 + \dots + \beta_m y_2^m\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_k(y_1,\ y_2) = \sigma_0 y_1^q + \binom{q}{1} \sigma_1 y^{q-1} y_2 + \dots + \sigma_q y_2^q\,.$$

Коэффиціенты α_i, β_i, . . . σ_i этой новой системы, какъ намъ извѣстно изъ § 1 предыдущей главы, суть линейныя функціи прежнихъ коэффиціентовъ a_i, b_i, . . . s_i и однородныя функціи относительно каждой пары — $(\alpha,\ \gamma)$ и $(\beta,\ \delta)$ коэффиціентовъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & a \end{pmatrix}$; выраженія этихъ коэффиціентовъ не трудно написать по формуламъ § 1 предыдущей главы:

$$\alpha_i = \frac{(n-i)!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \beta + \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta \right)^i f_1(\alpha, \gamma) = \frac{i!}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \alpha + \frac{\partial}{\partial \delta} \gamma \right)^{n-i} f_1(\beta, \delta)\,,$$

$$i = 0,\ 1,\ \dots n,$$

$$\beta_i = \frac{(m-i)!}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \beta + \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta \right)^i f_2(\alpha, \gamma) = \frac{i!}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \alpha + \frac{\partial}{\partial \delta} \gamma \right)^{m-i} f_2(\beta, \delta)\,,$$

$$i = 0,\ 1,\ \dots m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{(A)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma_i = \frac{(q-i)!}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \beta + \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta \right)^i f_k(\alpha, \gamma) = \frac{i!}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \alpha + \frac{\partial}{\partial \delta} \gamma \right)^{q-i} f_k(\beta, \delta)\,,$$

$$i = 0,\ 1,\ \dots q.$$

Совмѣстнымъ инваріантомъ системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція

$J(a_0, a_1, \dots a_n,\ b_0, b_1, \dots b_m \dots s_0,\ s_1 \dots s_q)$ или $J(a, b, \dots s)$

коэффиціентовъ a_0, a_1, . . . a_n, b_0, b_1, . . . , b_m, . . . s_0, s_1, . . . s_n формъ, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности и удовлетворяющая тождественно равенству

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Delta^{\lambda} J(a, b, \ldots s), \text{ гдѣ } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \text{(B)}$$

если въ немъ замѣнить $\alpha_i, \beta_i, \ldots \sigma_i$ ихъ выраженіями изъ формулъ (A). Показатель степени λ называется индексомъ совмѣстнаго инваріанта; его величину не трудно опредѣлить, если мы представимъ $J(a, b, \ldots s)$ въ видѣ суммы

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} \alpha_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} b_0^{g_0} b_1^{g_1} \ldots b_m^{g_m} \ldots$$

и возьмемъ подстановку $x_1 = \rho y_1$, $x_2 = \rho y_2$, для которой $\Delta = \rho^2$; тогда мы увидимъ, что всѣ члены суммы будутъ имѣть общій множитель

$$\rho^{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k},$$

гдѣ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ суть степени совмѣстнаго инваріанта относительно $a, b, \ldots s$; этотъ множитель долженъ равняться $\Delta^{\lambda} = \rho^{2\lambda}$, откуда мы получаемъ соотношеніе

$$n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k = 2\lambda. \qquad (20)$$

Мы знаемъ, что всякую линейную постановку $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ можно разсматривать какъ составную изъ двухъ подстановокъ:

$$S'\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad S''\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\rho} & \frac{\beta}{\rho} \\ \frac{\gamma}{\rho} & \frac{\delta}{\rho} \end{pmatrix}_{\Delta'' = 1}$$

если $\rho = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$; но для того, чтобы функція J удовлетворяла равенству (B) относительно подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, достаточно, чтобы она удовлетворяла этому равенству для составныхъ подстановокъ S' и S'', потому что изъ равенствъ

$$J(\alpha', \beta', \ldots \sigma') = \Delta'^{\lambda} J(a, b, \ldots s),$$
$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Delta''^{\lambda} J(\alpha', \beta', \ldots \sigma')$$

слѣдуетъ равенство

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = (\Delta' \Delta'')^{\lambda} J(a, b, \ldots s)$$

или равенство

$$J(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma) = \Delta^{\lambda} J(a,\ b,\ \ldots\ s),$$

такъ какъ $\Delta' \Delta'' = \Delta$.

Не трудно понять, что цѣлая раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы данной системы, функція $J(a,\ b,\ \ldots\ s)$ вслѣдствіе своей однородности должна удовлетворять равенству (B) относительно подстановки $S'\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$; слѣдовательно, для того, чтобы она служила совмѣстнымъ инваріантомъ системы бинарныхъ формъ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношенію (B) относительно всякой унимодулярной подстановки S'', т. е. соотношенію

$$J(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma) = J(a,\ b,\ \ldots\ s).$$

Преобразуя перемѣнныя x_1, x_2 бинарныхъ формъ данной системы, мы въ то же время преобразуемъ ихъ коэффиціенты a_i, b_i, $\ldots\ s_i$ посредствомъ формулъ, линейныхъ относительно α_i, β_i, $\ldots\ \delta_i$:

$$\begin{array}{ll} a_i = A_0^{(i)} \alpha_0 + A_0^{(i)} \alpha_1 + \ldots + A_n^{(i)} \alpha_n, & i = 0, 1, 2, \ldots n; \\ b_i = B_0^{(i)} \beta_0 + B_0^{(i)} \beta_1 + \ldots + B_m^{(i)} \beta_m, & i = 0, 1, 2, \ldots m; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \qquad\qquad (\mathrm{A}') \\ s_i = S_0^{(i)} \sigma_0 + S_0^{(i)} \sigma_1 + \ldots + S_q^{(i)} \sigma_q, & i = 0, 1, 2, \ldots q; \end{array}$$

эти формулы получатся, если разрѣшить систему (A) относительно a_i, b_i, $\ldots\ s_i$.

Система преобразованій (A′) содержитъ k отдѣльныхъ группъ линейныхъ унимодулярныхъ преобразованій

$$S_a,\ S_b,\ \ldots\ S_s$$

для коэффиціентовъ данной системы бинарныхъ формъ. Каждая изъ этихъ группъ, какъ намъ извѣстно изъ § 7 предыдущей главы, имѣетъ три существенныхъ параметра и именно — три параметра подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{\Delta = 1}$; слѣдовательно, эти группы находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи съ группою подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\varDelta=1}$ и въ такомъ же соотвѣтствіи между собою, т. е. каждой подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\varDelta=1}$ соотвѣтствуетъ по одной подстановкѣ въ каждой изъ группъ S_a, S_b, . . . S_s, и наоборотъ. На основаніи всего предыдущаго мы можемъ сказать, что *совмѣстный инваріантъ системы бинарныхъ формъ есть такая цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой формы, функція $J(a, b, \ldots s)$, которая совсѣмъ не измѣняется отъ системъ соотвѣтственныхъ подстановокъ группъ* S_a, S_b, . . . S_s.

Имѣя въ виду это послѣднее опредѣленіе совмѣстнаго инваріанта, не трудно получить его дифференціальныя уравненія, если воспользоваться методами §§ 7 и 12 предыдущей главы.

§ 18. Дифференціальныя уравненія совмѣстныхъ инваріантовъ.

Изъ § 7 предыдущей главы мы знаемъ, что подгруппа безконечно-малыхъ подстановокъ группы S_a имѣетъ символъ

$$V_1(J)=\alpha_1\sum_0^n(n-2i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i+1}\,;$$

точно также можно получить символы подгруппъ безконечно-малыхъ подстановокъ группъ S_a, S_b, . . . S_s:

$$V_2(J)=\alpha_1\sum_0^m(m-2i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(m-i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i+1}\,,$$

. . . .

$$V_k(J)=\alpha_1\sum_0^q(q-2i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_i+\beta_1\sum_0^q i\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i-1}+\gamma_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i+1}\,;$$

всѣ эти безконечно-малыя подстановки съ одинаковыми значеніями α_1, β_1, γ_1 соотвѣтствуютъ одной безконечно-малой унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1-\alpha_1\,\delta t\end{pmatrix}$.

Приращеніе совмѣстнаго инваріанта при всей этой системѣ соотвѣтственныхъ безконечно-малыхъ преобразованій будетъ

$$\begin{aligned}\delta J &= \delta' J + \delta'' J + \ldots + \delta^{(k)} J \\ &= -\{V_1(J) + V_2(J) + \ldots + V_k(J)\}\,\partial t;\end{aligned}$$

оно должно равняться нулю при всякихъ значеніяхъ α_1, β_1, γ_1, а это возможно, если функція $J(a,\ b,\ \ldots\ s)$ удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned}\sum_0^n (n-2i)\frac{\partial J}{\partial a_i} a_i + \sum_0^m (m-2i)\frac{\partial J}{\partial b_i} b_i + \ldots + \sum_0^q (q-2i)\frac{\partial J}{\partial s_i} s_i &= 0 \\ \sum_0^n i\,\frac{\partial J}{\partial a_i} a_{i-1} + \sum_0^m i\,\frac{\partial J}{\partial b_i} b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i\,\frac{\partial J}{\partial s_i} s_{i-1} &= 0 \\ \sum_0^n (n-i)\frac{\partial J}{\partial a_i} a_{i+1} + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial J}{\partial b_i} b_{i+1} + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial J}{\partial s_i} s_{i+1} &= 0\end{aligned} \tag{D}$$

Такимъ образомъ мы получили дифференціальныя уравненія, которымъ долженъ удовлетворять всякій совмѣстный инваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.

Наоборотъ, если цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, функція $J(a,\ b,\ \ldots\ s)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то ея приращеніе при соотвѣтственныхъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ группъ S_a, S_b, $\ldots$ S_s будетъ нуль:

$$\delta J = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что и при конечныхъ соотвѣтственныхъ преобразованіяхъ группъ S_a, S_b, $\ldots$ S_s эта функція не измѣняется:

$$J(a,\ b,\ \ldots\ s) = \text{Const.} = J(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \delta),$$

и слѣдовательно она служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ.

Обозначимъ первыя части уравненій (D) черезъ

$$X_3(J),\quad X_2(J),\quad X_1(J);$$

не трудно видѣть, что

$$-X_3(J)=(X_1X_2-X_2X_1)J.$$

Слѣдовательно, функція $J(a, b, \ldots s)$, удовлетворяющая двумъ уравненіямъ

$$X_2(J)=0, \; X_1(J)=0,$$

удовлетворяетъ и третьему

$$X_3(J)=0;$$

поэтому мы можемъ сказать: для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы данной системы, функція $J(a, b, \ldots s)$ служила совмѣстнымъ инваріантомъ, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$X_2(J)=0, \; X_1(J)=0.$$

Наконецъ, не трудно показать, что система трехъ дифференціальныхъ уравненій совмѣстнаго инваріанта

$$X_3(J)=0, \; X_2(J)=0, \; X_1(J)=0$$

есть *полная* система; и въ самомъ дѣлѣ, непосредственныя вычисленія даютъ

$$\begin{aligned}(X_1X_2-X_2X_1)J &\equiv -\;X_3(J),\\ (X_1X_3-X_3X_1)J &\equiv \;\;2X_1(J),\\ (X_2X_3-X_3X_2)J &\equiv -2X_2(J);\end{aligned} \tag{21}$$

эти же соотношенія характеризуютъ полную систему.

Уравненія

$$X_3(J)=0, \; X_2(J)=0, \; X_1(J)=0$$

линейно-зависимы только въ случаѣ одной бинарной формы первой или второй степени; въ остальныхъ случаяхъ они линейно-независимы, что непосредственно слѣдуетъ изъ замѣчанія въ § 14. Эти уравненія имѣютъ тотъ смыслъ, что совмѣстный инваріантъ J не долженъ измѣняться отъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$. Отсюда слѣдуетъ, что совмѣстный инваріантъ не долженъ измѣняться также отъ конечныхъ преобразованій, составленныхъ изъ этихъ безконечно-малыхъ подстановокъ. Пользуясь способомъ § 9 предыдущей главы, мы можемъ показать, что конечныя подстановки, образуемыя послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$, соотвѣтствуютъ слѣдующимъ конечнымъ подстановкамъ группы $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$:

$$\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}.$$

Мы знаемъ, что первую подстановку можно разложить на двѣ:

$$\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma^{-2}\end{pmatrix};$$

изъ этихъ двухъ составляющихъ подстановокъ новое условіе для совмѣстнаго инваріанта даетъ только вторая, потому что первая не измѣняетъ никакой функціи, однородной относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы. Представивъ совмѣстный инваріантъ въ видѣ суммы

$$\sum A\,.\,a_0^{e_0}\,a_1^{e_1}\,\ldots\,a_n^{e_n}\,\mathfrak{b}_0^{g_0}\,\mathfrak{b}_1^{g_1}\,\ldots\,\mathfrak{b}_m^{g_m}\,\ldots\,,$$

и примѣнивъ къ перемѣннымъ x_1, x_2 подстановку $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma^{-2}\end{pmatrix}$, мы замѣтимъ, что приведенный членъ суммы выдѣлитъ факторъ $\sigma^{-2[0.e_0+1.e_1+\ldots+ne_n+0.g_0+1.g_1+\ldots+mg_m+\ldots]}$; такой же факторъ долженъ быть выдѣленъ и другими членами для того, чтобы вся функція могла выдѣлить факторъ $\sigma^{-2\lambda}=\Delta^{\lambda}$; слѣдовательно

$$-2\Big[\sum_0^n ie_i+\sum_0^m ig_i+\ldots\Big]=\text{Const.}=-2\lambda,$$

или

$$\sum_0^n ie_i+\sum_0^m ig_i+\ldots=\lambda. \tag{22}$$

Такимъ образомъ, условіе инваріантности однородной функціи $J(a, b, \ldots s)$ относительно подстановки $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{pmatrix}$ или, что тоже самое, условіе $X_3(J)=0$, совершенно тождественно съ условіемъ, чтобы эта функція была *изобарна и съ вѣсомъ* λ; индексъ λ равенъ $\frac{1}{2}[n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots q\mu_k]$, какъ намъ извѣстно изъ § 17.

Слѣдовательно, если мы возьмемъ цѣлую раціональную функцію $J(a, b, \ldots s)$, однородную относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы и изобарную съ вѣсомъ $\lambda = \frac{1}{2}[n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k]$, то она будетъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы тогда, когда она удовлетворяетъ двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$X_2(J)=0 \text{ и } X_1(J)=0;$$

Теперь можно замѣтить, что послѣднее условіе $X_1(J)=0$ не необходимо, ибо оно вытекаетъ изъ остальныхъ.

Подобно тому, какъ и въ § 9 предыдущей главы, мы можемъ показать, что для цѣлой однородной и изобарной функціи $J(a, b, \ldots s)$ съ вѣсомъ p имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$(X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2) J = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1}(J), \tag{23}$$

гдѣ $\chi = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p$ есть *эксцессъ* изобарной функціи J; пользуясь же этимъ соотношеніемъ не трудно показать, что изъ условій $\chi = 0$ и $X_2(J) \equiv 0$ слѣдуетъ для изобарной функціи тождество $X_1(J) \equiv 0$.

Итакъ, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція, однородная относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, и изобарная относительно нихъ — съ вѣсомъ* $p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k)$, *служила совмѣстнымъ инваріантомъ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному дифференціальному уравненію*

$$\Sigma i \frac{\partial J}{\partial a_i} a_{i-1} + \Sigma i \frac{\partial J}{\partial b_i} b_{i-1} + \ldots + \Sigma i \frac{\partial J}{\partial s_i} s_{i-1} = 0.$$

§ 19. Примѣры вычисленія совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Послѣднее предложеніе предыдущаго параграфа даетъ возможность вычислить совмѣстный инваріантъ какого угодно порядка данной системы бинарныхъ формъ.

Примѣръ 1. Пусть мы имѣемъ систему двухъ бинарныхъ формъ первыхъ порядковъ $(n = m = 1)$:

$$a_0 x_1 + a_1 x_2, \ b_0 x_1 + b_1 x_2;$$

вычислимъ ихъ совмѣстный инваріантъ первой степени относительно коэффиціентовъ каждой формы, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = 1$; его вѣсъ p будетъ равенъ $\frac{1}{2}[1 . 1 + 1 . 1] = 1$; слѣдовательно, искомый совмѣстный инваріантъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 a_0 b_1 + c_1 a_1 b_0;$$

но, кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 = 0,$$

что даетъ

$$c_1 a_0 b_0 + c_0 b_0 a_0 = 0 \text{ или } c_1 = - c_0;$$

слѣдовательно, искомый совмѣстный инваріантъ — единственный

$$R_{11} = a_0 b_1 - a_1 b_0;$$

это ничто другое какъ *результантъ* двухъ данныхъ формъ.

Примѣръ 2. Не трудно показать, что результантъ $R_{11} = a_0 b_1 - a_1 b_0$ есть единственный *основной* совмѣстный инваріантъ двухъ бинарныхъ формъ первой степени и что другіе совмѣстные инваріанты суть степени его.

Пусть μ_1 и μ_2 будутъ степени искомаго совмѣстнаго инваріанта; его вѣсъ $p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$; слѣдовательно, числа μ_1 и μ_2 должны быть одновременно четными или нечетными; пусть $\mu_1 = q$, тогда $\mu_2 = q + 2r$, и вѣсъ $p = q + r$.

Искомый совмѣстный инваріантъ долженъ имѣть видъ:

$$J = c_0\, a_0^q\, a_1^0\, b_0^0\, b_1^{q+r} + c_1\, a_0^{q-1}\, a_1^1\, b_0^1\, b_1^{q+r-1} + \ldots +$$
$$+ c_{q-1}\, a_0^1\, a_1^{q-1}\, b_0^{q-1}\, b_1^{r+1} + c_q\, a_0^0\, a_1^q\, b_0^q\, b_1^r\,;$$

кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 = 0\,;$$

это послѣднее условіе даетъ тождественное равенство:

$$c_1\, a_0^q\, b_0 b_1^{q+r-1} + 2c_2 a_0^{q-1}\, a_1 b_0^2\, b_1^{q+r-2} + \ldots + qc_q\, a_0\, a_1^{q-1}\, b_0^q\, b_1^r +$$
$$+ (q+r)\, c_0\, a_0^q\, b_0 b_1^{q+r-1} + (q+r-1)\, c_1\, a_0^{q-1}\, a_1 b_0^2\, b_1^{q+r-2} + \ldots +$$
$$+ rc_q\, a_1^q\, b_0^{q+1}\, b_1^{r-1} \equiv 0\,;$$

отсюда мы имѣемъ соотношенія

$$c_1 + (q+r) c_0 = 0,\ \ 2c_2 + (q+r-1)\, c_1 = 0 \ldots qc_q + (r+1) c_{q-1} = 0$$

и еще

$$c_q = 0,$$

если $r \neq 0$.

Слѣдовательно, если $r \neq 0$ или $\mu_1 \neq \mu_2$, то совмѣстный, инваріантъ не существуетъ; если же $\mu_1 = \mu_2$, то коэффиціенты $c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_q$ выражаются черезъ c_0:

$$c_1 = -\frac{\mu_1}{1} c_0,\ \ c_2 = \frac{\mu_1(\mu_1-1)}{1\,.\,2} c_0, \ldots c_k = (-1)^k \frac{\mu_1(\mu_1-1)\ldots(\mu_1-k+1)}{1\,.\,2\ldots k} c_0,$$

и совмѣстный инваріантъ имѣетъ видъ

$$J = c_0 \left[a_0^{\mu_1} b_1^{\mu_1} - \frac{\mu_1}{1} a_0^{\mu_1-1} a_1 b_0 b_1^{\mu_1-1} + \ldots + (-1)^{\mu_1} a_1^{\mu_1} b_0^{\mu_1} \right]$$
$$= c_0 \left[a_0 b_1 - a_1 b_0 \right]^{\mu_1}$$
$$= c_0 R_{11}^{\mu_1}\,.$$

Примѣръ 3. Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 \quad \text{и} \quad b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2\,;$$

въ данномъ случаѣ $n = 1$ и $m = 2$; слѣдовательно, вѣсъ совмѣстнаго инваріанта $p = \frac{1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2}{2}$, и отсюда заключаемъ что μ_1 должно быть четнымъ числомъ.

Вычислимъ совмѣстный инваріантъ для этихъ двухъ формъ, полагая $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$; его вѣсъ будетъ $p = 2$; слѣдовательно,

$$J = c_0 b_0 b_2 + c_1 b_1^2;$$

подставивъ это значеніе J въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial b_2} b_1 = 0,$$

мы получимъ $c_1 = -- c_0$; искомый совмѣстный инваріантъ есть ничто другое какъ инваріантъ бинарной формы втораго порядка

$$J_{02} = b_0 b_2 - b_1^2.$$

Вычислимъ, далѣе, совмѣстный инваріантъ двухъ данныхъ формъ, полагая $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$; для него $p = 2$, поэтому онъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 b_0 a_1^2 + c_1 b_1 a_1 a_0 + c_2 b_2 a_0^2;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial b_2} b_1 = 0,$$

мы получимъ тождественное равенство

$$2 c_0 b_0 a_0 a_1 + c_1 b_1 a_0^2 + c_1 b_0 a_1 a_0 + 2 c_2 b_1 a_0^2 \equiv 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$2 c_0 + c_1 = 0, \ c_1 + 2 c_2 = 0;$$

искомый инваріантъ будетъ

$$J_{12} = b_0 a_1^2 - 2 b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2$$

и есть ничто иное какъ *результантъ* двухъ данныхъ бинарныхъ формъ.

Далѣе мы покажемъ, что J_{02} и J_{12} суть основные совмѣстные инваріанты двухъ данныхъ формъ, и что всякій совмѣстный инваріантъ ихъ выражается цѣлой раціональной функціей этихъ двухъ инваріантовъ.

Примѣръ 4. Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

въ данномъ случаѣ $n = 2$, $m = 2$, слѣдовательно $p = \mu_1 + \mu_2$.

Не трудно показать, что совмѣстныя инваріанты J_{02} и J_{20} суть ничто другое какъ инваріанты $b_0 b_2 - b_1^2$ и $a_0 a_2 - a_1^2$ каждой формы въ отдѣльности.

Вычислимъ совмѣстный инваріантъ, полагая $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 1$; его вѣсъ $p = 2$, и поэтому онъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 a_0 b_2 + c_1 a_1 b_1 + c_2 a_2 b_0;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial b_2} b_1,$$

мы получимъ тождественное равенство

$$c_1 a_0 b_1 + 2c_2 a_1 b_0 + c_1 a_1 b_0 + 2c_0 a_0 b_1 \equiv 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$c_1 + 2c_0 = 0, \quad 2c_2 + c_1 = 0;$$

искомый совмѣстный инваріантъ долженъ равняться

$$J_{11} = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Далѣе мы покажемъ, что три совмѣстныхъ инваріанта J_{02}, J_{20}, J_{11} суть основныя для системы двухъ бинарныхъ формъ второй степени, и остальные совмѣстные инваріанты выражаются цѣлыми раціональными функціями черезъ эти три инваріанта.

Результантъ двухъ разсматриваемыхъ формъ

$$R = -a_0^2 b_2^2 - a_2^2 b_0^2 + 2a_0 a_2 b_0 b_2 + 4a_0 a_1 b_1 b_2 + 4a_1 a_2 b_0 b_1 - \\ - 4a_1^2 b_0 b_2 - 4a_0 a_2 b_1^2$$

есть ихъ совмѣстный инваріантъ второй степени относительно коэффиціентовъ каждой формы, и не трудно провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ, что онъ слѣдующимъ образомъ выражается черезъ основные совмѣстные инваріанты:

$$R = J_{02} \,.\, J_{20} - J_{11}^2.$$

§ 20. Абсолютные совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ и ихъ дифференціальныя уравненія.

По аналогіи съ изложеннымъ въ § 11 мы можемъ назвать *абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ* системы бинарныхъ формъ такую раціональную функцію $\Pi(a, b, \ldots s)$ коэффиціентовъ данныхъ формъ, которая *совсѣмъ* не измѣняется при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ x_1, x_2 данныхъ формъ:

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что абсолютный совмѣстный инваріантъ характеризуется равенствомъ

$$\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Pi(a, b, \ldots s),$$

которое обращается въ тождество, если α_i, β_i, $\ldots\ \sigma_i$ замѣнить ихъ выраженіями по формуламъ (A) въ § 17; эти формулы (A) въ § 17 мы будемъ писать сокращенно въ видѣ:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= A_i(a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta), \\ \beta_i &= B_i(b;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_i &= S_i(s;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \qquad (A)$$

Число этихъ соотношеній равно

$$(n + m + \ldots + q) + k,$$

если система содержитъ k бинарныхъ формъ соотвѣтственно порядковъ n, m, $\ldots\ q$.

Если изъ равенствъ (A) исключить параметры α, β, γ, δ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, то мы получимъ, вообще говоря, $(n+m+\ldots+q)+k-4$ соотношеній:

$$R_i(a, b, \ldots s;\ \alpha, \beta, \ldots \sigma)=0,\ i=1, 2, \ldots[(n+m+\ldots+q)+k-4],\quad \text{(B)}$$

если соотношенія (A) между собою независимы. Функціи R_i суть цѣлыя раціональныя и, вообще говоря, неоднородныя какъ относительно всѣхъ количествъ a, b, ... s, такъ и относительно всѣхъ количествъ α, β, ... σ. Слѣдовательно каждое изъ соотношеній (B) можно представить въ видѣ:

$$P\,.\,Q+P_1\,.\,Q_1+P_2\,.\,Q_2+\ldots=0,\qquad \text{(B}'\text{)}$$

гдѣ P, P_1, ... суть цѣлые, вообще говоря, неоднородные и различныхъ степеней многочлены относительно a, b, ... s, а Q, Q, ... суть цѣлые, вообще говоря, неоднородные и различныхъ степеней многочлены относительно α, β, ... σ.

Если разрѣшить соотношеніе (B′) относительно P, то мы получимъ

$$P=-\frac{P_1Q_1+P_2Q_2+\ldots}{Q}.$$

Обозначимъ вторую часть этого равенства черезъ $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$. Очевидно, что эта функція $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$ остается безъ перемѣны при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ данныхъ формъ, т. е. она удовлетворяетъ соотношенію

$$\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)=\Pi(a, b, \ldots s)\qquad \text{(C)}$$

и, слѣдовательно, служитъ абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ. Такимъ образомъ можно получить безчисленное множество абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, но между ними независимыхъ будетъ конечное число, потому что каждый изъ нихъ налагаетъ опредѣленную зависимость (C) на коэффиціенты $a, b, \ldots s$, съ одной стороны, и $\alpha, \beta, \ldots \sigma$, съ другой стороны; такихъ же соотношеній, независимыхъ между собою, должно быть конечное число, и всѣ они должны приводиться къ системѣ (B); другихъ соотношеній между этими количествами, неприводимыхъ къ соотношеніямъ (B), быть не можетъ. Не трудно вывести дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, если воспользоваться методомъ §§ 7, 12 и 18.

Безконечно-малыя подстановки группъ $S_a, S_b, \ldots S_s$ преобразованій коэффиціентовъ $a, b, \ldots s$, соотвѣтствующія безконечно-малой подстановкѣ $S\begin{pmatrix} 1+\alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t \\ \gamma_1\,\partial t & 1+\delta_1\,\partial t \end{pmatrix}$ перемѣнныхъ x_1, x_2 данныхъ бинарныхъ формъ, на основаніи § 12 должны имѣть видъ:

$$V_1(\varphi)=\alpha_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}a_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}a_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}a_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}a_i,$$

$$V_2(\varphi)=\alpha_1\sum_0^m(m-i)\frac{\partial\varphi}{\partial b_i}b_i+\beta_1\sum_0^m i\frac{\partial\varphi}{\partial b_i}b_{i-1}+\gamma_1\sum_0^m(m-i)\frac{\partial\varphi}{\partial b_i}b_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\varphi}{\partial b_i}b_i,$$

. . . .

$$V_k(\varphi)=\alpha_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}s_i+\beta_1\sum_0^q i\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}s_{i-1}+\gamma_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}s_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}s_i.$$

Такъ какъ абсолютный совмѣстный инваріантъ $\Pi(a,b,\ldots s)$ не измѣняется отъ соотвѣтственныхъ подстановокъ группъ $S_a, S_b, \ldots S_s$, то его приращеніе

$$\partial\,\Pi=-\{V_1(\Pi)+V_2(\Pi)+\ldots+V_k(\Pi)\}\,\partial t$$

должно равняться нулю независимо отъ количествъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, т. е. онъ долженъ удовлетворять четыремъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_i = 0, \tag{D}$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_{i-1} + \sum_0^m i\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_{i-1} = 0,$$

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_{i+1} + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_{i+1} + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_{i+1} = 0,$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m i\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q i\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_i = 0.$$

Эти условія для того, чтобы раціональная функція $\Pi(a, b, \ldots s)$ коэффиціентовъ данныхъ бинарныхъ формъ служила абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ, не только необходимы, но и достаточны, въ чемъ не трудно убѣдиться посредствомъ разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыя приведены въ концѣ § 12.

Если обозначить сокращенно первыя части уравненій (D) черезъ $Y_1(\Pi)$, $Y_2(\Pi)$, $Y_3(\Pi)$, $Y_4(\Pi)$, то всѣ результаты изслѣдованій въ § 13 будутъ имѣть мѣсто и по отношенію къ изучаемымъ нами въ этомъ параграфѣ абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантамъ системы бинарныхъ формъ.

§ 21. Число основныхъ абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Система дифференціальныхъ уравненій

$$Y_1(f) = 0, \quad Y_2(f) = 0, \quad Y_3(f) = 0, \quad Y_4(f) = 0, \tag{D}$$

опредѣляющая абсолютные совмѣстные инваріанты, есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, потому что всѣ операціи $(Y_i Y_k - Y_k Y_i)$ выражаются линейно черезъ операціи Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 такимъ же образомъ какъ и въ § 14 (*форм. 15*).

Такъ какъ разсматриваемая полная система четырехъ уравненій съ частными производными имѣетъ $(n+m+\ldots+q)+k$ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_m,\ \ldots\ s_0,\ s_1\ \ldots\ s_q\,,$$

то на основаніи извѣстнаго предложенія теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка эта система уравненій должна непремѣнно имѣть

$$(n+m+\ \ldots\ +q)+k-4=N \tag{24}$$

независимыхъ рѣшеній. Каждое изъ этихъ рѣшеній $\phi_i(a, b, \ldots s)$, гдѣ $i=1,\ 2, \ldots N$, какъ намъ извѣстно, не должно измѣняться отъ системъ соотвѣтственныхъ преобразованій группъ S_a, S_b, ... S_s; но каждое общее рѣшеніе уравненій системы (D) даетъ опредѣленное соотношеніе между старыми и новыми коэффиціентами данныхъ бинарныхъ формъ

$$\phi_i(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma)=\phi_i(a,\ b,\ \ldots\ s)\,; \tag{E}$$

слѣдовательно, N независимыхъ рѣшеній системы (D) дадутъ столько же независимыхъ соотношеній вида (E). Съ другой стороны, намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, что между старыми и новыми коэффиціентами бинарныхъ формъ возможны только соотношенія, приводимыя къ раціональнымъ соотношеніямъ

$$R_i(a,\ b,\ \ldots\ s;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma)=0,\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ \ldots\ N,$$

предыдущаго параграфа. Сопоставляя все это, мы приходимъ къ такому заключенію: *система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ имѣетъ* $(n+m+\ \ldots\ +q)+k-4$ *независимыхъ рѣшеній, приводимыхъ къ раціональному виду, и всякая система бинарныхъ формъ имѣетъ* $(n+m+\ \ldots\ +q)+k-4$ *независимыхъ между собою абсолютныхъ инваріантовъ, черезъ которые выражаются алгебраически всѣ ея абсолютные совмѣстные инваріанты.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что двѣ бинарныхъ формы первой степени не имѣютъ абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта, потому что въ этомъ случаѣ $n=1$, $m=1$, $k=2$, и $N=0$.

Двѣ бинарныхъ формы

$$a_0 x_1 + a_1 x_2, \quad b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

на основаніи доказаннаго предложенія должны имѣть одинъ $(N=1+2+2-4=1)$ абсолютный совмѣстный инваріантъ; но изъ примѣра 3 въ § 19 мы знаемъ, что совмѣстные инваріанты этихъ формъ

$$J_{0,2} = b_0 b_2 - b_1^2, \quad J_{2,1} = b_0 a_1^2 - 2b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2$$

пріобрѣтаютъ множитель $\Delta^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ при преобразованіи перемѣнныхъ x_1, x_2 посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; слѣдовательно, отношеніе $\frac{J_{0,2}}{J_{2,1}}$ совсѣмъ не измѣняется при этомъ преобразованіи и служитъ единственнымъ основнымъ инваріантомъ двухъ разсматриваемыхъ формъ.

Двѣ бинарныхъ формы второй степени на основаніи доказаннаго предложенія должны имѣть два $(N=2+2+2-4=2)$ основныхъ абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріанта; изъ примѣра 4 въ § 19 мы знаемъ, что инваріанты двухъ такихъ формъ суть $J_{0,2}$, $J_{2,0}$, $J_{1,1}$; такъ какъ они пріобрѣтаютъ множитель $\Delta^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ при преобразованіи перемѣнныхъ x_1, x_2 посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}$, то отношенія двухъ изъ нихъ къ третьему совсѣмъ не измѣняются отъ этого преобразованія и поэтому служатъ основными совмѣстными инваріантами двухъ разсматриваемыхъ формъ.

§ 22. Число основныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Изъ предыдущаго параграфа мы уже знаемъ, что отношеніе двухъ простыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ можетъ служить абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ; но можно показать, что абсолютный совмѣстный инваріантъ системы бинарныхъ формъ всегда есть отношеніе двухъ суммъ совмѣстныхъ инваріантовъ этой системы.

Изъ § 20 мы знаемъ, что абсолютный инваріантъ есть раціональная дробь $\frac{P}{Q}$, удовлетворяющая четыремъ уравненіямъ съ частными производными:

$$Y_1\left(\frac{P}{Q}\right)=0\,,\quad Y_2\left(\frac{P}{Q}\right)=0\,,\quad Y_3\left(\frac{P}{Q}\right)=0\,,\quad Y_4\left(\frac{P}{Q}\right)=0\,,$$

эти тождественныя равенства даютъ

$$Q\,Y_i(P)-P\,Y_i(Q)=0,\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

или

$$\frac{Y_i(P)}{P}=\frac{Y_i(Q)}{Q}=\lambda_i\,,$$

гдѣ λ_i не должно содержать $a, b, \ldots s$, потому что числители и знаменатели имѣютъ соотвѣтственно одинаковые порядки относительно этихъ буквъ. Точно также какъ и въ § 15 можно показать, что выраженіе $L=lg\,P'(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$, гдѣ P′ есть функція P, но только отъ коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ, удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\gamma}=\lambda,$$

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\delta}=0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial L}{\partial\gamma}=0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial\beta}+\delta\frac{\partial L}{\partial\delta}=\lambda;$$

этимъ же уравненіямъ удовлетворяетъ $L=\lambda\,lg\,\varDelta+lg\,C$, если $\varDelta=\alpha\delta-\beta\gamma$; слѣдовательно, $lg\,P'=\lambda lg\varDelta+lg\,C$, или $P'=C.\varDelta^\lambda$; но при $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$ мы имѣемъ равенство $P=C$; слѣдовательно, $P'=P.\varDelta^\lambda$. Тоже самое можно доказать и относительно знаменателя Q абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта.

Если выраженіе P, удовлетворяющее соотношенію инваріантности $P' = P.\varDelta^\lambda$, разбить на такія слагаемыя $J_1, J_2, \ldots$, которыя были бы однородны относительно коэффиціентовъ каждой формы, то, конечно, каждое изъ этихъ слагаемыхъ будетъ тоже удовлетворять соотношенію $J_1' = J_1 . \varDelta^\lambda$; слѣдовательно, выраженіе P, а также и Q, представляютъ собою суммы совмѣстныхъ инваріантовъ, т. е. абсолютный совмѣстный инваріантъ имѣетъ такой видъ:

$$\Pi = \frac{J_1 + J_2 + \ldots}{J_1' + J_2' + \ldots}.$$

Изъ всего этого ясно, что для образованія

$$N = (n + m + \ldots + q) + k - 4$$

абсолютныхъ, независимыхъ между собою, совмѣстныхъ инваріантовъ надо имѣть, по крайней мѣрѣ,

$$N + 1 = \{(n + m + \ \ldots \ + q) + k - 4\} + 1 \qquad (25)$$

независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ; кромѣ того, больше $N + 1$ не можетъ быть такихъ совмѣстныхъ инваріантовъ, иначе полная система независимыхъ уравненій (§ 18)

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J)\, 0$$

имѣла бы болѣе

$$(n + m + \ \ldots \ + q) + k - 3$$

независимыхъ рѣшеній, чего быть не можетъ. Слѣдовательно, *если система бинарныхъ формъ имѣетъ абсолютные совмѣстные инваріанты, т. е. если*

$$(n + m + \ \ldots \ + q) + k > 4,$$

то число простыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ равно

$$(n + m + \ \ldots \ + q) + k - 3.$$

Если система бинарныхъ формъ не имѣетъ ни одного абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта, какъ въ случаяхъ:

$n=1,\ k=1;\ n=1,\ m=1,\ k=2;\ n=2,\ k=1;\ n=3,$ $k=1$, то рѣшить вопросъ о существованіи или отсутствіи совмѣстнаго инваріанта не трудно непосредственнымъ вычисленіемъ (§§ 10, 19).

Сопоставляя выводы этого параграфа съ изслѣдованіями въ § 18, мы приходимъ къ такому заключенію: *дифференціальныя уравненія* $X_3(J)=0,\quad X_2(J)=0,\quad X_1(J)=0$ *въ § 18 имѣютъ*

$$(n+m+\ldots+q)+k-3$$

общихъ независимыхъ рѣшеній, приводимыхъ къ цѣлому раціональному и однородному, относительно количествъ $a, b, \ldots s$, *виду.*

§ 23. Абсолютные совмѣстные инваріанты нулеваго измѣренія относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы.

Разсмотримъ соотношенія между коэффиціентами $a, b, \ldots s$ бинарныхъ формъ данной системы и коэффиціентами $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ формъ, преобразованныхъ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = A_i(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n,\\
&\beta_i = B_i(b;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_i = S_i(s;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ q.
\end{aligned} \tag{A}$$

Раздѣлимъ равенства для α_i почленно на равенство для α_n; точно также равенства для β_i — на равенство для β_m, и т. д.; мы получимъ соотношенія:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_i}{\alpha_n} = \frac{A_i(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{A_n(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots (n-1),\\
&\frac{\beta_i}{\beta_m} = \frac{B_i(b;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{B_n(b;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots (m-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\sigma_i}{\sigma_q} = \frac{S_i(s;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{S_n(s;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots (q-1);
\end{aligned} \tag{A'}$$

эти равенства связываютъ отношенія $\frac{a_i}{a_n}, \frac{\beta_i}{\beta_m}, \ldots \frac{\sigma_i}{\sigma_q}$ съ отношеніями $\frac{a_i}{a_n}, \frac{b_i}{b_m}, \ldots \frac{s_i}{s_q}$ и съ отношеніями $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$; всѣхъ равенствъ мы имѣемъ

$$(n+m+\ldots+q);$$

если изъ нихъ исключить $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, то, вообще говоря, получится $(n+m+\ldots+q)-3$ раціональныхъ соотношенія между отношеніями $\frac{a_i}{a_n}, \frac{\beta_i}{\beta_m}, \ldots \frac{\sigma_i}{\sigma_q}$ и $\frac{a_i}{a_n}, \frac{b_i}{b_m}, \ldots \frac{s_i}{s_q}$, которыя можно привести къ цѣлому виду:

$$R_i(a, b, \ldots s; \alpha, \beta, \ldots \sigma)=0, i=1, 2, \ldots [(n+m+\ldots+q)-3], \quad \text{(B)}$$

гдѣ R_i суть цѣлыя раціональныя функціи, *однородныя* относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности. Каждое изъ этихъ послѣднихъ соотношеній можетъ быть приведено къ виду

$$PQ+P_1Q_1+P_2Q_2+\ldots=0,$$

гдѣ $P, P_1, P_2, \ldots$ суть цѣлыя многочлены одинаковыхъ степеней и однородные относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, а $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ суть функціи такого же характера какъ и предыдущія только отъ коэффиціентовъ $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ формъ преобразованной системы.

Изъ послѣдняго соотношенія опредѣляемъ P:

$$P=-\frac{P_1Q_1+P_2Q_2+\cdots}{Q}=\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma).$$

Полученная такимъ образомъ функція $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$, если въ ней замѣнить $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ соотвѣтственно черезъ $a, b, \ldots s$, конечно, служитъ *абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ* и при томъ *нулеваго измѣренія относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы.*

Такъ какъ число соотношеній въ системѣ (B) равно $(n+m+\ldots+q)-3$, то *число независимыхъ между собою* *абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ нулеваго измѣренія для данной системы должно быть равнымъ*

$$(n+m+\ldots+q)-3,$$

потому что каждый изъ нихъ даетъ опредѣленное соотношеніе

$$\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Pi(a, b, \ldots s)$$

между коэффиціентами формъ данной и преобразованной системы, такихъ же соотношеній должно быть $(n+m+\ldots q)-3$, и всѣ они должны сводиться къ соотношеніяхъ (В).

Примѣръ. Изъ § 19 мы знаемъ, что двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \; b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

имѣютъ совмѣстные инваріанты:

$$J_{2,0} = a_0 a_2 - a_1^2, \; J_{0,2} = b_0 b_2 - b_1^2,$$
$$J_{1,1} = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

очевидно, что выраженіе

$$\Pi = \frac{J_{1,1}^2}{J_{2,0} . J_{0,2}}$$

служитъ *единственнымъ основнымъ* абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ нулеваго измѣренія для данныхъ формъ.

§ 24. Число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данныхъ степеней.

На основаніи предложенія, выведеннаго въ концѣ § 18, цѣлая раціональная функція

$$J = \sum A . a_0^{e_0} \alpha_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_m^{l_m} \ldots s_0^{t_0} s_1^{t_1} \ldots s_q^{t_q}$$

служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ системы бинарныхъ формъ, если она, во-первыхъ, однородна относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности, во-вторыхъ, изобарна въ вѣсомъ $p = \frac{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k}{2}$, т. е. ея эксцессъ $\chi = 0$, и, въ-третьихъ, удовлетворяетъ тождественно одному уравненію съ частными производными

$$X_2(J) = \sum_0^n i \frac{\partial J}{\partial a_i} a_{i-1} + \sum_0^m i \frac{\partial J}{\partial b_i} b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i \frac{\partial J}{\partial s_i} s_{i-1} \equiv 0.$$

Условіе однородности и изобарности налагаютъ на показателей степеней цѣлой раціональной функціи слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} &e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \mu_1, \\ &l_0 + l_1 + \ldots + l_m = \mu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &t_0 + t_1 + \ldots + t_q = \mu_k, \\ &e_1 + 2e_2 + \ldots + l_1 + 2l_2 + \ldots + t_1 + 2t_2 + \ldots + qt_q = p, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\text{гдѣ } p = \frac{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k}{2};$$

если рѣшить эту систему уравненій въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, то получится нѣсколько системъ значеній для показателей степеней, которыя имѣютъ мѣсто въ цѣлой раціональной функцій J въ томъ случаѣ, если она удовлетворяетъ двумъ первымъ условіямъ; пусть число системъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній этой Діофантовой системы уравненій будетъ $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$; тогда цѣлая функція J, удовлетворяющая первымъ двумъ условіямъ, будетъ имѣть, конечно, $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$ членовъ и столько же произвольныхъ коэффиціентовъ A. Эти произвольныя постоянныя A связаны третьимъ условіемъ

$$X_2(J) \equiv 0.$$

Если къ цѣлому полиному J примѣнить операцію X_2, то получится опять цѣлый однородный и изобарный многочленъ тѣхъ же степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$, но съ вѣсомъ $p-1$; слѣдовательно, число членовъ въ полиномѣ $X_2(J)$ равно

$\Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$; поэтому тождественное равенство $X_2(J) \equiv 0$ даетъ $\Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$ линейныхъ соотношенiй между произвольными количествами A; если эти линейныя соотношенiя между собою независимы, то они даютъ возможность опредѣлить Ψ_{p-1} произвольныхъ количествъ A, и тогда останутся въ полиномъ J неопредѣленными только

$$\Psi_p - \Psi_{p-1} = N$$

произвольныхъ коэффицiентовъ A; то есть мы будемъ имѣть $\Psi_p - \Psi_{p-1} = N$ линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инварiантовъ системы бинарныхъ формъ.

Пусть

$$X_2(J) = \sum_{1}^{\Psi_{p-1}} L_i \,.\, a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \ldots b_0^{l_0'} b_1^{l_1'} \ldots s_0^{t_0'} s_1^{t_1'} \ldots s_q^{t_q'} \equiv 0,$$

тогда линейныя соотношенiя, связывающiя произвольныя коэффицiенты A функцiи J, будутъ

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0, \ldots L_{\Psi_{p-1}} = 0; \tag{L}$$

эти линейныя соотношенiя будутъ между собою независимы, т. е. не будутъ допускать тождественнаго равенства

$$l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3 + \ldots \equiv 0 \tag{27}$$

въ томъ случаѣ, если можно подобрать произвольныя величины A, заключающiяся въ нихъ, такъ, чтобы всѣ L_i равнялись бы произвольнымъ независимымъ между собою количествамъ c_i; и въ самомъ дѣлѣ, при существованiи тождества (27) всякая система значенiй $L_i = c_i$ должна удовлетворять этому тождественному равенству

$$l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + \ldots \equiv 0,$$

и слѣдовательно c_i не могутъ быть независимыми между собою.

Въ независимости системы (L) можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ произвольный полиномъ

$$\phi = \sum_{1}^{\Psi_{p-1}} c_i \,.\, a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \dots b_0^{l_0'} b_1^{l_1'} \dots s_0^{t_0'} s_1^{t_1'} \dots s_q^{t'q},$$

однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы, степеней μ_1, μ_2, . . . μ_k, и изобарный съ вѣсомъ $p-1$; если окажется возможнымъ подобрать произвольные коэффиціенты A функціи J такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію

$$X_2(J) = \phi,$$

то это будетъ вѣрнымъ признакомъ независимости линейныхъ уравненій системы (L).

Изъ § 9 намъ извѣстно соотношеніе между операціями X_1 и X_2:

$$X_2 X_1^{\nu} - X_1^{\nu} X_2 = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1};$$

на основаніе этого соотношенія мы можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned}
&(X_2 X_1 - X_1 X_2) \quad F = \chi F, \\
&(X_2 X_1^2 - X_1^2 X_2) X_2 F = 2(\chi+1) X_1 X_2 F, \\
&(X_2 X_1^3 - X_1^3 X_2) X_2^2 F = 3(\chi+2) X_1^2 X_2^2 F, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

если принять во вниманія, что эксцессы функцій $X_2 F, X_2^2 F, \dots$ соотвѣтственно равны $\chi+2$, $\chi+4$, ... Изъ послѣднихъ равенствъ мы имѣемъ такія соотношенія:

$$\begin{aligned}
\chi F + X_1 X_2 F &= X_2 X_1 F, \\
2(\chi+1) X_1 X_2 F + X_1^2 X_2^2 F &= X_2 X_1^2 X_2 F, \\
3(\chi+2) X_1^2 X_2^2 F + X_1^3 X_2^3 F &= X_2 X_1^3 X_2^2 F, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&;
\end{aligned}$$

отсюда же мы можемъ получить соотношеніе

$$\chi F = X_2 \left\{ X_1 - \frac{X_1^2 X_2}{2(\chi+1)} + \frac{X_1^3 X_2^2}{2.3(\chi+1)(\chi+2)} - \dots \right\} F. \qquad (28)$$

Для функціи φ съ эксцессомъ $\chi=2$ мы будемъ имѣть

$$\varphi=X_2\left\{\frac{X_1}{1!\,2!}-\frac{X_1{}^2\,X_2}{2!\,3!}+\frac{X_1{}^3\,X_2{}^2}{3!\,4!}-\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\right\}\varphi\,; \quad (29)$$

изъ этого послѣдняго соотношенія мы заключаемъ, что въ изобарномъ многочленѣ

$$J=\sum A\,.\,a_0{}^{e_0}\,a_1{}^{e_1}\,.\,.\,.\,b_0{}^{l_0}\,b_1{}^{l_1}\,.\,.\,.\,s_0{}^{t_0}\,s_1{}^{t_1}\,.\,.\,.\,s_q{}^{t_q}$$

съ эксцессомъ $\chi=0$ и одинаковыхъ степеней съ многочленомъ φ надо подобрать произвольные коэффиціенты A такимъ образомъ, чтобы онъ обратился въ изобарный многочленъ съ нулевымъ эксцессомъ такого вида

$$\left\{\frac{X_1}{1!\,2!}-\frac{X_1{}^2\,X_2}{2!\,3!}+\frac{X_1{}^3\,X_2{}^2}{3!\,4!}-\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\right\}\varphi,$$

и тогда многочленъ J будетъ удовлетворять соотношенію

$$X_2(J)=\varphi,$$

гдѣ φ есть совершенно произвольный изобарный многочленъ съ вѣсомъ $p-1$ и одинаковыхъ степеней съ многочленомъ J.

Такимъ образомъ мы доказали независимость уравненій системы (L).

§ 25. Опредѣленіе числа линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данныхъ степеней.

Такъ какъ система соотношеній $L_i=0$ содержитъ только независимыя между собою уравненія, то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ и съ вѣсомъ $p=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k)$ выражается формулой

$$N=\Psi_p-\Psi_{p-1}, \quad (30)$$

гдѣ Ψ_p есть число системъ рѣшеній Діофантовой системы уравненій

$$e_0+e_1+\ldots+e_n=\mu_1,$$
$$l_0+l_1+\ldots+l_m=\mu_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_0+t_1+\ldots+t_q=\mu_k,$$
$$e_1+2e_2+\ldots+l_1+2l_2+\ldots+t_1+2t_2+\ldots+qt_q=p\ ^{1)}.$$

Для того, чтобы опредѣлить это число Ψ_p, разсмотримъ сумму

$$\sum x^{e_0+e_1+\ldots}y^{l_0+l_1+\ldots}\ldots u^{t_0+t_1+\ldots}v^{e_1+2e_2+\ldots+l_1+2l_2+\ldots+t_1+2t_2+\ldots+qt_q},$$

гдѣ e_0, e_1, . . . l_0, l_1, . . . t_0, t_1, . . . суть какія угодно положительныя числа; очевидно, что коэффиціентъ при $x^{\mu_1}y^{\mu_2}\ldots u^{\mu_k}v^p$ и будетъ число Ψ_p.

Мы можемъ представить нашу сумму въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum x^{e_0}.\sum(xv)^{e_1}.\sum(xv^2)^{e_2}\ldots\sum(xv^n)^{e_n}\sum y^{l_0}.\sum(yv)^{l_1}\ldots;$$

это же есть произведеніе

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-vx}\cdot\frac{1}{1-v^2x}\cdots\frac{1}{1-v^nx}\cdot\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-vy}\cdots.$$

Такимъ образомъ, мы показали, что число Ψ_p есть коэффиціентъ при $x^{\mu_1}y^{\mu_2}\ldots u^{\mu_k}v^p$ въ разложеніи по степенямъ x, y, . . . u, v выраженія

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^nx)}\cdot\frac{1}{(1-y)(1-vy)\ldots(1-v^my)}\cdots$$
$$\cdots\frac{1}{(1-u)(1-vu)\ldots(1-v^qu)}.$$

---

1) Очевидно, что это число Ψ_p есть ничто другое, какъ число, показывающее, сколько разъ можно составить число p какъ сумму $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ слагаемыхъ въ натуральныхъ рядахъ чиселъ 0, 1, 2, . . . n; 0, 1, 2, . . . m; 0, 1, 2, . . . q; эту же задачу теоріи чиселъ для случая $k=1$ рѣшилъ Euler по способу, обобщеніемъ котораго служитъ способъ Cayley, излагаемый нами.

Разсмотримъ отдѣльно факторы этого произведенія и вообразимъ, что они развернуты по возрастающимъ степенямъ перемѣнныхъ x, y, $\ldots u$:

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)} =$$
$$= 1 + \phi_{1,n}(v) \,.\, x + \phi_{2,n}(v) \,.\, x^2 + \ldots + \phi_{\mu_1,n}(v) \,.\, x^{\mu_1} + \ldots,$$

$$\frac{1}{(1-y)(1-vy)\ldots(1-v^m x)} =$$
$$= 1 + \phi_{1,m}(v) \,.\, y + \phi_{2,m}(v) \,.\, y^2 + \ldots + \phi_{\mu_2,m}(v) \,.\, y^{\mu_2} + \ldots,$$

. . . .

$$\frac{1}{(1-u)(1-vu)\ldots(1-v^q u)} =$$
$$= 1 + \phi_{1,q}(v) \,.\, u + \phi_{2,q}(v) \,.\, u^2 + \ldots + \phi_{\mu_k,q}(v) \,.\, u^{\mu_k} + \ldots.$$

Очевидно, что число Ψ_p, которое мы желаемъ опредѣлить, равно коэффиціенту при v^p въ разложеніи произведенія

$$\phi_{\mu_1,n}(v) \,.\, \phi_{\mu_2,m}(v) \ldots \phi_{\mu_k,q}(v) = \Phi(v)$$

по степенямъ v; это можно обозначить символически такъ:

$$\Psi_p = [\phi_{\mu_1,n}(v) \,.\, \phi_{\mu_2,m}(v) \ldots \phi_{\mu_k,q}(v)]_{v^p}.$$

Изучимъ нѣкоторыя свойства этихъ функцій ϕ.

Мы имѣемъ равенство

$$\frac{1}{(1-x)(1-v\,x)\ldots(1-v^n x)} = \sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\, x^i;$$

замѣнивъ въ немъ x черезъ vx, получимъ равенство

$$\frac{1}{(1-v\,x)(1-v^2x)\ldots(1-v^{n+1}x)} = \sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\, v^i x^i;$$

отсюда слѣдуетъ равенство

$$(1-x)\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\, x^i = (1-v^{n+1}x)\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\, v^i x^i;$$

сравнивая коэффиціенты при x^i въ обѣихъ частяхъ послѣдняго равенства, мы получимъ

$$\psi_{i,n}(v) - \psi_{i-1,n}(v) = \psi_{i,n}(v)\,.\,v^i - \psi_{i-1,n}(v)\,.\,v^{i+n},$$

или

$$\psi_{i,n}(v) = \psi_{i-1,n}(v) \cdot \frac{1 - v^{n+i}}{1 - v^i}\,;$$

слѣдовательно функцію $\psi_{\mu_1,n}$ можно представить такъ:

$$\psi_{\mu_1,n}(v) = \frac{(1-v^{n+1})\,(1-v^{n+2})\ldots(1-v^{n+\mu_1})}{(1-v\quad)\,(1-v^2\quad)\ldots(1-v^{\mu_1}\quad)}\,\psi_{0,n}, \quad \text{гдѣ} \quad \psi_{0,n}(v) = 1.$$

Обозначимъ произведеніе

$$(1 - v)\,(1 - v^2)\ldots(1 - v^k)$$

черезъ $\varphi_k(v)$, тогда мы будемъ имѣть

$$\psi_{\mu_1,n}(v) = \frac{\varphi_{n+\mu_1}(v)}{\varphi_n(v)\,\varphi_{\mu_1}(v)}\,;$$

слѣдовательно, искомое число Ψ_p можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$\Psi_p = \left[\frac{\varphi_{n+\mu_1}(v)\cdot\varphi_{m+\mu_2}(v)\qquad\ldots\varphi_{q+\mu_k}(v)}{\varphi_n(v)\,\varphi_{\mu_1}(v)\cdot\varphi_m(v)\,\varphi_{\mu_2}(v)\ldots\cdot\varphi_q(v)\,\varphi_{\mu_k}(v)}\right]_{v^p}. \tag{31}$$

Опредѣливъ выраженіе числа Ψ_p, не трудно найти число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ

$$N = \Psi_p - \Psi_{p-1}.$$

Такъ какъ число Ψ_{p-1} есть коэффиціентъ при v^{p-1} въ разложеніи нѣкоторой функціи $\phi(v)$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ v, то конечно оно равно коэффиціенту при v^p въ разложеніи функціи $v\phi(v)$; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$N = [\phi(v) - v\phi(v)]_{v^p} = [(1 - v)\phi(v)]_{v^p}.$$

Такимъ образомъ мы показали, что *число N линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данной системы формъ равно коэффиціенту при* $v^{\frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k)}$

въ разложеніи по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ функціи

$$\Psi(v) = (1-v)\frac{(1-v^{\mu_1+1})(1-v^{\mu_1+2})\ldots(1-v^{\mu_1+n})(1-v^{\mu_2+1})(1-v^{\mu_2+2})\ldots}{(1-v)\quad(1-v^2)\qquad(1-v^n)\quad(1-v)\quad(1-v^2)\quad\ldots} \tag{32}$$

§ 26. Число линейно-независимыхъ инваріантовъ данной степени одной бинарной формы.

Изъ предложенія, выведеннаго нами въ концѣ предыдущаго параграфа, слѣдуетъ, что число линейно-независимыхъ инваріантовъ степени μ одной бинарной формы равно коэффиціенту при $v^{\frac{1}{2}n\mu}$ въ разложеніи по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ функціи

$$\Psi(v) = (1-v)\frac{(1-v^{\mu+1})\,(1-v^{\mu+2})\ldots(1-v^{\mu+n})}{(1-v)\quad(1-v^2)\quad\ldots(1-v^n)};$$

вычислимъ этотъ коэффиціентъ для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

1° Пусть $n=1$, т. е. мы имѣемъ линейную форму

$$a_0 x_1 + a_1 x_2;$$

тогда $\Psi(v) = (1-v)\dfrac{1-v^{\mu+1}}{1-v} = 1 - v^{\mu+1}$, и слѣдовательно коэффиціентъ при $v^{\frac{1.\mu}{2}}$ равенъ нулю, т. е. бинарная форма перваго порядка совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ.

2° Пусть $n=2$, т. е. мы имѣемъ форму втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

тогда $\Psi(v) = (1-v)\dfrac{(1-v^{\mu+1})\,(1-v^{\mu+2})}{(1-v)\,(1-v^2)}$, и слѣдовательно искомое число

$$N = \left[\frac{1-v^{\mu+1}(1+v) + v^{2\mu+3}}{1-v^2}\right]_{u^\mu} =$$

$$= \left[\frac{1}{1-v^2}\right]_{u^\mu} + \left[v^{\mu+1}\frac{(1-v)+v^{\mu+2}}{1-v}\right]_{u^\mu},$$

причемъ послѣднее слагаемое конечно нуль; такимъ образомъ, искомое число есть

$$N = [1 + v^2 + v^4 + \ldots]_{u^{\mu}},$$

т. е. бинарная форма втораго порядка совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетныхъ степеней, но имѣетъ по одному инваріанту каждой четной степени. Въ § 10 мы видѣли, что для такой формы инваріантомъ четной степени μ служитъ ея дискриминантъ въ $\frac{\mu}{2}$ степени, т. е. $D^{\frac{\mu}{2}}$, или

$$(a_0 a_2 - a_1^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

3⁰ Пусть $n = 3$, т. е. мы имѣемъ бинарную форму третьяго порядка

$$a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3;$$

тогда $\Psi(v) = (1 - v) \frac{(1-v^{\mu+1})(1-v^{\mu+2})(1-v^{\mu+3})}{(1-v)(1-v^2)(1-v^3)}$; слѣдовательно, искомое число N выражается такъ:

$$N = \left[\frac{1 - v^{\mu+1}(1 + v^2 + v^3) + \ldots}{(1 - v^2)(1 - v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}$$

$$= \left[\frac{1}{(1 - v^2)(1 - v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}} - \left[\frac{v^{\mu+1}(1 + v + v^2)}{(1 - v^2)(1 - v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}$$

$$= \left[\frac{1}{(1 - v^2)(1 - v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}} - \left[\frac{v(1 + v + v^2)}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{1}{2}\mu}},$$

замѣнивъ v черезъ v^2, мы получимъ

$$N = \left[\frac{1}{(1 - v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{3\mu}} - \left[\frac{v^2(1 + v^2 + v^4)}{(1-v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{\mu}}$$

$$= \left[\frac{1 + v^4 + v^8}{(1-v^{12})(1-v^6)}\right]_{v^{3\mu}} - \left[\frac{v^2}{(1 - v^2)(1 - v^4)}\right]_{v^{\mu}}$$

$$= \left[\frac{1}{(1 - v^4)(1 - v^2)}\right]_{v^{\mu}} - \left[\frac{v^2}{(1 - v^2)(1 - v^4)}\right]_{v^{\mu}}$$

$$= \left[\frac{1}{1 - v^4}\right]_{v^{\mu}} = [1 + v^4 + v^8 + \ldots]_{v^{\mu}}.$$

Слѣдовательно, бинарная форма третьяго порядка не имѣетъ инваріантовъ степеней μ, некратныхъ четырехъ, и имѣетъ по одному инваріанту каждой степени μ, кратной четырехъ. Изъ § 10 мы знаемъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ четвертой степени — ея дискриминантъ

$$R = a_3^2\, a_0^2 - 6a_3\, a_2\, a_1\, a_0 + 4a_3\, a_1^3 + 4a_2^3\, a_0 - 3a_2^2\, a_1^2\,;$$

слѣдовательно, при $\mu \equiv 0$ (мод. 4) единственнымъ инваріантомъ формы служитъ $R^{\frac{\mu}{4}}$.

4⁰ Пусть $n = 4$, т. е. мы имѣемъ бинарную форму четвертаго порядка

$$a_0\, x_1^4 + 4a_1\, x_1^3\, x_2 + 6a_2\, x_1^2\, x_2^2 + 4a_3\, x_1\, x_2^3 + a_4\, x_2^4\,;$$

тогда

$$\Psi(v) = (1 - v)\,\frac{(1 - v^{\mu+1})\,(1 - v^{\mu+2})\,(1 - v^{\mu+3})\,(1 - v^{\mu+4})}{(1 - v)\,(1 - v^2)\,(1 - v^3)\,(1 - v^4)}\,,$$

и число линейно-независимыхъ инваріантовъ порядка μ будетъ

$$N = \Big[\frac{(1 - v^{\mu+1})\,(1 - v^{\mu+2})\,(1 - v^{\mu+3})\,(1 - v^{\mu+4})}{(1 - v^2)\,(1 - v^3)\,(1 - v^4)}\Big]_{v^{2\mu}}$$

$$= \Big[\frac{1 - v^{\mu+1}\,(1 + v + v^2 + v^3)}{(1 - v^2)\,(1 - v^3)\,(1 - v^4)}\Big]_{v^{2\mu}}$$

$$= \Big[\frac{1}{(1 - v^2)\,(1 - v^3)\,(1 - v^4)}\Big]_{v^{2\mu}} - \Big[\frac{v}{(1 -- v)\,(1 - v^2)\,(1 - v^3)}\Big]_{v^{\mu}}$$

$$= \Big[\frac{1 + v^3}{(1 - v^2)\,(1 - v^4)\,(1 - v^6)}\Big]_{v^{2\mu}} - \Big[\frac{v^2}{(1 - v^2)\,(1 - v^4)\,(1 - v^6)}\Big]_{v^{2\mu}}$$

$$= \Big[\frac{1 - v^2 + v^3}{(1 - v^2)\,(1 - v^4)\,(1 - v^6)}\Big]_{v^{2\mu}} = \Big[\frac{1 - v^2}{(1 - v^2)\,(1 - v^4)\,(1 - v^6)}\Big]_{v^{2\mu}}$$

$$= \frac{1}{(1 - v^2)\,(1 - v^3)}\Big]_{v^{\mu}} = \{[1 + v^2 + v^4 + \ldots]\,[1 + v^3 + v^6 + \ldots]\}_{v^{\mu}}$$

$$= \{\,1 + v^2 + v^3 + \;.\;.\;.\; + \;c_\mu\, v^\mu + \ldots\}_{v^{\mu}}.$$

Очевидно, что c_μ существуетъ только въ томъ случаѣ, если $\mu = 2k + 3l$, и что оно равно числу цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія

$$2k + 3l = \mu.$$

Назовемъ черезъ (k_1, l_1), (k_2, l_2), ... (k_ν, l_ν) всѣ цѣлыя и положительныя рѣшенія этого послѣдняго уравненія.

Такъ какъ мы знаемъ изъ § 10, что

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_2^2,$$

$$T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4$$

служатъ инваріантами бинарной формы четвертаго порядка, то выраженія

$$S^{k_1} T^{l_1}, \ S^{k_2} T^{l_2}, \ldots S^{k_\nu} T^{l_\nu}$$

служатъ ея инваріантами степени μ.

Не трудно показать, что эти инваріанты степени μ между собою линейно-независимы.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы между ними существовала линейная зависимость:

$$c_1 S^{k_1} T^{l_1} + c_2 S^{k_2} T^{l_2} + \ldots c_\nu S^{k_\nu} T^{l_\nu} = 0,$$

то она имѣла бы мѣсто и для соотвѣтственныхъ инваріантовъ бинарной формы $4x_1^3 x_2 - ux_1 x_2^3 + vx_2^4$, для которой $S = u$, $T = v$, но этого быть не можетъ, потому что количества u и v произвольныя и, вообще говоря, не удовлетворяютъ соотношенію

$$c_1 u^{k_1} v^{l_1} + c_2 u^{k_2} v^{l_2} + \ldots + c_\nu u^{k_\nu} v^{l_\nu} = 0.$$

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что *бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ только выраженія*

$$S^{k_1} T^{l_1}, \ S^{k_2} T^{l_2}, \ldots S^{k_\nu} T^{l_\nu}$$

своими инваріантами порядка μ, при чемъ (k_1, l_1), (k_2, l_2),

. . . (k_ν, l_ν) *суть пары всевозможныхъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію*

$$2k + 3l = \mu;$$

остальные ея инваріанты порядка μ *выражаются линейно черезъ эти линейно-независимые инваріанты.*

Этотъ результатъ можно формулировать еще такимъ образомъ: *всѣ инваріанты бинарной формы четвертаго порядка суть цѣлыя раціональныя функціи ея двухъ основныхъ инваріантовъ* S *и* T, *при чемъ показатели степеней* S *и* T *въ членахъ этихъ функцій должны удовлетворять уравненію*

$$2k + 3l = \mu,$$

гдѣ μ *есть степень инваріанта.*

§ 27. Нѣкоторыя свойства функцій $\psi_{\mu,n}(v)$. Теорема **Hermite'а** о взаимности бинарныхъ формъ. Обобщеніе **Hurvitz'а**.

Функція $\psi_{\mu,n}(v)$ имѣетъ такой видъ (§ 25)

$$\psi_{\mu,n}(v) = \frac{\varphi_{\mu+n}(v)}{\varphi_\mu(v)\,\varphi_n(v)} = \frac{(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^\mu)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1-v^{\mu+n})}{(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^\mu)(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^n)};$$

докажемъ слѣдующія свойства этой функціи:

1^0 *Функція* $\psi_{\mu,n}(v)$ *есть цѣлая раціональная функція* v *съ положительными и цѣлыми коэффиціентами, обладающая свойствомъ взаимности:* $\psi_{\mu,n}(v) = \psi_{n,\mu}(v)$.

Для доказательства этого предложенія обратимъ вниманіе на то, что функція $\psi_{\mu,n}$ есть коэффиціентъ при x^μ въ разложеніи по цѣлымъ положительнымъ степенямъ произведенія (§ 25)

$$\prod_0^n \frac{1}{(1 - v^i x)} = 1 + \psi_{1,n}(v)\,.\,x^2 + \ldots + \psi_{\mu,n}(v)\,x^\mu + \ldots;$$

такъ какъ каждый изъ факторовъ этого произведенія разлагается извѣстнымъ образомъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $(v^i x)$, то функція $\Psi_{\mu,n}(v)$ служитъ коэффиціентомъ при x^μ въ результатѣ умноженія такихъ факторовъ:

$$(1+x+x^2+\dots)(1+vx+v^2x^2+\dots)\dots(1+v^nx+v^{2n}x^2+\dots),$$

это же обнаруживаетъ справедливость первой части нашего предложенія; справедливость второй части предложенія относительно взаимности функціи $\phi_{\mu,n}(v)$ усматривается непосредственно изъ формы этой функціи, приведенной выше — въ началѣ параграфа.

2^0 *Степень цѣлой раціональной функціи* $\phi_{\mu,n}(v)$ *равна* $n\mu$.

Изъ приведеннаго въ началѣ параграфа вида функціи $\phi_{\mu,n}(v)$ слѣдуетъ, что ея степень равна

$$(\mu+1)+(\mu+2)+\dots+(\mu+n)-(1+2+3+\dots+n)=n\mu.$$

3^0 *Функція* $\phi_{\mu,n}(v)$ *обладаетъ свойствомъ*

$$v^{n\mu}\,\phi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right)=\phi_{\mu,n}(v). \tag{33}$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\phi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{v^{\mu+1}}\right)\left(1-\frac{1}{v^{\mu+2}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{v^{\mu+n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{v}\right)\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{v^n}\right)}$$
$$=\frac{v^{1+2+\dots+n}}{v^{(\mu+1)+(n+2)+\dots(\mu+n)}}\,\phi_{\mu,n}(v)=\frac{1}{v^{n\mu}}\,\phi_{\mu,n}(v).$$

4^0 *Сумма коэффиціентовъ функціи* $\phi_{\mu,n}(v)$ *равна*

$$\frac{(\mu+n)!}{\mu!\,n!}=\frac{(\mu+1)(n+2)\dots(\mu+n)}{1.2\dots n}=\binom{\mu+n}{n}. \tag{34}$$

Для того, чтобы обнаружить это свойство функціи $\phi_{\mu,n}(v)$, примемъ во вниманіе, что на основаніи свойства 1^0 она есть цѣлый полиномъ съ положительными коэффиціентами, и слѣдовательно сумма ея коэффиціентовъ равна $\phi_{\mu,n}(1)$; но съ другой стороны $\psi_{\mu,n}(v)$ можно представить въ видѣ

$$\psi_{\mu,n}(v)=\frac{\dfrac{\varphi_{\mu+n}(v)}{(1-v)^{\mu+n}}}{\dfrac{\varphi_{\mu}(v)}{(1-v)^{\mu}}\cdot\dfrac{\varphi_{n}(v)}{(1-v)^{n}}},$$

при чемъ

$$\left[\frac{\varphi_n(v)}{(1-v)^n}\right]_{v=1}=\left[\frac{1-v}{1-v}\cdot\frac{1-v^2}{1-v}\cdot\frac{1-v^3}{1-v}\cdots\frac{1-v^n}{1-v}\right]_{v=1}=1.2.3\ldots n;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\psi_{\mu,n}(1)=\frac{(\mu+n)!}{\mu!\ n!}.$$

Такъ какъ число линейно-независимыхъ инваріантовъ порядка μ данной бинарной формы степени n равно коэффиціенту при x^ν, или при $x^{\frac{\mu n}{2}}$, въ функціи

$$(1-v)\,\psi_{\mu,n}(v),$$

а эта функція на основаніи свойства перваго функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ тождественна съ функціей

$$(1-v)\,\psi_{n,\mu}(v),$$

то мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе Hermite'а о *взаимности* бинарныхъ формъ:

Число линейно-независимыхъ инваріантовъ степени μ *бинарной формы порядки* n *равно числу линейно-независимыхъ инваріантовъ степени* n *бинарной формы порядка* μ.

1) Пусть $\mu=1$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма перваго порядка не имѣетъ инваріантовъ (§ 10, *Прим.* 1, и § 26, 1^0); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а, бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ первой степени (§ 10, *Прим.* 4).

2) Пусть $\mu=2$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма второго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ степени $n\equiv 0$(мд. 2) и ниодного степени $n\equiv 1$ (мд. 2) (§ 10, *Прим.* 2, и § 26, 2^0); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а, бинарныя

формы четныхъ порядковъ имѣютъ одинъ инваріантъ второй степени, а бинарныя формы нечетныхъ порядковъ совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ второй степени (§ 10, *Прим.* 5).

3) Пусть $\mu = 3$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ степени $n \equiv 0$ (мд. 4) и совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ степеней, некратныхъ четырехъ (§ 26, 3^0); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а, бинарныя формы порядковъ $n \equiv 0$ (мд. 4) имѣютъ одинъ инваріантъ третьей степени, а остальныя бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ такого инваріанта.

4) Пусть $\mu = 4$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ только инваріанты степени $\mu = 2k + 3l$, гдѣ k и l произвольныя цѣлыя и положительныя числа, и число такихъ линейно-независимыхъ инваріантовъ равно числу паръ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ (k, l), удовлетворяющихъ уравненію $2k + 3l = \mu$ (§ 26, 4^0); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а только бинарныя формы порядковъ $n = 2k + 3l$ имѣютъ инваріанты четвертой степени и число послѣднихъ равно числу паръ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ (k, l), удовлетворяющихъ уравненію $2k + 3l = n$.

Изъ свойства 1^0 функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ вытекаетъ также и обобщеніе теоремы Hermite'а для системы бинарныхъ формъ, предложенное Hurvitz'омъ [1]):

Если взять двѣ системы бинарныхъ формъ:

$$\text{I)}\quad f_1,\ f_2,\ \ldots f_r;\quad F_1,\ F_2,\ \ldots F_k$$

соотвѣтственно порядковъ —

$$n_1, n_2, \ldots n_r;\quad l_1,\ l_2,\ \ldots l_k,$$

и

$$\text{II)}\quad g_1,\ g_2,\ \ldots g_r;\quad F_1,\ F_2,\ \ldots F_k$$

соотвѣтственно порядковъ —

$$m_1, m_2, \ldots m_r;\quad l_1,\ l_2,\ \ldots l_k,$$

---

1) Hurwitz. *Zur Invariantentheorie.* Math. An. Bd. 45. S. 403.

то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ первой системы, имѣющихъ соотвѣтственно степени $m_1, m_2, \ldots m_r; h_1, h_2, \ldots h_k,$ *равно числу линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ второй системы, имѣющихъ соотвѣтственно степени* $n_1, n_2, \ldots n_r; h_1, h_2, \ldots h_k.$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи перваго свойства функціи $\phi_{\mu,n}(v)$ мы можемъ написать равенство

$$(1-v)\,\phi_{m_1,n_1}(v)\,\phi_{m_2,n_2}(v)\ldots\phi_{h_1,l_1}(v)\ldots\phi_{h_k,l_k}(v)\equiv$$

$$\equiv(1-v)\,\phi_{n_1,m_1}(v)\,\phi_{n_2,m_2}\ldots\phi_{h_1,l_1}(v)\ldots\phi_{h_k,l_k}(v);$$

слѣдовательно, коэффиціенты при

$$v^{\frac{1}{2}(m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + h_1 l_1 + \ldots + h_k l_k)}$$

выраженій, стоящихъ въ двухъ частяхъ тождественнаго равенства, одинаковы; эти же коэффиціенты соотвѣтственно суть числа линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ указанныхъ степеней для двухъ данныхъ системъ.

ГЛАВА III.

Коваріанты и контраваріанты бинарныхъ формъ.

§ 28. Опредѣленіе коваріанта бинарной формы. Совмѣстный коваріантъ системы бинарныхъ формъ.

Возьмемъ бинарную форму n-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0\, x_1^n + \binom{n}{1} a_1\, x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n\, x_2^n.$$

Коваріантомъ этой формы называется цѣлая раціональная функція $\Gamma\,(a; x_1, x_2)$ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_n$ и перемѣнныхъ x_1, x_2, однородная какъ относительно этихъ коэффиціентовъ такъ и относительно перемѣнныхъ x_1, x_2, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$\Gamma(\alpha; y_1, y_2) = \Delta^\lambda\, \Gamma(a; x_1, x_2), \text{ гдѣ } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

если перемѣнныя x_1, x_2 преобразовать въ перемѣнныя y_1, y_2 посредствомъ произвольной линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и количества a — въ количества α посредствомъ соотвѣтственной системы подстановокъ S_α (§ 7). Показатель λ называется *индексомъ* коваріанта.

Пусть *степень* коваріанта $\Gamma(a; x_1, x_2)$ относительно количествъ a будетъ μ и пусть его *порядокъ* относительно x_1, x_2 будетъ ν; тогда очевидно, что въ вышеприведенномъ равенствѣ правая часть будетъ имѣть степень $2\lambda + \nu$ относительно α, β,

γ, δ, если x_1, x_2 замѣнить ихъ выраженіями черезъ y_1, y_2 посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; лѣвая же часть этого равенства будетъ степени $n\mu$ относительно α, β, γ, δ, если въ ней количества α_0, α_1, . . . α_n преобразовать посредствомъ подстановокъ S_a; слѣдовательно, *индексъ* λ, *степень* μ *и порядокъ* ν *коваріанта данной формы связаны соотношеніемъ*

$$2\lambda+\nu=n\mu.$$

Конечно, сама форма $f(x_1, x_2)$ служитъ коваріантомъ для ней самой; степень этого коваріанта равна 1, порядокъ — n, слѣдовательно индексъ $\lambda=\frac{n\mu-\nu}{2}=0$.

Разсмотримъ, далѣе, систему бинарныхъ формъ

$$f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)\ .\ .\ .\ f_k(x_1, x_2),$$

имѣющихъ соотвѣтственно порядки n, m, . . . q и коэффиценты a_0, a_1, . . . b_0, b_1, . . . b_m, . . . s_0, s_1, . . . s_q.

Совмѣстнымъ коваріантомъ такой системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція $\Gamma(a, b, \dots s;\ x_1, x_2)$ коэффиціентовъ и перемѣнныхъ бинарныхъ формъ системы, однородная какъ относительно коэффиціентовъ каждой формы такъ и относительно перемѣнныхъ, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$\Gamma(\alpha, \beta, \dots \sigma;\ y_1, y_2)=\Delta^\lambda\ \Gamma(a, b, \dots s;\ x_1, x_2),$$

если въ послѣднемъ преобразовать x_1, x_2 посредствомъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и a, b, . . . s посредствомъ системы соотвѣтственныхъ подстановокъ S_a, S_b, . . . S_s (§ 17).

Показатель λ называется *индексомъ* совмѣстнаго коваріанта.

Пусть степени совмѣстнаго коваріанта $\Gamma(a, b, \dots s;\ x_1, x_2)$ относительно коэффиціентовъ a, b, . . . s будутъ соотвѣтственно μ_1, μ_2, . . . μ_k и пусть его порядокъ относительно перемѣнныхъ x_1, x_2 будетъ ν; тогда послѣ преобразованій

S, S_α, $S_\beta \dots S_\sigma$ правая часть вышеприведеннаго тождественнаго равенства будетъ имѣть степень $2\lambda+\nu$ относительно параметровъ α, β, γ, δ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, а лѣвая часть — степень $n\mu_1+m\mu_2+\dots+q\mu_k$; слѣдовательно, *идексъ* λ, *степени* μ_1, μ_2, $\dots$ μ_k *и порядокъ* ν *совмѣстнаго коваріанта системы бинарныхъ формъ связаны соотношеніемъ*

$$n\mu_1+m\mu_2+\dots+q\mu_k=2\lambda+\nu. \tag{35}$$

Едва ли надо дополнить, что коваріантъ, имѣющій порядокъ $\nu=0$, есть инваріантъ.

§ 29. Когредіентныя и контрагредіентныя перемѣнныя. Опредѣленіе контраваріанта бинарныхъ формъ.

Если перемѣнныя x_1, x_2 переходятъ въ перемѣнныя y_1, y_2 посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, то мы будемъ это обстоятельство выражать символическимъ равенствомъ

$$(x_1,\ x_2)=S(y_1,\ y_2);$$

если мы имѣемъ еще пару перемѣнныхъ ξ_1, ξ_2, которыя преобразуются въ перемѣнныя η_1, η_2 тоже посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, т. е.

$$(\xi_1,\ \xi_2)=S(\eta_1,\ \eta_2),$$

то эти перемѣнныя ξ_1, ξ_2 называются *когредіентыми* съ перемѣнными x_1, x_2.

Преобразуемъ перемѣнныя x_1, x_2 линейной формы $u_1 x_2+u_2 x_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, тогда получимъ

$$\begin{aligned} u_1 x_1+u_2 x_2 &= (\alpha u_1+\gamma u_2)\,y_1+(\beta u_1+\delta u_2)\,y_2\\ &= v_1 y_1+v_2 y_2, \end{aligned}$$

при чемъ коэффиціенты $(v_1,\ v_2)$ преобразованной формы выражаются черезъ прежніе коэффиціенты такъ:

$$v_1 = \alpha u_1 + \gamma u_2,$$
$$v_2 = \beta u_1 + \delta u_2,$$

т. е. посредствомъ подстановки $S_1\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$, и, наоборотъ, количества u_1, u_2 переходятъ въ количества v_1, v_2 посредствомъ обратной подстановки

$$S_1^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\varDelta} & \frac{-\gamma}{\varDelta}\\ \frac{-\beta}{\varDelta} & \frac{\alpha}{\varDelta}\end{pmatrix},$$

которую мы назовемъ *контрагредіентною* съ подстановкою $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и будемъ сокращенно обозначать черезъ CS; ея модуль $\varDelta_1$ равенъ обратной величинѣ $\frac{1}{\varDelta}$ модуля подстановки S.

Количества u_1, u_2, переходящія въ v_1, v_2 посредствомъ подстановки контрагредіентной съ подстановкою S, мы будемъ называть *перемѣнными, котрагредіентными съ перемѣнными* x_1, x_2; они характеризуются символическимъ равенствомъ

$$(u_1,\ u_2) = CS(v_1,\ v_2).$$

Какъ слѣдствіе изъ равенствъ

$$(x_1,\ x_2) = \ \ S(y_1,\ y_2)$$
$$(u_1,\ u_2) = CS(v_1,\ v_2)$$

вытекаетъ равенство

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = v_1 y_1 + v_2 y_2.$$

Если составить контрагредіентную подстановку съ CS, то получится начальная; слѣдовательно, мы можемъ написать

$$CCS = S.$$

Если $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ унимодулярная подстановка, то CS имѣетъ видъ

$$\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix};$$

слѣдовательно, относительно унимодулярной подстановки перемѣнныя x_1, x_2 и $u_1 = x_2$, $u_2 = -x_1$ суть контрагредіентныя, потому что

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_2 = \quad \delta y_2 - \gamma(-y_1), \\ -x_1 = -\beta y_2 + \alpha(-y_1), \text{ если } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{array}$$

или

$$(x_1,\ x_2) = S_{\Delta=1}(y_1,\ y_2),\ (x_2,\ -x_1) = CS_{\Delta=1}(y_2,\ -y_1).$$

Контраваріантомъ[1]) бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$ называется цѣлая раціональная функція $K(a\,;\ u_1,\ u_2)$ коэффиціентовъ $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n$ и перемѣнныхъ u_1, u_2, контрагредіентныхъ съ перемѣнными x_1, x_2, однородная какъ относительно коэффиціентовъ такъ и относительно перемѣнныхъ u_1, u_2 въ отдѣльности, и удовлетворяющая тождественному соотношенію

$$K(\alpha\,;\ v_1\ v_2) = \Delta^\lambda K(a\,;\ u_1,\ u_2),\ \text{гдѣ}\ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

если въ немъ преобразовать u_1, u_2 посредствомъ подстановки CS въ перемѣнныя v_1, v_2, а количества a посредствомъ соотвѣтственной подстановки S_a — въ количества α.

Между индексомъ λ контраваріанта, его степенью μ относительно a и классомъ ρ относительно u_1, u_2 существуетъ соотношеніе

$$n\mu = 2\lambda - \rho. \qquad (36)$$

Контраваріантъ $K(a\,;\ u_1,\ u_2)$ обратится въ коваріантъ $K(a\,;\ x_2,\ -x_1)$, если замѣнить въ немъ u_1 черезъ x_2 и u_2 черезъ $-x_1$. Въ самомъ дѣлѣ, для всякой унимодулярной подстановки контраваріантъ удовлетворяетъ условію.

$$K(\alpha\,;\ v_1,\ v_2) = K(a\,;\ u_1,\ u_2),$$

замѣнивъ u_1, u_2 черезъ x_2, $-x_1$ и v_1, v_2 черезъ y_2, $-y_1$, мы получимъ

$$K(\alpha\,;\ y_2,\ -y_1) = K(a\,;\ x_2,\ -x_1),$$

---

1) Sylvester называетъ эти инваріантныя функціи *конкоминантами*.

а такъ какъ функція $K(a; x_2, -x_1)$ кромѣ того однородна относительно a и $x_2, -x_1$ въ отдѣльности, то она удовлетворяетъ соотношенію

$$K(a; y_2, -y_1) = \Delta^\lambda K(a; x_2, -x_1)$$

относительно всякой подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и поэтому служитъ коваріантомъ бинарной формы.

Наоборотъ, *если въ коваріантѣ* $\Gamma(a; x_1, x_2)$ *замѣнить* x_1 *черезъ* $-u_2$ *и* x_2 — *черезъ* u_1, *то онъ обратится въ контраваріантъ* $\Gamma(a; -u_2, u_1)$.

Совмѣстнымъ контраваріантомъ системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція $K(a, b, \ldots s; u_1, u_2)$ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots b_0, b_1, \ldots b_m, \ldots s_0, s_1, \ldots s_q$ этихъ формъ и перемѣнныхъ u_1, u_2, контрагредіентныхъ съ x_1, x_2, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы и относительно перемѣнныхъ u_1, u_2, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$K(\alpha, \beta, \ldots \sigma; v_1, v_2) = \Delta^\lambda K(a, b, \ldots s; u_1, u_2),$$

если въ послѣднемъ u_1, u_2 преобразовать посредствомъ подстановки CS, а количества $a, b, \ldots s$ — посредствомъ системы соотвѣтственныхъ подстановокъ $S_a, S_b, \ldots S_s$ (§ 17).

Между индексомъ λ *совмѣстнаго контраваріанта, его степенями* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ *относительно коэффиціентовъ* $a, b, \ldots s$, *и его классомъ* ρ *относительно перемѣнныхъ* u_1, u_2, конечно, *существуетъ соотношеніе*

$$n\mu + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k = 2\lambda - \rho. \tag{37}$$

Подобно предыдущему можно показать, *что совмѣстный контраваріантъ* $K(a, b, \ldots s; u_1, u_2)$ *обратится въ совмѣстныи коваріантъ, если въ немъ замѣнить* u_1, u_2 *черезъ* $x_2, -x_1$; и наоборотъ, *совмѣстный коваріантъ* $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ *обратится въ совмѣстный контраваріантъ, если въ немъ замѣнить* x_1, x_2 *черезъ* $-u_2, u_1$.

§ 30. Конваріанты и контраваріанты какъ совмѣстные инваріанты; ихъ дифференціальныя уравненія.

Изъ опредѣленія совмѣстнаго контраваріанта данной системы бинарныхъ формъ слѣдуетъ, что его можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ данной системы формъ

$$\text{I)} \qquad f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2),\ \ldots f_k(x_1,\ x_2)$$

вмѣстѣ съ линейной формой

$$\text{II)} \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2;$$

и наоборотъ, каждый совмѣстный инваріантъ системы (I, II) есть, конечно, совмѣстный контраваріантъ системы (I).

Если мы напишемъ совмѣстный коваріантъ системы (I) съ перемѣнными $\xi_1,\ \xi_2$:

$$\Gamma(a,\ b,\ \ldots s;\ \xi_1,\ \xi_2),$$

то его можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ системы (I) вмѣстѣ съ линейной формой

$$\text{(III)} \qquad \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Такимъ образомъ мы можемъ вывести многія свойства контраваріантовъ и коваріантовъ изъ извѣстныхъ уже свойствъ совмѣстныхъ инваріантовъ.

На основаніи § 18 мы можемъ, напримѣръ, написать полную систему дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ совмѣстный контраваріантъ или коваріантъ системы бинарныхъ формъ.

Для совмѣстнаго контраваріанта мы будемъ имѣть слѣдующую полную систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\sum_0^n (n-2i)\frac{\partial K}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m (m-2i)\frac{\partial K}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q (q-2i)\frac{\partial K}{\partial s_i}s_i + \frac{\partial K}{\partial u_1}u_1 - \frac{\partial K}{\partial u_2}u_2 = 0, \tag{D}$$

$$\sum_0^n \quad i\frac{\partial K}{\partial a_i}a_{i-1}+\sum_0^m \quad i\frac{\partial K}{\partial b_i}b_{i-1}+\ldots+\sum_0^q \quad i\frac{\partial K}{\partial s_i}s_{i-1}+$$
$$+\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0,$$

$$\sum_0^n(n-i)\frac{\partial K}{\partial a_i}a_{i+1}+\sum_0^m(m-i)\frac{\partial K}{\partial b_i}b_{i+1}+\ldots+\sum_0^q(q-i)\frac{\partial K}{\partial s_i}s_{i+1}+$$
$$+\frac{\partial K}{\partial u_1}u_2=0.$$

Слѣдовательно, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція* $K(a,\ b,\ \ldots s;\ u_1,\ u_2)$, *однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы системы и относительно перемѣнныхъ* u_1, u_2, *служила совмѣстнымъ контраваріантомъ этой системы, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла тремъ уравненіямъ:*

$$\left.\begin{aligned} &X_3(K)+\frac{\partial K}{\partial u_1}u_1-\frac{\partial K}{\partial u_2}u_2=0,\\ &X_2(K)+\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0,\\ &X_1(K)+\frac{\partial K}{\partial u_1}u_2=0,\end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

гдѣ X_1, X_2 *и* X_3 *имѣютъ тѣ-же значенія какъ и въ § 18.*

Мы знаемъ, что уравненіе первое системы (D) для цѣлой раціональной функціи K, однородной относительно $a,\ b,\ \ldots s$, и — въ отдѣльности, равносильно изобарности съ вѣсомъ $\lambda=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\rho)$, если u_1 считать съ вѣсомъ 0 и u_2 — съ вѣсомъ 1. Принявъ, затѣмъ, во вниманіе доказательство послѣдняго предложенія въ § 18, мы можемъ сказать: *для того, чтобы цѣлая раціональная функція* $K(a,\ b,\ \ldots s;\ u_1,\ u_2)$, *однородная относительно* $a,\ b,\ \ldots s$, *и — въ отдѣльности и изобарная съ вѣсомъ, равнымъ индексу* $\lambda=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\rho)$, *служила совмѣстнымъ контраваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ,* *необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла одному уравненію съ частными производными*

$$X_2(K)+\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0. \tag{38}$$

Такъ какъ совмѣстный контраваріантъ системы обращается въ ея совмѣстный коваріантъ, если въ первомъ замѣнить u_1, u_2 черезъ x_2, $-x_1$, то не трудно получить изъ вышеприведенныхъ уравненій контраваріанта соотвѣтственныя уравненія коваріанта. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{\partial K}{\partial u_2}=\frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial K}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial K}{\partial u_1}=\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}=\frac{\partial K}{\partial x_2};$$

слѣдовательно, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція* $K(a,\ b,\ \ldots s;\ x_2,\ -x_1)$ *или* $\Gamma(a,\ b,\ \ldots s;\ x_1,\ x_2)$, *однородная относительно* a, b, $\ldots s$, x *въ отдѣльности, служила совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла уравненіямъ*

$$\begin{aligned}
&X_3(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}x_2=0,\\
&X_2(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_2=0,\\
&X_1(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_1=0;
\end{aligned} \tag{D'}$$

если же функція Γ, *кромѣ того, еще изобарна съ вѣсомъ* $p=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\nu)$, *то достаточно, чтобы она удовлетворяла только одному уравненію*

$$X_2(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_2=0; \tag{39}$$

при чемъ вѣсъ x_2 считается равнымъ 0 и вѣсъ x_1 равнымъ 1.

§ 31. Коэффиціенты коваріанта и ихъ взаимная зависимость. Теорема Cayley. Полуинваріанты.

Пусть коваріантъ $\Gamma(a,\ b,\ .\ .\ .\ s;\ x_1,\ x_2)$ представленъ въ видѣ

$$\Gamma = C_0 x_1^{\nu} + \binom{\nu}{1} C_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ .\ .\ .\ + C_{\nu} x_2^{\nu};$$

тогда коэффиціенты его C_i должны быть цѣлыми однородными полиномами относительно коэффиціентовъ каждой формы и изобарными съ вѣсомъ

$$\begin{aligned} p_i &= p - (\nu - i) \\ &= \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ .\ .\ .\ q\mu_k + \nu) - (\nu - i), \end{aligned} \tag{40}$$

т. е. ихъ вѣсъ p_i равняется $\lambda + i$, потому что изъ § 29 мы знаемъ, что индексъ λ коваріанта равенъ $\frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$. Для того, чтобы найти соотношенія между коэффиціентами C_i коваріанта, подставимъ его выраженіе въ вышеприведенной формѣ въ дифференціальное уравненіе коваріанта

$$X_2(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} x_2;$$

тогда мы получимъ тождественное равенство

$$\begin{aligned} \sum_0^{\nu} \binom{\nu}{i} X_2(C_i) x_1^{\nu-i} x_2^{i} &\equiv \sum_0^{\nu-1} (\nu - i) \binom{\nu}{i} C_i \ x_1^{\nu-(i+1)} x_2^{i+1} \\ &\equiv \sum_1^{\nu} (\nu - i + 1) \binom{\nu}{i-1} C_{i-1} x_1^{\nu-i} x_2^{i}; \end{aligned}$$

сравнивая коэффиціенты подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства, мы получимъ

$$\begin{aligned} X_2(C_0) &= 0, \\ X_2(C_1) &= \ \ C_0, \\ X_2(C_2) &= 2C_1, \\ &.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \end{aligned} \tag{41}$$

$$X_2(C_i) = iC_{i-1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X_2(C_\nu) = \nu C_{\nu-1}.$$

Эта система равенствъ, конечно, равносильна уравненiю коварiанта

$$X_2(\Gamma) - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

Подобно предыдущему уравненiе коварiанта

$$X_1(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} x_1$$

дастъ тождественное равенство

$$\sum_0^\nu \left(\frac{\nu}{i}\right) X_1(C_i)\, x_1^{\nu-i} x_2^i \equiv \sum_1^\nu i\,.\left(\frac{\nu}{i}\right) C_i \quad x_1^{\nu-(i-1)} x_2^{i-1}$$

$$\equiv \sum_0^{\nu-1} (i+1) \left(\frac{\nu}{i+1}\right) C_{i+1}\, x_1^{\nu-i} x_2^i;$$

сравнивая коэффицiенты подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства, мы получимъ

$$\left.\begin{aligned} X_1(C_0) &= \nu\,.\,C_1, \\ X_1(C_1) &= (\nu-1)C_2, \\ X_1(C_2) &= (\nu-2)C_3, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1(C_i) &= (\nu-i)C_{i+1}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1(C_{\nu-1}) &= C_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Эта система равенствъ, конечно, равносильна уравненiю коварiанта

$$X_1(\Gamma) - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} x_1 = 0.$$

Изъ послѣдней системы соотношеній между коэффиціентами C_i коваріанта мы имѣемъ

$$C_1 = \frac{1}{\nu} X_1(C_0),\ \ C_2 = \frac{1}{\nu(\nu-1)} X_1^2(C_0), \ldots C_\nu = \frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots 2.1} X_1^\nu(C_0);$$

слѣдовательно, мы можемъ всякій коваріантъ представить въ видѣ

$$\varGamma = C_0 x_1^\nu + \frac{1}{1} X_1(C_0) x_1^{\nu-1} x_2 + \frac{1}{1\,.\,2} X_1^2(C_0) x_1^{\nu-2} x_2^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\ldots\nu} X_1^\nu(C_0)\, x_2^\nu.$$

Коэффиціентъ C_0, опредѣляющій такимъ образомъ вполнѣ коваріантъ $\varGamma$, назовемъ *главнымъ коэффиціентомъ коваріанта.*

Мы знаемъ, что главный коэффиціентъ C_0 коваріанта $\varGamma$ есть цѣлый многочленъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, изобарный съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$ и удовлетворяющій уравненію $X_2(C_0) = 0$.

Теперь мы докажемъ обратное предложеніе:

Теорема Cayley[1]. *Если* $C_0(a, b, \ldots s)$ *есть цѣлая раціональная функція, однородная относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, изобарная съ вѣсомъ* $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$, *и если она удовлетворяетъ уравненію* $X_2(C_0) = 0$, *то функція*

$$\varGamma = C_0 x_1^\nu + \frac{1}{1} X_1(C_0) x_1^{\nu-1} x_2 + \frac{1}{1\,.\,2} X_1^2(C_0) x_1^{\nu-2} x_2^2 + \ldots + \qquad (43)$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\ldots\nu} X_1^\nu(C_0)\, x_2^\nu$$

служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы формъ.

Такъ какъ вѣсъ коэффиціента $X_1^i(C_0)$ равенъ $p_0 + i$, то

---

[1] Cayley. *A second memoir upon quantics.* Philosophical Transactions, vol. 146, pp. 101—126. 1856.

вѣсъ всего члена $\frac{1}{1.2\ldots i}X_1^i(C_0)x_1^{\nu-i}x_2^i$ равенъ

$$p_0+i+\nu-i=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu+\nu),$$

если принимать вѣсъ x_2 равнымъ 0 и вѣсъ x_1 — равнымъ 1; слѣдовательно, на основаніи послѣдняго предложенія въ § 30, для того, чтобы доказать нашу теорему, необходимо только доказать, что функція Γ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$X_2(\Gamma)-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}x_2=0,$$

или, что тоже самое, системѣ соотношеній (41), т. е. надо доказать, что ея коэффиценты C_i удовлетворяютъ равенствамъ

$$X_2(C_i)=iC_{i-1},\text{ гдѣ } i=1,\ 2,\ \ldots\nu;$$

но мы имѣемъ $C_i=\frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1)}X_1^i(C_0)$, слѣдовательно надо обнаружить справедливость равенствъ

$$\frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1)}X_2X_1^i(C_0)=\frac{i}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+2)}X_1^{i-1}(C_0),$$

гдѣ $i=1,\ 2,\ \ldots\nu,$

или равенствъ

$$X_2X_1^i(C_0)=i(\nu-i+1)X_1^{i-1}(C_0),\text{ гдѣ } i=1,\ 2,\ \ldots\nu;$$

мы знаемъ изъ § 18 соотношеніе

$$(X_2X_1^i-X_1^iX_2)\varphi=i(\chi-i+1)X_1^{i-1}(\varphi),$$

при чемъ въ данномъ случаѣ $\varphi=C_0$ имѣетъ эксцессъ $\chi=n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k-2p_0=\nu$, и $X_1^iX_2(C_0)=X_1^i(0)\equiv 0$, слѣдовательно, равенства

$$X_2X_1^i(C_0)=i(\nu-i+1)X_1^{i-1}(C_0),\text{ гдѣ } i=1,\ 2,\ \ldots\nu$$

справедливы, и теорема Cayley, такимъ образомъ, доказана.

Замѣчаніе. Цѣлая раціональная функція $C(a, b, \dots s)$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, изобарная съ произвольнымъ вѣсомъ p и удовлетворяющая уравненію $X_2(C) = 0$, называется *полуинваріантомъ* данной системы бинарныхъ формъ; онъ отличается отъ инваріанта только тѣмъ, что $p \neq \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k)$.

Слѣдовательно, полуинваріантъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ главнаго коэффиціента для коваріанта порядка $\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p$, и необходимо только, чтобы $n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p > 0$.

Пусть $n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p < 0$; вообразимъ другую систему бинарныхъ формъ

$$F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ \dots\ F_k(x_1, x_2)$$

порядковъ $N > n$, $M > m$, $\dots$ $Q > q$; пусть ихъ коэффиціенты будутъ $a_0, a_1, \dots a_N$, $b_0, b_1, \dots b_M$, $\dots s_0, s_1, \dots s_Q$. Очевидно, что функція $C(a, b, \dots s)$ будетъ удовлетворять и для новой системы уравненію $X_2(C) = 0$; если для новой системы число

$$\nu = N\mu_1 + M\mu_2 + \dots + Q\mu_k - 2p$$

положительное, то C будетъ служить главнымъ коэффиціентомъ коваріанта порядка ν для новой системы; такихъ новыхъ системъ можно, конечно, вообразить безчисленное множество.

§ 32. Число основныхъ*) совмѣстныхъ коваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Мы уже знаемъ, что совмѣстный коваріантъ $\Gamma(a, b, \dots s; x_1, x_2)$ данной системы бинарныхъ формъ послѣ замѣны въ немъ x_1, x_2 черезъ ξ_1, ξ_2 дѣлается совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы

I) $$f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2),\ \dots\ f_k(x_1, x_2)$$

---

1) Здѣсь говорится объ основныхъ совмѣстныхъ коваріантахъ въ смыслѣ Aronhold'a — черезъ нихъ выражаются алгебраически всѣ остальные коваріанты данной системы.

съ прибавленіемъ къ ней еще линейной формы

II) $$\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2,$$

и наоборотъ, если въ совмѣстномъ инваріантѣ $J(a, b, \ldots s, \xi)$ системы (I, II) замѣнить ξ_1, ξ_2 черезъ x_1, x_2, то получится совмѣстный коваріантъ системы (I).

Слѣдовательно, на основаніи предпослѣдняго предложенія въ § 22 мы скажемъ, что система бинарныхъ формъ, для которой имѣетъ мѣсто неравенство

$$(n+m+\ldots+q+1)+k+1>4$$

или, что тоже самое, неравенство

$$(n+m+\ldots+q)+k>2,$$

имѣетъ

$$(n+m+\ldots+q)+k-1$$

основныхъ совмѣстныхъ коваріантовъ, черезъ которые выражаются всѣ остальные. Но вышеприведенное неравенство не имѣетъ мѣста только въ единственномъ случаѣ, если данная система состоитъ изъ одной линейной формы, для которой

$$(n+m+\ldots+q)+k=2\,;$$

для этой же системы существуетъ единственный основной коваріантъ — это сама линейная форма, такъ какъ эта форма $a_0 x_1 + a_1 x_2$ съ линейной формы $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$ имѣетъ только одинъ основной совмѣстный инваріантъ $J_{1,1} = a_0 \xi_1 + a_1 \xi_2$ (§ 19, *Прим.* 2).

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что *всякая система бинарныхъ формъ имѣетъ*

$$(n+m+\ldots+q)+k-1 \tag{44}$$

основныхъ въ смыслѣ Aronhold'а *совмѣстныхъ коваріантовъ.*

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ одну бинарную форму n-го порядка число ея основныхъ коваріантовъ равно n.

Примѣръ. Изъ § 19 *(Прим.* 3*)* мы заключаемъ, что форма $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$ съ формою 2-го порядка $a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$

имѣетъ два совмѣстныхъ инваріанта:

$$a_0 a_2 - a_1^2 \text{ и } a_0 \xi_1^2 + 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2;$$

слѣдовательно, бинарная форма втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

имѣетъ два коваріанта: одинъ нулеваго порядка, т. е. инваріантъ

$$a_0 a_2 - a_1^2,$$

и другой втораго порядка — это сама бинарная форма

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

эти два коваріанта и суть ея основные коваріанты.

§ 33. Число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Такъ какъ всѣ коваріанты $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ данной системы бинарныхъ формъ, если въ нихъ ввести вмѣсто x_1, x_2 перемѣнныя ξ_1, ξ_2, могутъ быть получены изъ совмѣстныхъ инваріантовъ этой системы и линейной формы $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$, то при опредѣленіи числа линейно-независимыхъ коваріантовъ данныхъ степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ и даннаго порядка ν надо воспользоваться формулами §§ 24, 25.

Искомое число будетъ выражаться такъ:

$$N_\nu = \Psi_p(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k, \nu) - \Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \nu), \quad (45)$$

гдѣ $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \nu)$ есть число рѣшеній Діофантовой системы уравненій:

$$\begin{array}{l} e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \mu_1, \\ l_0 + l_1 + \ldots + l_m = \mu_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_0 + t_1 + \ldots + t_q = \mu_k, \qquad\qquad\qquad\qquad (46) \\ \gamma_0 + \gamma_1 \qquad\qquad = \nu, \\ e_1 + 2e_2 + \ldots + l_1 + 2l_2 + \ldots + t_1 + 2t_2 + \ldots + qt_q + \gamma_1 = p, \end{array}$$

гдѣ
$$p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k + 1 . \nu).$$

Изъ § 25 мы знаемъ, что это число $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k, \nu)$ равно коэффиціенту при $x^{\mu_1} y^{\mu_2} \dots u^{\mu_k} w^{\nu} v^{p}$ въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ выраженія

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\dots(1-v^n x)} \cdot \frac{1}{(1-y)(1-vy)\dots(1-v^m y)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\dots \frac{1}{(1-u)(1-vu)\dots(1-v^q u)} \cdot \frac{1}{(1-w)(1-vw)},$$

и число N_ν приводится къ такому виду:

$$N_\nu = [(1-v)\varphi_{\mu_1,n}(v) \cdot \varphi_{\mu_2,m}(v) \dots \varphi_{\mu_k,q}(v) \cdot \varphi_{\nu,1}(v)]_{v^p}. \qquad (47)$$

Такъ какъ

$$\varphi_{\nu,1}(v) = \frac{1-v^{\nu+1}}{1-v},$$

то

$$N_\nu = [(1-v^{\nu+1})\varphi_{\mu_1,n}(v)\varphi_{\mu_2,m}(v) \dots \varphi_{\mu_k,q}(v)]_{v^p}. \qquad (48)$$

Мы знаемъ изъ § 27, что функція $\varphi_{\mu,n}(v)$ обладаетъ свойствомъ

$$\varphi_{\mu,n}(v) = v^{n\mu}\,\varphi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right);$$

пусть $\Psi(v) = \varphi_{\mu_1,n}(v)\,\varphi_{\mu_2,m}(v) \dots \varphi_{\mu_k,q}(v)$, тогда мы имѣемъ

$$\Psi(v) = v^{n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k}\,\Psi\left(\frac{1}{v}\right);$$

пусть $(v^\nu - 1)\,\Psi(v) = \phi(v)$, тогда

$$\phi(v) = -v^{n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k + \nu}\,\phi\left(\frac{1}{v}\right)$$

или

$$\phi(v) = -v^{\varkappa}\phi\left(\frac{1}{v}\right), \text{ гдѣ } \varkappa = n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k + \nu;$$

такъ какъ $\phi(v)$ цѣлый полиномъ степени $\varkappa$, что слѣдуетъ изъ § 27, 1° и 2°, то мы имѣемъ

$$\phi(v) = c_0 v^{\varkappa} + c_1 v^{\varkappa-1} + \dots + c_\varkappa,$$
$$v^{\varkappa}\phi\left(\frac{1}{v}\right) = c_0 + c_1 v + \dots + c_\varkappa v^{\varkappa},$$

и въ силу равенства $\phi(v) = -v^{\varkappa} \phi\left(\frac{1}{v}\right)$ получимъ

$$c_0 = -c_{\varkappa}, \; c_1 = -c_{\varkappa-1}, \; \ldots \; c_{\frac{\varkappa}{2}} = -c_{\frac{\varkappa}{2}} = 0;$$

слѣдовательно, принявъ во вниманіе, что $\frac{\varkappa}{2} = p$, мы получимъ;

$$0 = \left[(v^{\nu} - 1) \psi_{\mu_1, n}(v) \psi_{\mu_2, m}(v) \ldots \psi_{\mu_k, q}(v)\right]_{v^p};$$

складывая это равенство почленно съ равенствомъ (48), мы получимъ

$$N_{\nu} = \left[(v^{\nu} - v^{\nu+1}) \psi_{\mu_1, n}(v) \psi_{\mu_2, m}(v) \ldots \psi_{\mu_k, q}(v)\right]_{v^p} \tag{49}$$

или

$$N_{\nu} = \left[(1 - v) \psi_{\mu_1, n}(v) \psi_{\mu_2, m}(v) \ldots \psi_{\mu_k, q}(v)\right]_{v^{p-\nu}}, \tag{50}$$

гдѣ $p - \nu$ равно $\frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$, т. е. равно вѣсу p_0 главнаго коэффиціента коваріанта или индексу λ. Этотъ результатъ можно было предвидѣть, исходя изъ теоремы Cayley, потому что число $\left[(1 - v) \psi_{\mu_1, n}(v) \psi_{\mu_2, m}(v) \ldots \psi_{\mu_k, q}(v)\right]_{v^{p_0}}$, равно (§ 25) числу линейно-независимыхъ полиномовъ $C(a, b, \ldots s)$, однородныхъ относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, изобарныхъ съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$ и удовлетворяющихъ уравненію $X_2(C) = 0$, изъ которыхъ каждый при $\nu > 0$ служитъ главнымъ коэффиціентомъ вполнѣ имъ опредѣляемаго коваріанта порядка ν данной системы. Но это послѣднее разсужденіе нельзя считать строгимъ доказательствомъ нашей формулы, потому что въ данномъ случаѣ для полуинваріанта съ $\chi \neq 0$ не доказана независимость системы (L), что было доказано для инваріантовъ въ § 24. Наоборотъ, изъ нашего вывода формулы (50) слѣдуетъ, что система (L) независима и при $\chi > 0$.

Вслѣдствіе взаимности двухъ индексовъ функціи $\psi_{\mu, n}(v)$ въ выраженіи N_r, т. е. вслѣдствіе свойства $\psi_{\mu, n}(v) = \psi_{n, \mu}(v)$, одна бинарная форма и система бинарныхъ формъ обладаютъ свойствомъ взаимности и по отношенію къ ихъ коваріантамъ.

Въ данномъ случаѣ обощеніе теоремы Hermite'а, предложенное Hurwitz'омъ для совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, надо видоизмѣнить такимъ образомъ:

Если взять двѣ системы бинарныхъ формъ:

I) $$f_1,\ f_2,\ \dots f_r;\quad F_1,\ F_2,\ \dots F_k,$$

соотвѣтственно порядковъ

$$n_1,\ n_2,\ \dots n_r;\quad l_1,\ l_2,\ \dots l_k,$$

и

II) $$g_1,\ g_2,\ \dots g_r;\quad F_1,\ F_2,\ \dots F_k,$$

соотвѣтственно порядковъ

$$m_1,\ m_2,\ \dots m_r;\quad l_1,\ l_2,\ \dots l_k,$$

то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ порядка ν, *имѣющихъ степени* $m_1, m_2, \dots m_r;\ h_1, h_2, \dots h_k$, *для первой системы равно числу линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ того же порядка* ν, *имѣющихъ степени* $n_1, n_2, \dots n_r;\ h_1, h_2, \dots h_k$, *для второй системы.*

§ 34. Опредѣленіе числа линейно-независимыхъ коваріантовъ одной бинарной формы.

1° Пусть мы имѣемъ одну форму третьяго порядка. Для нея число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени μ и порядка ν равно коэффиціенту при $x^{\mu}v^{p_0}$, гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(3\mu - \nu)$, разности двухъ разложеній по восходящимъ степенямъ

$$\frac{1}{(1-v)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)} - \frac{v}{(1-x)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)};$$

первое разложеніе имѣетъ видъ

$$1 + x(1+v+v^2+v^3) + x^2(1+v+2v^2+2v^3+2v^4+2v^5+v^6) + \dots$$

Такъ какъ мы имѣемъ $\nu = 3\mu - 2p_0 \geqq 0$, то $p_0 \leqq \frac{3}{2}\mu$; слѣдовательно для насъ имѣютъ значеніе только первые $1 + \frac{3}{2}\mu$

или, лучше, $1+E\frac{3}{2}\mu$ членовъ въ каждой скобкѣ. Помѣстимъ коэффиціенты этихъ членовъ въ слѣдующую таблицу:

										μ
									1	0
								1	1	1
						1	1	2	2	2
					1	1	2	3	3	3
			1	1	2	3	4	4	5	4
		1	1	2	3	4	5	6	6	5
1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	6
										7

Подобно этому коэффиціенты втораго разложенія располагаются въ таблицѣ, которую получимъ изъ этой же, если отбросимъ послѣдній квадратъ въ каждой строкѣ. Наконецъ, коэффиціенты разности этихъ двухъ разложеній мы получимъ, если изъ каждаго коэффиціента перваго разложенія вычтемъ стоящій въ таблицѣ слѣва коэффиціентъ втораго разложенія; такимъ образомъ получится слѣдующая таблица:

										μ
									1	0
								1	0	1
						1	0	1	0	2
					1	0	1	1	0	3
			1	0	1	1	1	0	1	4
		1	0	1	1	1	1	1	0	5
1	0	1	1	1	1	2	0	1	0	6
										7

Изъ этой таблицы мы видимъ, что для бинарной формы третьяго порядка существуютъ слѣдующіе линейно-независимые коваріанты:

1-й степени — одинъ; его порядокъ $\nu = 3 . 1 - 2 . 0 = 3$; это сама бинарная форма f_3.

2-й степени — два; ихъ порядки: $\nu = 3 . 2 - 2 . 0 = 6$, $\nu = 3 . 2 - 2 . 2 = 2$; это квадратъ формы, т. е. f_3^2, и $\Gamma_{2,2}$.

3-й степени — три; ихъ порядки: $\nu = 3 . 3 - 2 . 0 = 9$, $\nu = 3 . 3 - 2 . 2 = 5$, $\nu = 3 . 3 - 2 . 3 = 3$; это суть коваріанты: f_3^3, $f_3 . \Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,3}$.

4-й степени — пять; ихъ порядки: $\nu = 3 . 4 - 2 . 0 = 12$, $\nu = 3 . 4 - 2 . 2 = 8$, $\nu = 3 . 4 - 2 . 3 = 6$, $\nu = 3 . 4 - 2 . 4 = 4$, $\nu = 3 . 4 - 2 . 6 = 0$; это суть коваріанты: f_3^4, $f_3^2 . \Gamma_{2,2}$, $f_3 . \Gamma_{3,3}$, $\Gamma_{2,2}^2$, $\Gamma_{4,0}$.

5-й степени — шесть; ихъ порядки: $\nu = 3 . 5 - 2 . 0 = 15$, $\nu = 3 . 5 - 2 . 2 = 11$, $\nu = 3 . 5 - 2 . 3 = 9$, $\nu = 3 . 5 - 2 . 4 = 7$, $\nu = 3 . 5 - 2 . 5 = 5$, $\nu = 3 . 5 - 2 . 6 = 3$; это суть коваріанты: f_3^5, $f_3^3 . \Gamma_{2,2}$, $f_3^2 . \Gamma_{3,3}$, $f_3 . \Gamma_{2,2}^2$, $\Gamma_{2,2} . \Gamma_{3,3}$, $\Gamma_{4,0} . f_3$.

6-й степени — восемь; ихъ порядки: $\nu = 3 . 6 - 2 . 0 = 18$, $\nu = 3 . 6 - 2 . 2 = 14$, $\nu = 3 . 6 - 2 . 3 = 12$, $\nu = 3 . 6 - 2 . 4 = 10$, $\nu = 3 . 6 - 2 . 5 = 8$, $\nu = 3 . 6 - 2 . 6 = 6$ (два коваріанта), $\nu = 3 . 6 - 2 . 8 = 2$; это суть коваріанты: f_3^6, $f_3^4 . \Gamma_{2,2}$, $f_3^3 . \Gamma_{3,3}$, $f_3^2 . \Gamma_{2,2}^2$, $f_3 . \Gamma_{2,2} . \Gamma_{3,3}$, два изъ трехъ — $\Gamma_{2,2}^3$, $\Gamma_{3,3}^2$, $\Gamma_{4,0} . f_3^2$, и $\Gamma_{4,0} . \Gamma_{2,2}$.

Такъ какъ только два изъ трехъ коваріантовъ 6-й степени и 6-го порядка суть линейно-независимые, то между $\Gamma_{2,2}^3$, $\Gamma_{3,3}^2$, $\Gamma_{4,0} . f_3^2$ должно существовать линейное соотношеніе; и дѣйствительно, Cayley нашелъ, что эти три коваріанта связаны соотношеніемъ

$$\Gamma_{3,3}^2 - \Gamma_{4,0} . f_3^2 + 4 \Gamma_{2,2}^3 = 0, \tag{51}$$

которое мы выведемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

2° Возьмемъ, далѣе, бинарную форму четвертаго порядка; для нея число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени μ

и порядка ν равно коэффиціенту при $x^{\mu} v^{p_0}$, гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(4\mu - \nu)$, въ разложеніи по восходящимъ степенямъ разности выраженій

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)(1-v^4x)} - \frac{v}{(1-v)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)(1-v^4x)}; \tag{52}$$

первое изъ этихъ выраженій разлагается такъ:

$$1 + x(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + x^2(1 + v + 2v^2 + 2v^3 + 3v^4 + 3v^5 + 2v^6 + 2v^7 + v^8) + \ldots$$

для насъ имѣютъ значенія только тѣ члены въ скобкахъ, для которыхъ $4\mu - 2p_0 \geqq 0$ или $p_0 \leqq 2\mu$, т. е. первые $1 + 2\mu$ членовъ; коэффиціенты этихъ членовъ можно размѣстить въ слѣдующей таблицѣ:

													μ
												1	0
										1	1	1	1
								1	1	2	2	3	2
						1	1	2	3	4	4	5	3
				1	1	2	3	5	5	7	7	8	4
		1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	5
1	1	2	3	5	6	9	10	13	14	16	16	18	6
													7

Коэффиціенты въ разложеніи втораго выраженія будутъ, конечно, представлены этою же таблицей, если въ ней отбросить послѣдніе квадраты. Коэффиціенты въ разложеніи разности двухъ данныхъ выраженій получатся, если мы въ нашей таблицѣ изъ каждаго числа вычтемъ число, стоящее слѣва въ той же строкѣ; такимъ образомъ мы получимъ таблицу:

													μ
												1	0
										1	0	0	1
								1	0	1	0	1	2
						1	0	1	1	1	0	1	3
				1	0	1	1	2	0	2	0	1	4
		1	0	1	1	2	1	2	1	2	0	1	5
1	0	1	1	2	1	3	1	3	1	2	0	2	6
													7

Изъ этой таблицы мы видимъ, что для бинарной формы четвертой степени существуютъ слѣдующіе линейно-независимые коваріанты:

1-й степени — одинъ; его порядокъ $\nu = 4.1 - 2.0 = 4$, это сама форма f_4.

2-й степени — три; ихъ порядки: $\nu = 4.2 - 2.0 = 8$, $\nu = 4.2 - 2.2 = 4$, $\nu = 4.2 - 2.4 = 0$; это суть — f_4^2, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}$.

3-й степени — пять; ихъ порядки: $\nu = 4.3 - 2.0 = 12$, $\nu = 4.3 - 2.2 = 8$, $\nu = 4.3 - 2.3 = 6$, $\nu = 4.3 - 2.4 = 4$, $\nu = 4.3 - 2.6 = 0$; это суть — f_4^3, $f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4$, $\Gamma_{3,0}$.

4-й степени — восемь; ихъ порядки: $\nu = 4.4 - 2.0 = 16$, $\nu = 4.4 - 2.2 = 12$, $\nu = 4.4 - 2.3 = 10$, $\nu = 4.4 - 2.4 = 8$, (два коваріанта), $\nu = 4.4 - 2.6 = 4$ (два коваріанта), $\nu = 4.4 - 2.8 = 0$; это суть — f_4^4, $f_4^2 . \Gamma_{2,4}$, $f_4 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^2$ и $\Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{3,0} . f_4$ и $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}^2$.

5-й степени — двѣнадцать; ихъ порядки: $\nu = 4.5 - 2.0 = 20$, $\nu = 4.5 - 2.2 = 16$, $\nu = 4.5 - 2.3 = 16$, $\nu = 4.5 - 2.4 = 12$ (два коваріанта), $\nu = 4.5 - 2.5 = 10$, $\nu = 4.5 - 2.6 = 8$

(два коваріанта), $\nu=4.5-2.7=6$, $\nu=4.5-2.8=4$ (два коваріанта), $\nu=4.5-2.10=0$; это суть — f_4^5, $f_4^3 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^3$ и $f_4 . \Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{2,4} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{3,0} . f_4^2$ и $\Gamma_{2,0} . f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0}^2 . f_4$ и $\Gamma_{3,0} . \Gamma_{2,4}$.

6-й степени — восемнадцать; ихъ порядки: $\nu=4.6-2.0=24$, $\nu=4.6-2.2=20$, $\nu=4.6-2.3=18$ $\nu=4.6-2.4=16$ (два коваріанта), $\nu=4.6-2.5=14$, $\nu=4.6-2.6=12$ (три коваріанта), $\nu=4.6-2.7=10$, $\nu=4.6-2.8=8$ (три коваріанта), $\nu=4.6-2.9=6$, $\nu=4.6-2.10=4$ (два коваріанта), $\nu=4.6-2.12=0$ (два инваріанта); это суть коваріанты — f_4^6, $f_4^4 . \Gamma_{2,4}$, $f_4^3 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^4$ и $f_4^2 . \Gamma_{2,4}^2$, $f_4 . \Gamma_{2,4} . \Gamma_{3,6}$, три изъ четырехъ — $\Gamma_{3,0} . f_4^3$, $\Gamma_{2,0} . f_4^2 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,4}^3$ и $\Gamma_{3,6}^2$, $\Gamma_{2,0} . f_4 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0}^2 . f_4^2$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{3,0} . f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,0} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{3,0} . f_4$ и $\Gamma_{2,0}^2 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}^3$ и $\Gamma_{3,0}^2$.

Такъ какъ изъ четырехъ коваріантовъ 6-й степени и 12-го порядка только три линейно-независимыхъ, то между ними должно существовать линейное соотношеніе; Cayley нашелъ это соотношеніе:

$$\Gamma_{3,6}^2-\Gamma_{3,0} . f_4^3-\Gamma_{2,0} . f_4^2 . \Gamma_{2,4}+4\,\Gamma_{2,4}^3=0; \tag{53}$$

мы выведемъ его въ слѣдующемъ параграфѣ.

Подобно предыдущему можно составить таблицу для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ бинарной формы пятаго порядка:

													μ
												1	0
										1	0	0	1
							1	0	1	0	1	0	2
					1	0	1	1	1	1	1	0	3
		1	0	1	1	2	1	2	1	2	0	1	4
1	0	1	1	2	2	2	2	3	2	2	1	1	5
													6

Такимъ образомъ Cayley составилъ таблицы для коваріантовъ бинарныхъ формъ:

для формъ 3-го, 4-го и 5-го порядковъ до 18-й степени,
для формы шестаго порядка до 15-й степени,
„ „ седьмаго „ „ 12-й „
„ „ восьмаго „ „ 10-й „

§ 35. Построеніе основныхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ при помощи теоремы Cayley.

Изъ теоремы Cayley, доказанной въ § 31, слѣдуетъ, что для построенія коваріанта степени μ и порядка ν для бинарной формы n-го порядка достаточно найти его главный коэффиціентъ C_0, т. е. найти однородный полиномъ степени μ относительно коэффиціентовъ данной бинарной формы, изобарный съ вѣсомъ $\frac{1}{2}(n\mu-\nu)$ и удовлетворяющій уравненію $X_2(C_0)=0$. Воспользуемся этимъ способомъ для построенія основныхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ.

1⁰ Бинарная форма третьяго порядка

$$f_3=a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3$$

имѣетъ три основныхъ коваріанта (§ 32), черезъ которые алгебраически выражаются всѣ остальные; такими коваріантами можно считать (§ 34, 1⁰) — f_3, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{4,0}$, изъ нихъ послѣдній есть извѣстный намъ изъ § 10 (*Прим.* 3) дискриминантъ

$$\Gamma_{4,0}=a_3^2a_0^2-6a_3a_2a_1a_0+4a_3a_1^3+4a_2^3a_0-3a_2^2a_1^2;$$

для того, чтобы вычислить коваріантъ $\Gamma_{2,2}$, мы опредѣлимъ его главный коэффиціентъ C_0; это будетъ однородный полиномъ 2-й степени относительно a_0, a_1, a_2, a_3, изобарный съ вѣсомъ $p_0=\frac{1}{2}(3\,.\,2-2)=2$ и удовлетворяющій уравненію $\frac{\partial C_0}{\partial a_1}a_0+2\frac{\partial C_0}{\partial a_2}a_1+3\frac{\partial C_0}{\partial a_3}a_2=0$; что опредѣляетъ $C_0=a_0a_2-a_1^2$. Остальные коэффиціенты на основаніи теоремы Cayley будутъ:

$$2C_1 = X_1(C_0) = \quad a_0 a_3 - a_1 a_2,$$

$$2 \,.\, 1 C_2 = X_1^2(C_0) = 2(a_1 a_3 - a_2^2);$$

слѣдовательно, искомый коваріантъ будетъ (54)

$$\Gamma_{2,2} = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2;$$

этотъ коваріантъ называется **Гессевскимъ**: онъ равенъ детерминанту

$$\frac{1}{36} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \, \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_2{}^2} \end{vmatrix},$$

свойства котораго впервые были изучены Hesse.

Подобно предыдущему можно найти и коваріантъ $\Gamma_{3,3}$, который выражается ирраціонально черезъ основные, но квадратъ котораго выражается черезъ нихъ раціонально (§ 34, 1^0). Для этого коваріанта главный коэффиціентъ C_0 долженъ быть однороднымъ полиномомъ степени 3 и изобарнымъ съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(3 \,.\, 3 - 3) = 3$, т. е. вида

$$a_0^2 a_3 + c_1 a_0 a_1 a_2 + c_2 a_1^3;$$

кромѣ того онъ долженъ удовлетворять уравненію $X_2(C_0) = 0$, что даетъ для c_1, c_2 значенія -3, $+2$; слѣдовательно, мы имѣемъ $C_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$. Остальные коэффиціенты будутъ:

$$3C_1 = \quad X_1(C_0) = \quad 3(a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 \quad + a_1^2 a_2),$$

$$3C_2 = \frac{1}{2} X_1^2(C_0) = -3(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 \quad + a_1 a_2^2),$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \,.\, 3} X_1^3(C_0) = - \quad (a_0 a_3^2 \quad + 3 a_1 a_2 a_3 - 2 a_2^3);$$

такимъ образомъ мы получаемъ (55)

$$\Gamma_{3,3} = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 -$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 + 3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3) x_2^3.$$

Для того, чтобы найти линейное соотношеніе Cayley (§ 34, 1°) для $\Gamma_{3,3}^{2}$, $\Gamma_{4,0}\cdot f_3^2$ и $\Gamma_{2,2}^{3}$, воспользуемся способомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ: пусть искомое соотношеніе будетъ

$$\Gamma_{3,3}^{2}+c\Gamma_{4,0}\cdot f_3^2+c'\Gamma_{2,2}^{3}=0;$$

для опредѣленія коэффиціентовъ c и c' разсмотримъ форму $f_3=x_1^3+x_2^3$, для которой $\Gamma_{4,0}=1$, $\Gamma_{2,2}=x_1x_2$ и $\Gamma_{3,3}=x_1^2-x_2^3$; подставивъ эти частныя значенія въ наше соотношеніе мы получимъ тождественное равенство

$$(1+c)\,x_1^6-(2-2c-c')\,x_1^3x_2^3+(1+c)\,x_2^6\equiv 0,$$

которое даетъ $c=-1$ и $c'=4$; слѣдовательно, искомое линейное соотношеніе имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,3}^{2}-\Gamma_{4,0}\cdot f_3^2+4\,\Gamma_{2,2}^{2}=0.$$

Коваріанты $\Gamma_{4,0}$, f_3, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,3}$ называются *неприводимыми* коваріантами бинарной формы 3-го порядка: они не могутъ быть выражены цѣлыми и раціональными функціями черезъ коваріанты низшихъ степеней и порядковъ. Дальше мы покажемъ, что другихъ неприводимыхъ коваріантовъ для формы f_3 не существуетъ.

2° Бинарная форма четвертаго порядка

$$f_4=a_0\,x_1^4+4\,a_1\,x_1^3x_2+6\,a_2\,x_1^2\,x_2^2+4\,a_3\,x_1\,x_2^3+a_4\,x_2^4$$

имѣетъ четыре основныхъ коваріанта (§ 32), черезъ которые выражаются всѣ остальные; такими коваріантами можно считать (§ 34, 2°) — f_4, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$, изъ нихъ послѣдніе два суть извѣстные намъ изъ § 10 (*Прим.* 6) инваріанты S и T:

$$\Gamma_{2,0}=S=a_0\,a_4-4\,a_1\,a_3+3\,a_2^2,$$

$$\Gamma_{3,0}=T=a_0\,a_3^2-2\,a_1\,a_2\,a_3-a_0\,a_2\,a_4+a_2^3+a_1^2\,a_4.$$

Для того, чтобы вычислить коваріантъ $\Gamma_{2,4}$, найдемъ его главный коэффиціентъ C_0; это будетъ опять $C_0=a_0\,a_2-a_1^2$.

Остальные коэфиціенты опредѣлятся такъ:

$$\begin{aligned}4\,C_1 &= X_1\,(C_0) = 2\,(a_0\,a_3 - a_1\,a_2),\\ 6\,C_2 &= \frac{1}{2}\,X_1^2\,(C_0) = (a_0\,a_4 + 2\,a_1\,a_3 - 3\,a_2^2),\\ 4\,C_3 &= \frac{1}{6}\,X_1^3\,(C_0) = 2\,(a_1\,a_4 - a_2\,a_3),\\ C_4 &= \frac{1}{24}\,X_1^4\,(C_0) = (a_2\,a_4 - a_3^2)\,;\end{aligned}$$

слѣдовательно, искомый коваріантъ имѣетъ видъ:

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,4} = (a_0\,a_2 - a_1^2)\,x_1^4 + 2\,(a_0\,a_3 - a_1\,a_2)\,x_1^3\,x_2 + (a_0\,a_4 + 2\,a_1\,a_3 -\\ - 3\,a_2^2)\,x_1^2\,x_2^2 + 2\,(a_1\,a_4 - a_2\,a_3)\,x_1\,x_2^3 + (a_2\,a_4 - a_3^2)\,x_2^4\,; \qquad (56)\end{aligned}$$

это есть Гессевскій коваріантъ: онъ равенъ детерминанту

$$\frac{1}{144}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Подобно предыдущему можно найти и коваріантъ $\Gamma_{3,6}$, который выражается черезъ основные коваріанты ирраціонально, но квадратъ котораго выражается черезъ нихъ раціонально (§ 34, 2°). Для этого коваріанта главный коэффиціентъ долженъ имѣть видъ

$$C_0 = a_0^2\,a_3 + c_1\,a_0\,a_1\,a_2 + c_2\,a_1^3,$$

при чемъ условіе $X_2(C_0) = 0$ даетъ $c_1 = -3$, $c_2 = +2$; то есть

$$C_0 = a_0^2\,a_3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^3\,;$$

Остальные коэффиціенты получатся такимъ образомъ:

$$\begin{aligned}6\,C_1 &= X_1\,(C_0) = a_0^2\,a_4 + 2\,a_0\,a_1\,a_3 - 9\,a_0\,a_2^2 +\\ &\qquad + 6\,a_1^2\,a_2\,,\\ 15\,C_2 &= \frac{1}{2}\,X_1^2\,(C_0) = 5\,(a_0\,a_1\,a_0 - 3\,a_0\,a_2\,a_3 + 2\,a_1^2\,a_3),\end{aligned}$$

$$20\,C_3 = \frac{1}{6}\,X_1^{\,3}(C_0) = -10(a_0\,a_3^{\,2} - a_1^{\,2}\,a_4),$$

$$15\,C_4 = \frac{1}{24}\,X_1^{\,4}(C_0) = -\;5(a_0\,a_3\,a_4 - 3\,a_1\,a_2\,a_4 + 2\,a_1\,a_3^{\,2}),$$

$$6\,C_5 = \frac{1}{120}\,X_1^{\,5}(C_0) = a_0\,a_4^{\,2} - 2\,a_1\,a_3\,a_4 + 9\,a_2^{\,2}\,a_4 - \\ - 6\,a_2\,a_3^{\,2},$$

$$C_6 = \frac{1}{720}\,X_1^{\,6}(C_0) = -\;(a_1\,a_4^{\,2} - 3\,a_2\,a_3\,a_4 + 2\,a_3^{\,3}).$$

Слѣдовательно, искомый коваріантъ имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,6} = (a_0^2\,a_3 - 3a_0\,a_1\,a_2 + 2a_1^3)\,x_1^6 + (a_0^2\,a_4 + 2a_0\,a_1\,a_3 - 9a_0\,a_2^2 + \\ + 6a_1^2\,a_2)\,x_1^5\,x_2 + 5\,(a_0\,a_1\,a_4 - 3a_0\,a_2\,a_3 + 2a_1^2\,a_3)\,x_1^4\,x_2^2 - \\ - 10\,(a_0\,a_3^2 - a_1^2\,a_4)\,x_1^3\,x_2^3 - 5\,(a_0\,a_3\,a_4 - 3a_1\,a_2\,a_4 + \\ + 2a_1\,a_3^2)\,x_1^2\,x_2^4 - (a_0\,a_4^2 + 2a_1\,a_3\,a_4 - 9a_2^2\,a_4 + 6a_2\,a_3^2)\,x_1\,x_2^5 - \\ - (a_1\,a_4^2 - 3a_2\,a_3\,a_4 + 2a_3^3)\,x_2^6. \qquad (57)$$

Для того, чтобы найти линейное соотношеніе Cayley (§ 34, 2°) для коваріантовъ шестой степени и двѣнадцатаго порядка, воспользуемся неопредѣленными коэффиціентами:

$$\Gamma_{3,6}^2 + c\Gamma_{3,0}\,.\,f_4^3 + c'\Gamma_{2,0}\,.\,f_4^2\,.\,\Gamma_{2,4} + c''\Gamma_{2,4}^{\,3} = 0\,;$$

для формы $f_4 = x_1^4 + x_2^4$ мы имѣемъ $\Gamma_{2,0} = 1$, $\Gamma_{3,0} = 0$, $\Gamma_{2,4} = x_1^2\,x_2^2$, $\Gamma_{3,6} = x_1^5\,x_2 - x_1\,x_2^5$; подставивъ эти частныя выраженія коваріантовъ въ линейное соотношеніе, мы получимъ тождественное равенство:

$$(c' + 1)\,x_1^{10}\,x_2^2 + (2c' + c'' - 2)\,x_1^6\,x_2^6 + (c' + 1)\,x_1^2\,x_2^{10} \equiv 0,$$

откуда опредѣлимъ $c' = -1$, $c'' = 4$; для того, чтобы опредѣлить c, разсмотримъ форму $f_4 = 6x_1^2\,x_2^2$, для которой $\Gamma_{2,0} = 3$, $\Gamma_{3,0} = 1$, $\Gamma_{2,4} = -3x_1^2\,x_2^2$, $\Gamma_{3,6} \equiv 0$; подставивъ эти частныя значенія коваріантовъ въ линейное соотношеніе, мы получимъ тождественное равенство:

$$(c\,.\,1\,.\,6^3 - c'\,.\,3\,.\,6^2\,.\,3 - c''\,.\,3^3)\,x_1^6\,x_2^6 \equiv 0,$$

откуда получимъ $c\,.\,2^3 = c'\,.\,2^2\,.\,3 + c''$, или $c = -1$, если $c' = -1$, $c'' = 4$; слѣдовательно, искомое соотношеніе имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,6}^{\,2} - \Gamma_{3,0}\,.\,f_4^3 - \Gamma_{2,0}\,.\,f_4^2\,.\,\Gamma_{2,4} + 4\,\Gamma_{2,4}^{\,3} = 0.$$

Коваріанты $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$, f_4, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,6}$ суть *неприводимые* коваріанты бинарной формы 4-го порядка. Дальше мы покажемъ, что другихъ неприводимыхъ коваріантовъ для формы f_4 не существуетъ.

§ 36. Опредѣленіе числа неприводимыхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ.

Неприводимыми коваріантами данной бинарной формы мы будемъ называть, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, такіе коваріанты, которые не могутъ быть выражены цѣлыми раціональными функціями черезъ коваріанты низшихъ степеней и порядковъ.

Построивъ по способу Cayley (§ 34) таблицы для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ, не трудно вычислить таковыя же для чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ данныхъ степеней и порядковъ.

Напишемъ таблицы Cayley, полученныя нами въ § 34 для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ третьяго и четвертаго порядковъ, въ слѣдующемъ видѣ:

1° для формы 3-го порядка —

порядки

степени	0	1	2	3	4	5	6	7
1				1				
2			1				1	
3				1		1		
4	1				1	1		
5				1		1		1
6			1				2	

2^0 для формы 4-го порядка —

порядки

степени

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1					1								
2	1				1				1				
3	1				1		1		1				1
4	1				2				2		1		1
5	1				2		1		2		1		2
6	2				2		1		3		1		3

Для построенія соотвѣтственныхъ таблицъ неприводимыхъ коваріантовъ воспользуется правиломъ *просѣиванія (tamisage)* Sylvester'a1): пусть будетъ извѣстно число неприводимыхъ коваріантовъ степеней низшихъ μ и порядковъ не выше ν; предположимъ, что число всѣхъ коваріантовъ типа (μ, ν), т. е. степени μ и порядка ν, получаемыхъ черезъ умноженіе этихъ неприводимыхъ коваріантовъ, будетъ β; пусть число всѣхъ линейно-независимыхъ коваріантовъ типа (μ, ν), даваемое таблицей, подобной таблицамъ 1^0 и 2^0, будетъ α; тогда, если $\alpha > \beta$, то число неприводимыхъ коваріантовъ типа (μ, ν) равно $\alpha - \beta$; если же $\alpha \leqq \beta$, то совсѣмъ не существуетъ неприводимыхъ коваріантовъ типа (μ, ν), и при томъ, если $\alpha < \beta$, то между указанными выше неприводимыми коваріантами существуетъ $\beta - \alpha$ соотношеній.

Примѣняя это правило къ случаю бинарной формы 3-го порядка, мы получимъ слѣдующіе результаты, которые можно отмѣтить послѣдовательно на таблицѣ I:

---

1) Franklin. *On the Calculation of the Generating Functions* etc. American Journal, Vol. 3, P. 131.

Первый столбецъ таблицы 1^0 показываетъ, что существуетъ одинъ, конечно неприводимый, коваріантъ типа (4, 0). Третій столбецъ показываетъ, что существуетъ одинъ коваріантъ типа (2, 2), и такъ какъ нѣтъ составныхъ коваріантовъ типа (2, 2), то онъ, конечно, неприводимъ; кромѣ того третій столбецъ даетъ еще одинъ коваріантъ типа (6, 2), но такъ какъ предыдущіе неприводимые коваріанты даютъ одинъ коваріантъ (4, 0) . (2, 2) типа (6, 2), то число неприводимыхъ коваріантовъ типа (6, 2) равно нулю. Четвертый столбецъ даетъ одинъ неприводимый коваріантъ типа (1, 3), одинъ неприводимый коваріантъ типа (3, 3) и ниодного неприводимаго коваріанта типа (5, 3), ибо (5, 3) = (4, 0) . (1, 3).

I)

		порядки						
		0	1	2	3	4	5	6
степени	1				1			
	2			1				
	3				1			
	4	1						
	5							
	6							$\bar{1}$

Кромѣ этихъ неприводимыхъ коваріантовъ другихъ мы не получимъ. При разсмотрѣніи коваріантовъ типа (6, 6) мы получимъ для β значеніе 3 и для α значеніе 2, т. е. между четырьмя неприводимыми коваріантами (4, 0), (2, 2), (1, 3) и (3, 3) существуетъ $\beta - \alpha = 1$ *соотношеніе типа* (6, 6); это обстоятельство мы можемъ отмѣтить на таблицѣ отрицательнымъ значеніемъ $\alpha - \beta = -1$.

Точно также можно построить таблицу чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ для бинарной формы 4-го порядка:

II)

		порядки												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
степени	1					1								
	2	1				1								
	3	1						1						
	4													
	5													
	6													$\bar{1}$

Этотъ способъ опредѣленія числа неприводимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы, а также и ихъ типовъ, требуетъ, конечно, весьма длинныхъ вычисленій; кромѣ того, онъ имѣетъ еще и тотъ недостатокъ, что при помощи его нельзя обнаружить *конечности* числа неприводимыхъ коваріантовъ.

Cayley[1]) предложилъ другой способъ, основанный на преобразованіи женератрисной функціи

$$\frac{1-v}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)};$$

къ изложенію этого способа мы теперь и перейдемъ.

§ 37. Опредѣленіе числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы при помощи женератрисной функціи по способу Cayley.

Мы знаемъ изъ § 33, что число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени μ и порядка ν для бинарной формы

---

[1]) Cayley. *„Second Memoir on Quantics“*, Philos. Transact. Vol. 141 и видоизмѣненіе въ *„Ninth Memoir on Quantis“*, Philos. Transact. Vol. 161; послѣдній способъ изложенъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

n-го порядка равно коэффиціенту при $a^{\mu}\, x^{\frac{1}{2}(n\mu-\nu)}$ въ разложеніи по восходящимъ степенямъ a женератрисной функціи:

$$\frac{1-x}{(1-a)\,(1-ax)\ldots(1-ax^{n})}. \tag{51}$$

Если же въ этой функціи мы замѣнимъ a черезъ ax^{n} и x черезъ $\frac{1}{x^{2}}$, то получится выраженіе

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^{n})\,(1-ax^{n-2})\ldots(1-ax^{-n+2})\,(1-ax^{-n})}, \tag{52}$$

въ которомъ коэффиціентъ при $a^{\mu}\, x^{\nu}$ будетъ тотъ же самый, какой былъ при $a^{\mu}\, x^{\frac{1}{2}(n\mu-\nu)}$ въ первоначальной, и слѣдовательно будетъ равенъ числу линейно-независимыхъ коваріантовъ степени μ и порядка ν для бинарной формы порядка n.

1^{0} Пусть мы имѣемъ бинарную форму 2-го порядка. На основаніи предыдущаго мы скажемъ, что число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени μ и порядка ν этой формы равно коэффиціенту при $a^{\mu}\, x^{\nu}$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^{2})\,(1-a)\,(1-ax^{-2})};$$

это разложеніе имѣетъ видъ

$$\begin{array}{l|l}
1 \qquad\qquad\qquad\qquad -x^{-2} & 1 \\
+a\,(x^{2}+1+x^{-2}) & +a\,(x^{2}+1+x^{-2}) \\
+a^{2}(x^{4}+x^{2}+2+x^{-2}+x^{-4}) & +a^{2}(x^{4}+x^{2}+2+x^{-2}+x^{-4}) \\
+a^{3}(x^{6}+x^{4}+\ldots+x^{-6}) & +a^{3}(x^{6}+x^{4}+\ldots+x^{-6}) \\
+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. & +\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;;
\end{array}$$

по сокращеніи мы получимъ:

$$\begin{array}{l|l}
1 \qquad\qquad -x^{-2} & 1 \\
+\,ax^{2} & +\,ax^{-2} \\
+\,a^{2}\,(x^{4}+1) & +\,a^{2}\,(x^{-4}+1) \\
+\,a^{3}\,(x^{6}+x^{2}) & +\,a^{3}\,(x^{-6}+x^{-2}) \\
+\;.\;\;.\;\;.\;\;. & +\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;;
\end{array}$$

это же выраженіе равно

$$A(x) - \frac{1}{x^2} A\left(\frac{1}{x}\right),$$

если черезъ $A(x)$ обозначить выраженіе

$$\frac{1}{(1-ax^2)(1-a^2)}.$$

Такъ какъ второй членъ полученнаго выраженія имѣетъ въ своемъ разложеніи только отрицательныя степени x, то искомое число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ — т. е. степени μ и порядка ν равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи выраженія

$$\frac{1}{(1-ax^2)(1-a^2)} = 1 + ax^2 + a^2 + ax^2 \,.\, a^2 + a^2 x^4 \,.\, a^2 + \ldots .$$

Изъ этого слѣдуетъ, что у бинарной формы 2-го порядка существуютъ два неприводимыхъ коваріанта типовъ: (ax^2) и $(a^2 x^0)$, черезъ степени и произведенія которыхъ выражаются всѣ остальные коваріанты.

2⁰ Для бинарной формы 3-го порядка число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^3)(1-ax)(1-ax^{-1})(1-ax^{-3})};$$

подобно предыдущему эту функцію можно представить въ видѣ

$$A(x) - \frac{1}{x^2} A\left(\frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$A(x) = \frac{1-a^6 x^6}{(1-a x^3)(1-a^2 x^2)(1-a^3 x^3)(1-a^4)}.$$

Такъ какъ второй членъ $-\frac{1}{x^2} A\left(\frac{1}{x}\right)$ имѣетъ въ своемъ разложеніи только отрицательныя степени x, то число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи $A(x)$; это же разложеніе содержитъ члены $a x^3$, $a^2 x^2$, $a^3 x^3$, a^4, а остальные члены его суть степени и произведенія этихъ четырехъ членовъ — съ числовыми коэффиціентами, при чемъ членъ $a^6 x^6$ имѣетъ коэффиціентъ 2, хотя изъ четырехъ первыхъ членовъ можно составить 3 подобныхъ произведенія: $(a x^3)^2 . a^4$, $(a^2 x^2)^3$, $(a^3 x^3)^2$; это послѣднее обстоятельство происходитъ отъ присутствія члена — $a^6 x^6$ въ числителѣ. Все это указываетъ на то, что бинарная форма 3-го порядка имѣетъ четыре неприводимыхъ коваріанта типовъ: (ax^3), $(a^2 x^2)$, $(a^3 x^3)$, (a^4), между которыми существуетъ соотношеніе 6-й степени относительно коэффиціентовъ a бинарной формы и 6-го порядка относительно перемѣнныхъ x_1, x_2.

3^0 Для бинарной формы 4-го порядка число линейнонезависимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1 - x^{-2}}{(1 - a x^4)(1 - a x^2)(1 - a)(1 - a x^{-2})(1 - a x^{-4})},$$

которую можно представить въ видѣ

$$A(x) - \frac{1}{x^2} A\left(\frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$A(x) = \frac{1 - a^6 x^{12}}{(1 - a x^4)(1 - a^2 x^4)(1 - a^2)(1 - a^3)(1 - a^3 x^6)}.$$

Изъ этой формы женератрисной функцій, подобно предыдущему, мы заключаемъ, что бинарная форма 4-го порядка имѣетъ пять неприводимыхъ коваріантовъ — типовъ: $(a x^4)$, $(a^2 x^4)$, (a^2), (a^3), $(a^3 x^6)$, между которыми существуетъ одно соотношеніе 6-й степени относительно коэффиціентовъ a бинарной формы и 12-го порядка относительно перемѣнныхъ x_1, x_2.

Въ примѣненіи этого способа къ опредѣленію числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ бинарной формы 5-го порядка Cayley встрѣтилъ уже значительныя затрудненія. Sylvester нѣсколько видоизмѣнилъ способъ Cayley, что дало ему возможность опредѣлить число и типы неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ первыхъ десяти порядковъ, а затѣмъ, и для бинарной формы 12-го порядка; къ изложенію этого видоизмѣненія способа Cayley мы теперь и перейдемъ.

§ 38. Видоизмѣненіе способа Cayley, предложенное Sylvester'омъ[1]).

Функцію

$$\phi^{(0)}(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^n)(1-ax^{n-2})\ldots(1-ax^{-n+2})(1-ax^{-n})}$$

Sylvester называетъ *первоначальной формой (crude form) женератрисной функціи.*

Если разложить эту функцію на элементарныя дроби, то для множителя $1-ax^\lambda$ въ знаменателѣ мы будемъ имѣть λ дробей вида

$$\frac{A}{1-\rho a^{\frac{1}{\lambda}} x},$$

гдѣ ρ есть одинъ изъ корней уравненія $\rho^\lambda - 1 = 0$; сумма этихъ λ дробей можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{1-ax^\lambda}.$$

Точно также сумма элементарныхъ дробей, соотвѣтствующихъ фактору $1-ax^{-\lambda}$ въ знаменателѣ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{x^\lambda}\cdot\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{1-ax^{-\lambda}};$$

это выраженіе, разложенное по возрастающимъ степенямъ a, будетъ содержать только члены съ отрицательными степенями x и для насъ не имѣетъ значенія при опредѣленіи числа линейно-независимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы,

---

1) Franklin. American Journal, Vol. 3.

поэтому мы можемъ опустить всѣ элементарныя дроби, соотвѣтствующія факторамъ $1 - ax^{-\lambda}$ въ знаменателѣ.

Оставшаяся часть функціи $\varphi(x)$ имѣетъ видъ

$$\varphi^{(1)}(x) = \Sigma \frac{A}{1 - \rho\, a^{\frac{1}{\lambda}} x}, \tag{53}$$

при чемъ коэффиціенты A имѣютъ выраженіе

$$\frac{1}{\lambda} \varphi_\lambda(\alpha^{-1}),$$

гдѣ φ_λ обозначаетъ $\varphi(x) \,.\, (1 - ax^\lambda)$ и $\alpha = \rho\, a^{\frac{1}{\lambda}}$, и получаются обычнымъ способомъ.

Развернутое выраженіе A имѣетъ видъ:

$$A = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^{-n+\lambda})(1 - \alpha^{-n+2+\lambda}) \ldots (1 - \alpha^{-2})(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})}$$

$$= (-1)^{\frac{n-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha^{\frac{n-\lambda}{2} \cdot \frac{n-\lambda+2}{2}} (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^{n-\lambda})(1 - \alpha^{n-2-\lambda}) \ldots (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})}$$

$$= (-1)^{\frac{n-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha^{\frac{n-\lambda}{2} \cdot \frac{n-\lambda+2}{2}} (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2 (1 - \alpha^4)^2 (1 - \alpha^6)^2 \ldots (1 - \alpha^{n-\lambda})^2 (1 - \alpha^{n-\lambda+2}) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})};$$

каждый изъ факторовъ $1 - \alpha^m$ въ знаменателѣ можно представить такъ:

$$\frac{1 - a^{k\lambda}}{1 - a^m} = 1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \ldots,$$

если $k\lambda$ есть кратное m, поэтому

$$A = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots}{(1 - a^k)(1 - a^{k'}) \ldots},$$

такъ какъ $\alpha^{k\lambda} = (\rho^\lambda a)^k = a^k$.

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\varphi^{(1)}(x)=\sum_{\lambda=1,2}^{\lambda=n}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\Sigma(c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\ldots)(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1}x^{\lambda-1})}{(1-ax^{\lambda})(1-a^{k})(1-a^{k'})\ldots}, \tag{54}$$

гдѣ Σ въ числителѣ распространяется на всѣ корни двучленнаго уравненія $\rho^{\lambda}-1=0$; или

$$\varphi^{(1)}(x)=\sum_{\lambda=1,2}^{\lambda=n}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{L_0+L_1x+L_2x^2+\ldots+L_{\lambda-1}x^{\lambda-1}}{(1-ax^{\lambda})(1-a^{k})(1-x^{k'})\ldots}, \tag{54$'$}$$

или, наконецъ,

$$\varphi^{(1)}(x)=\frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots}{(1-ax^{n})(1-ax^{n-2})\ldots(1-a^{k})(1-a^{k'})\ldots}, \tag{55}$$

гдѣ числитель имѣетъ, конечно, низшую степень относительно x, чѣмъ знаменатель; это выраженіе Sylvester назвалъ *приведенною формою (reduced form) женератрисной функціи*. Но при помощи этой приведенной формы женератрисной функціи нельзя непосредственно получить число и типы неприводимыхъ коваріантовъ данной формы, — ее необходимо еще преобразовать слѣдующимъ образомъ.

Каждый изъ факторовъ $1-ax^{\lambda}$ и $1-a^{k}$ въ знаменателѣ надо привести умноженіемъ числителя и знаменателя $\varphi^{(1)}(x)$ на надлежащаго множителя къ такому виду, чтобы онъ соотвѣтствовалъ заранѣе извѣстному неприводимому коваріанту: факторъ $1-ax^{n}$ уже соотвѣтствуетъ неприводимому коваріанту типа (ax^{n}), т. е. самой бинарной формѣ; факторы $1-ax^{n-2}$, $1-ax^{n-4}$, ... по умноженіи числителя и знаменателя на $1+ax^{n-2}$, $1+ax^{n-4}$, ... будутъ соотвѣтствовать коваріантамъ типа $[a^2x^{2(n-2)}]$, $[a^2x^{2(n-4)}]$, ..., — конечно неприводимымъ; факторъ $1-a^{k}$, если бинарная форма не имѣетъ неприводимаго инваріанта степени k, надо представить въ видѣ

$$\frac{1-a^{mk}}{1-a^{k}}=1+a^{m}+a^{2m}+\ \ldots,$$

гдѣ mk должно равняться степени какого-нибудь неприводимаго инваріанта.

Преобразованная такимъ образомъ функція $\phi^{(1)}(x)$ названа Sylvester'омъ *представляющей формой (representative form) женератрисной функціи;* она имѣетъ видъ

$$\phi(x)=\frac{c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots}{(1-ax^n)(1-a^2x^{2(n-2)})(1-a^2x^{2(n-4)})\ldots(1-a^k)(1-a^{k'})},\qquad(56)$$

гдѣ каждый факторъ $(1-a^r x^s)$ соотвѣтствуетъ неприводимому коваріанту типа $(a^r x^s)$ данной формы.

Sylvester'у и его ученику Franklin'у удалось найти представляющія формы женератрисныхъ функцій для бинарныхъ формъ первыхъ десяти порядковъ, а также и для бинарной формы 12-го порядка.

Когда женератрисная функція приведена къ представляющей формѣ, то не трудно опредѣлить всѣ неприводимые коваріанты данной бинарной формы: во первыхъ, факторы въ знаменателѣ дадутъ рядъ неприводимыхъ коваріантовъ, и, во-вторыхъ, положительные члены въ числителѣ, если къ нимъ примѣнить способъ просѣиванія (tamisage). Для примѣра мы разсмотримъ въ слѣдующемъ параграфѣ примѣненіе этого способа къ опредѣленію числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ бинарной формы 5-го порядка.

§ 39. Неприводимые коваріанты бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ.

1^0 Приведенная форма женератрисной функціи для бинарной формы 5-го порядка имѣетъ видъ

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}1+a(-x-x^3)+a^2(x^2+x^4+x^6)-a^3x^7+a^4x^4+a^5(x+x^3-\\-x^5)+a^6(-1-x^4)+a^7(2x+x^3+x^5)+a^8(-x^2-x^4-2x^6)+\\+a^9(x^3+x^7)+a^{10}(x^2-x^4-x^6)-a^{11}x^3+a^{12}+a^{13}(-x-x^3-\\-x^5)+a^{14}(x^4+x^6)-a^{15}x^7\end{array}\right\}}{(1-a^4)(1-a^6)(1-a^8)(1-ax)(1-ax^3)(1-ax^5)};\qquad(57)$$

представляющая форма имѣетъ знаменатель

$$D=(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)(1-ax^5)$$

и числитель

$$\begin{aligned}N=1&+a^3(x^3+x^5+x^9)+a^4(x^4+x^6)+a^5(x+x^3+x^7-x^{11})+\\&+a^6(x^2+x^4)+a^7(x+x^5-x^9)+a^8(x^2+x^4)+a^9(x^3+x^5-x^7)+\\&+a^{10}(x^2+x^4-x^{10})+a^{11}(x+x^3-x^9)+a^{12}(x^2-x^8-x^{10})+\\&+a^{13}(x-x^7-x^9)+a^{14}(x^4-x^6-x^8)+a^{15}(-x^7-x^9)+\\&+a^{16}(x^2-x^6-x^{10})+a^{17}(-x^7-x^9)+a^{18}(1-x^4-x^8-x^{10})+\\&+a^{19}(-x^5-x^7)+a^{20}(-x^2-x^6-x^8)-a^{23}x^{11}.\end{aligned}$$

Знаменатель даетъ неприводимые коваріанты типовъ:

(4,0), (8,0), (12,0), (1,5), (2,2), (2,6);

положительные члены числителя даютъ типы:

(3,3), (3,5), (3,9), (4,4), (4,6),
(5,1), (5,3), (5,7), (6,2), (6,4),
(7,1), (7,5), (8,2), (8,4), (9,3),
(9,5), (10,2), (10,4), (11,1), (11,3),
(12,2), (13,1), (14,4), (16,2), (18,0),

но изъ нихъ способомъ просѣиванія придется выдѣлить

$$\begin{array}{ll}(8,4)=(3,3)\ (5,1), & (9,5)=(4,4)\,.(\ 5,1),\\(10,2)=(5,1)^2, & (10,4)=(3,3)\,.(\ 7,1),\\(11,3)=(5,1)\,.(6,2), & (12,2)=(5,1)\,.(\ 7,1),\\(14,4)=(5,1)\,.(9,3), & (16,2)=(5,1)\,.(11,1),\end{array}$$

и тогда остальные 23 будутъ неприводимыми коваріантами разсматриваемой формы; ихъ можно представить на нижеприведенной таблицѣ (III).

2⁰ Для бинарной формы 6-го порядка приведенная форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}1+a(-x^2-x^4)+a^2(-1+x^4+x^6+x^8)+a^3(-1+2x^2+\\+x^4-x^{10})+a^4(x^2-x^6-x^8)+a^5(-x^6-x^8+x^{10})+a^6(1-\\-x^2-x^8+x^{10})+a^7(1-x^2-x^4)+a^8(-x^2-x^4+x^8)+\\+a^9(-1+x^6+2x^8-x^{10})+a^{10}(x^2+x^4+x^6+x^{10})+a^{11}(-x^6-\\-x^8)+a^{12}x^{10}\end{array}\right\}}{(1-a^2)^2(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)(1-ax^2)(1-ax^4)(1-ax^6)}; \tag{58}$$

представляющая форма имѣетъ знаменатель

$$D=(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)(1-a^{10})(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)(1-ax^6)$$

и числитель

$$N=1+a^3(x^2+x^6+x^8+x^{12})+a^4(x^4+x^6+x^{10})+a^5(x^2+x^4+ \\ +x^8-x^{16})+a^6(x^4+2x^6)+a^7(x^2+x^4+x^8-x^{12})+ \\ +a^8(x^2+x^4+x^6-x^{14})+a^9(x^4+x^6-x^{10}-x^{12})+a^{10}(x^2+ \\ +x^4-x^{12}-x^{14})+a^{11}(x^4+x^6-x^{10}-x^{12})+a^{12}(x^2-x^{10}- \\ -x^{12}-x^{14})+a^{13}(x^4-x^8-x^{12}-x^{14})+a^{14}(-2x^{10}-x^{12})+ \\ +a^{15}(1-x^8-x^{12}-x^{14})+a^{16}(-x^6-x^{10}-x^{12})+a^{17}(-x^4- \\ -x^8-x^{10}-x^{14})-a^{20}x^{16}.$$

III)

		порядки								
		0	1	2	3	4	5	6	7	9
степени	1						1			
	2			1				1		
	3				1		1			1
	4	1				1		1		
	5		1		1				1	
	6			1		1				
	7		1				1			
	8	1		1						
	9				1					
	10									
	11		1							
	12	1								
	13		1							
	18	1								

Факторы знаменателя соотвѣтствуютъ неприводимымъ коваріантамъ типовъ:

$$(2,0), (4,0), (6,0), (10,0), (2,4), (2,8), (1,6);$$

положительные члены числителя даютъ типы:

(3,2), (3,6), (3,8), (3.12), (4,4),
(4,6), (4,10), (5,2), (5,4), (5,8),
(6,4), 2(6,6), (7,2), (7,4), (7,8),
(8,2), (8,4), (8,6), (9,4), (9,6),
(10,2), (10,4), (11,4), (11,6), (12,2),
(13,4), (15,0),

IV)

	порядки						
степени	0	2	4	6	8	10	12
1				1			
2	1		1		1		
3		1		1	1		1
4	1		1	1		1	
5		1	1		1		
6	1			2			
7		1	1				
8		1					
9			1				
10	1	1					
12		1					
15	1						

но изъ нихъ способомъ просѣиванія придется выдѣлить типы:

$$(6,4)=(3,2)^2,\qquad (7,8)=(3,2).(4,6),$$
$$(8,4)=(3,2).(5,2),\qquad (8,6)=(3,2).(5,4),$$
$$(9,6)=(4,4).(5,2),\qquad (10,4)=(3,2).(7,2),$$
$$(11,4)=(3,2).(8,2),\qquad (11,6)=(5,2).(6,4),$$
$$(13,4)=(3,2).(10,2),$$

и тогда остальные 26 будутъ неприводимыми коваріантами.

Примѣняя способъ просѣиванія къ положительнымъ членамъ числителя въ этомъ примѣрѣ, а также и въ предыдущемъ, необходимо обращать вниманіе только на неприводимые коваріанты, соотвѣтствующіе членамъ въ числителѣ, и совершенно игнорировать коваріантами, соотвѣтствующими факторамъ знаменателя [1]).

Неприводимые коваріанты бинарной формы 6-го порядка представлены на таблицѣ (IV).

Подобно предыдущему Sylvester и Franklin вычислили неприводимые коваріанты, для бинарныхъ формъ до 10-го порядка включительно [2]).

Числа неприводимыхъ коваріантовъ для формъ первыхъ десяти порядковъ, полученныя Sylvester'омъ, таковы: 1, 2, 4, 5, 23, 26, 124, 69, 415 и 475.

Наконецъ, Sylvester при помощи своего метода вычислилъ неприводимые коваріанты бинарной формы 12-го порядка [3]); число ихъ равно 948.

§ 40. Цѣлыя раціональныя соотношенія (syzygies) между неприводимыми коваріантами. Система неприводимыхъ сидзигій. Способъ Hammond'a.

Изъ § 32 мы знаемъ, что число *основныхъ* въ смыслѣ Aronhold'а коваріантовъ бинарной формы n-го порядка равно n; числа же *неприводимыхъ* (въ смыслѣ Cayley-Sylvester'а) коваріантовъ для бинарныхъ формъ порядковъ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 12-го, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, больше n; слѣдовательно, между неприводимыми коваріантами этихъ бинарныхъ формъ должны существовать

---

[1]) Это довольно очевидно; подробное разсужденіе изложено въ вышеупомянутомъ мемуарѣ Franklin'а (American Journal, Vol. 3, P. 136—137).

[2]) Sylvester. American Journal, Vol. 2, 1879.

Hammond. Mathematische Annalen, Bd. 36, 1890.

[3]) Sylvester. American Journal, Vol. 4. P. 41—48. 1881.

алгебраическія соотношенія. Для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ мы нашли эти алгебраическія (и при томъ цѣлыя) соотношенія (§§ 34 и 35), и другихъ соотношеній между неприводимыми коваріантами этихъ формъ, конечно, быть не можетъ. Будемъ называть подобныя цѣлыя раціональныя соотношенія *сидзигіями*. Въ § 34 мы опредѣлили типы сидзигій для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ при помощи метода просѣиванія: если для какого-нибудь типа (μ, ν) существуетъ α линейно-независимыхъ коваріантовъ, а изъ неприводимыхъ коваріантовъ низшихъ типовъ можно построить $\beta > \alpha$ коваріантовъ типа (μ, ν), то, конечно, между послѣдними должно существовать $\beta - \alpha$ линейныхъ соотношеній; такимъ образомъ мы обнаруживаемъ $\beta - \alpha$ сидзигій типа (μ, ν) между коваріантами низшихъ типовъ, или точнѣе $\beta - \alpha$ линейно-независимыхъ сидзигій. Между этими $\beta - \alpha$ линейно-независимыми сидзигіями типа (μ, ν) нѣкоторыя могутъ быть получены различными комбинаціями сидзигій низшихъ типовъ; если отбросить таковыя, то останутся *неприводимыя* сидзигіи типа (μ, ν).

Для опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ сидзигій можно воспользоваться представляющими формами женератрисныхъ функцій.

Мы уже знаемъ, что отрицательные члены въ числителѣ представляющей формы женератрисной функціи соотвѣтствуютъ неприводимымъ сидзигіямъ; такимъ образомъ, для бинарной формы 5-го порядка мы получаемъ слѣдующіе типы сидзигій:

(5,11), (7,9), (9,7), (10,10), (11,9), (12,8),
(12,10), (13,7), (13,9), (14,6), (14,8), (15,7),
(15,9), (16,6), (16,10), (17,7), (17,9), (18,4),
(18,8), (18,10), (19,5), (19,7), (20,2), (20,6),
(20,8), (23,11);

остальные типы можно опредѣлить способомъ просѣиванія: напримѣръ, въ числителѣ женератрисной функціи коэффиціенты членовъ $a^6 x^6$, $a^6 x^8$, $a^6 x^{10}$, $a^6 x^{12}$, $a^6 x^{14}$, $a^6 x^{18}$ равны нулямъ, слѣдовательно коваріантовъ этихъ типовъ не должно быть; но изъ коваріантовъ (3,3), (3,5), (3,9) перемноженіемъ ихъ попарно можно получить по одному коваріанту указанныхъ типовъ; отсюда заключаемъ, что существуютъ сидзигіи типовъ: (6,6), (6,8), (6,10), (6,12), (6,14), (6,18). Точно также можно обнаружить существованіе сидзигій типовъ: (7,7), (7,9) — двѣ, (7,11), (7,13), (7,15) и т. д.

Такимъ образомъ Sylvester совмѣстно съ Franklin'омъ опредѣлили числа и типы неприводимыхъ сидзигій для бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ и составили нижеприведенныя двѣ таблицы, въ которыхъ помѣщены неприводимые коваріанты и неприводимыя сидзигіи бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ[1]). Англійскій ученый Hammond[2]) предложилъ другой способъ опредѣленія неприводимыхъ сидзигій, основанный на построеніи женератрисной функціи для *сидзигантовъ* (такъ называются выраженія, стоящія въ первыхъ частяхъ сидзигій). Сущность этого способа состоитъ въ слѣдующемъ.

Пусть существуютъ для бинарной формы n-го порядка α линейно-независимыхъ коваріантовъ типа (μ, ν) и β сидзигій этого же типа, и пусть между ними γ неприводимыхъ коваріантовъ и δ составныхъ коваріантовъ; тогда

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta.$$

Предположимъ, что мы знаемъ всѣ неприводимые коваріанты данной бинарной формы, пусть ихъ типы (r, s), (r', s'), ...

Обозначимъ произведеніе

$$(1-a^r x^s)(1-a^{r'} x^{s'}) \;...\; \text{черезъ}\;\; \Pi(1-a^r x^s);$$

тогда мы будемъ имѣть разложеніе

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}=\Sigma(\gamma+\delta)\, a^\mu x^\nu;$$

---

[1]) American Journal, Vol. 4 P. 48—61.

[2]) American Journal. Vol. 7, P. 331. 1885.

V. Для бинарной формы 5-го порядка.

порядки

степени	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
1						1												
2			1				1											
3				1		1				1								
4	1				1		1											
5		1		1				1				$\bar{1}$						
6			1		1		$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$			$\bar{1}$
7		1				1		$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$		
8	1		1				$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$				$\bar{1}$	
9				1		$\bar{1}$		$\bar{5}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$				
10					$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{4}$		$\bar{4}$				$\bar{2}$			
11		1				$\bar{4}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$						
12	1				$\bar{2}$		$\bar{4}$		$\bar{5}$				$\bar{2}$					
13		1		$\bar{2}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$								
14			$\bar{1}$		$\bar{2}$		$\bar{6}$				$\bar{3}$							
15				$\bar{2}$		$\bar{3}$		$\bar{4}$		$\bar{1}$								
16					$\bar{5}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{1}$							
17				$\bar{2}$		$\bar{3}$												
18	1		$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{1}$									
19				$\bar{2}$		$\bar{3}$												
20			$\bar{2}$		$\bar{1}$		$\bar{2}$											
21				$\bar{3}$		$\bar{1}$				$\bar{1}$								
22			$\bar{1}$		$\bar{2}$		$\bar{1}$											
23		$\bar{1}$		$\bar{1}$				$\bar{1}$										
24			$\bar{2}$		$\bar{1}$													
25		$\bar{1}$				$\bar{1}$												
26			$\bar{2}$															
27				$\bar{1}$														
28																		
29		$\bar{1}$																
30																		
31		$\bar{1}$																
38	$\bar{1}$																	

VI. Для бинарной формы 6-го порядка.

порядки

степени

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1				1									
2	1		1		1								
3		1		1	1		1						
4	1		1	1		1							
5		1	1		1				$\bar{1}$				
6	1			2	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$		$\bar{1}$
7		1	1	$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$		$\bar{1}$	
8		1			$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$		$\bar{2}$		
9			1	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$		$\bar{3}$			
10	1	1	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$				
11					$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$					
12		1	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$				
13			$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$					
14			$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$						
15	1		$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$					
16			$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$						
17			$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{1}$					
18		$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$		$\bar{1}$						
19			$\bar{2}$	$\bar{3}$		$\bar{1}$							
20		$\bar{1}$	$\bar{3}$		$\bar{1}$				$\bar{1}$				
21				$\bar{3}$									
22		$\bar{1}$	$\bar{2}$										
23		$\bar{1}$											
24			$\bar{2}$										
25		$\bar{1}$											
26													
27		$\bar{1}$											
30	$\bar{1}$												

или замѣнивъ $\gamma+\delta$ черезъ $\alpha+\beta$, мы получимъ

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}=\sum(\alpha+\beta)\,a^\mu x^\nu;$$

но мы знаемъ, что $\sum\alpha\,a^\mu x^\nu=\phi(x)$, гдѣ $\phi(x)$ есть женератрисная функцiя для коварiантовъ разсматриваемой бинарной формы; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\sum\beta\,a^\mu x^\nu=\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}-\phi(x),$$

т. е. коэффицiентъ при $a^\mu x^\nu$ въ разложенiи функцiи

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}-\phi(x)=\frac{1-\phi(x)\,.\,\Pi(1-a^r x^s)}{\Pi(1-a^r x^s)} \tag{59}$$

равенъ числу линейно-независимыхъ сидзигантовъ типа (μ,ν); послѣдняя функцiя и есть *женератрисная функцiя для сидзигантовъ* данной бинарной формы.

1° Для бинарной формы 3-го порядка

$$\Pi(1-a^r x^s)=(1-a x^3)(1-a^2 x^2)(1-a^3 x^3)(1-a^4),$$

а представляющая форма женератрисной функцiи —

$$\phi(x)=\frac{1+a^3x^3}{(1-a^3)(1-a^2x^2)(1-ax^3)};$$

слѣдовательно, женератрисная функцiя для сидзигантовъ будетъ

$$\frac{a^6x^6}{(1-ax^3)(1-a^2x^2)(1-a^3x^3)(1-a^4)}; \tag{60}$$

она показываетъ, что существуетъ единственная неприводимая сидзигiя типа (6, 6) между четырьмя неприводимыми коварiантами бинарной формы 3-го порядка.

2° Точно также можно получить женератрисную функцiю для сидзигантовъ въ случаѣ бинарной формы 4-го порядка; это будетъ

$$\frac{a^6\,x^{12}}{(1-ax^4)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^3)(1-a^3x^6)};$$

она показываетъ, что существуетъ единственная неприводимая сидзигія между пятью неприводимыми коваріантами бинарной формы 4-го порядка.

3⁰ Для бинарной формы 5-го порядка мы имѣемъ (§ 39):

$$\Pi(1-a^r x^s)=(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)\ .\ .\ .\ (1-a^{18}),$$

а представляющая форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\varphi(x)=\frac{N}{D},$$

гдѣ N и D имѣютъ выраженія, данныя въ § 39, 1⁰.

Слѣдовательно, женератрисная функція для сидзигантовъ будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\begin{array}{l}1-N.\{(1-a^3x^3)(1-a^3x^5)(1-a^3x^9)(1-a^4x^4)(1-a^4x^6)\\ \quad(1-a^5x)(1-a^5x^3)(1-a^5x^7)(1-a^6x^2)(1-a^6x^4)\\ \quad(1-a^7x)(1-a^7x^5)(1-a^8x^2)(1-a^9x^3)(1-a^{11}x)\\ \quad(1-a^{13}x)(1-a^{18})\}\end{array}}{(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1-a^{18})};\tag{61}$$

ея числитель имѣетъ степень 140 относительно a и 68 относительно x.

Если вмѣсто N подставить его выраженіе изъ § 39, 1⁰, то числитель женератрисной функціи для сидзигантовъ будетъ имѣть видъ

$$\begin{aligned}a^5x^{11}&+a^6(x^6+x^8+x^{10}+x^{14}+x^{18})\\ &+a^7(x^7+3x^9+x^{11}+x^{13}+x^{15})\\ &+a^8(2x^6+2x^8+3x^{10}+3x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{16}-x^{20})\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}$$

въ этомъ выраженіи нельзя сдѣлать приведенія членовъ $+x^{16}$ и $-x^{16}$, иначе не было бы члена, соотвѣтствующаго сидзигіи типа (8,16), которая непремѣнно существуетъ, что намъ извѣстно изъ опредѣленія сидзигій по способу Sylvester'а.

4⁰ Для бинарной формы 6-го порядка мы имѣемъ (§ 39, 2⁰)

$$\Pi(1-a^r x^s)=(1-ax^6)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)\ldots(1-a^{15}),$$

а представляющая форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\mathscr{f}(x)=\frac{N}{D},$$

гдѣ N и D имѣютъ выраженія, приведенныя въ § 39, 2⁰.

Слѣдовательно, женератрисная функція для сидзигантовъ имѣетъ видъ

$$\frac{\begin{aligned}1-N.\{&(1-a^3x^2)(1-a^3x^6)(1-a^3x^8)(1-a^3x^{12})(1-a^4x^4)\\ &(1-a^4x^6)(1-a^4x^{10})(1-a^5x^2)(1-a^5x^4)(1-a^5x^8)\\ &(1-a^6x^6)^2(1-a^7x^2)(1-a^7x^4)(1-a^8x^2)(1-a^9x^4)\\ &(1-a^{10}x^2)(1-a^{12}x^2)(1-a^{15})\}\end{aligned}}{(1-ax^6)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1-a^{15})}. \tag{62}$$

Если въ числитель этого выраженія подставить значеніе N, данное въ § 39, 2⁰, и произвести умноженіе, то онъ приметъ видъ:

$$\begin{aligned}&a^5x^{16}+a^6(x^8+x^{10}+x^{12}+2x^{14}+x^{16}+x^{18}+x^{20}+x^{24})\\ &+a^7(x^6+x^{10}+4x^{12}+x^{14}+2x^{16}+2x^{18}+x^{22})\\ &+a^8(2x^8+4x^{10}+2x^{12}+4x^{14}+3x^{16}-x^{18}+2x^{20}-x^{22}-x^{24}-x^{28})\\ &+a^9(x^6+4x^8+2x^{10}+5x^{12}+4x^{14}-x^{14}-2x^{16}+3x^{18}-x^{18}-4x^{20}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad-4x^{22}-x^{24}-4x^{26}-x^{28}-x^{30}-x^{32})\\ &+\ .\ ;\end{aligned}$$

въ этомъ выраженіи нельзя сдѣлать приведенія двухъ паръ членовъ $+4a^9x^{14}$, $-a^9x^{14}$ и $+3a^9x^{18}$, $-a^9x^{18}$, иначе не было бы надлежащихъ членовъ, соотвѣтствующихъ 4 сидзигіямъ типа (9,14) и 3 сидзигіямъ типа (9,18), существованіе которыхъ намъ извѣстно изъ опредѣленія сидзигій по способу Sylvester'а.

Такимъ образомъ методъ Hammond'а можетъ служить для провѣрки результатовъ, полученныхъ при опредѣленіи сидзигій по способу Sylvester'а, и на оборотъ.

§ 41. Сидзигіи втораго, третьяго и высшихъ родовъ.

Въ случаѣ бинарной формы 3-го порядка, мы знаемъ, существуетъ одна сидзигія между четырьмя неприводимыми коваріантами этой формы, и она есть единственная, потому что бинарная форма 3-го порядка имѣетъ три основныхъ (въ смыслѣ Aronhold'а) коваріантовъ, между которыми не должно существовать никакого алгебраическаго соотношенія.

Тоже самое имѣетъ мѣсто въ случаѣ бинарной формы 4-го порядка: между ея пятью неприводимыми коваріантами существуетъ единственная сидзигія, и другихъ сидзигій быть не можетъ, потому что бинарная форма 4-го порядка имѣетъ четыре основныхъ коваріанта, между которыми не должно быть никакого соотношенія.

Въ случаѣ бинарной формы 5-го порядка между ея 23 неприводимыми коваріантами существуютъ 167 сидзигій, и такъ какъ эта форма должна имѣть пять основныхъ коваріантовъ, алгебраически-независимыхъ между собою, то изъ всѣхъ этихъ сидзигій только 18 суть независимыя; слѣдовательно, между 167 сидзигантами должно существовать 149 алгебраическихъ соотношеній. Цѣлыя раціональныя соотношенія между сидзигантами называются *сидзигіями втораго рода*. Если окажется, что число неприводимыхъ сидзигіи втораго рода больше 149, то онѣ не суть независимыя, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ между сидзигантами втораго рода должны существовать *сидзигіи третьяго рода* и т. д.

Если мы имѣемъ бинарную форму n-го порядка и обозначимъ число ея неприводимыхъ коваріантовъ черезъ σ, число неприводимыхъ сидзигій перваго рода между этими коваріантами — черезъ σ_1, число неприводимыхъ сидзигій втораго рода — черезъ σ_2, число неприводимыхъ сидзигій третьяго рода — черезъ σ_3 и т. д., то должно существовать равенство

$$\sigma - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \ldots\ldots = n,$$

потому что бинарная форма n-го порядка имѣетъ n основныхъ коваріантовъ, которые между собою алгебраически независимы.

Число неприводимыхъ сидзигій втораго рода можно опредѣлить по способу просѣиванія: если мы имѣемъ представляющую форму женератрисной функціи для данной бинарной формы, то при опредѣленіи сидзигантовъ перваго рода можетъ оказаться для нѣкотораго типа (μ, ν) α неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода въ то время какъ изъ неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода младшихъ типовъ можно составить $\beta > \alpha$ сидзигантовъ перваго рода типа (μ, ν); это обстоятельство обнаружитъ существованіе $\beta - \alpha$ сидзигій между сидзигантами перваго рода, т. е. — существованіе $\beta - \alpha$ сидзигій втораго рода; если же мы имѣемъ женератрисную функцію для сидзигантовъ перваго рода, то часть сидзигантовъ втораго рода опредѣлится отрицательными членами числителя, а остальные сидзиганты втораго рода опредѣлятся по способу просѣиванія. Лучше, конечно, пользоваться двумя женератрисными функціями для коваріантовъ и для сидзигантовъ перваго рода, дабы имѣть возможность провѣрять результаты. Для опредѣленія числа неприводимыхъ сидзигій третьяго и высшихъ родовъ надо пользоваться способомъ просѣиванія.

§ 42. Теорема Gordan'a. Доказательство Hilbert'a.

Cayley обнаружилъ для бинарныхъ формъ первыхъ четырехъ порядковъ существованіе конечнаго числа неприводимыхъ коваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные ихъ коваріанты выражаются въ цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ. Затѣмъ, дальнѣйшія изслѣдованія Cayley и Sylvester'a о числѣ неприводимыхъ коваріантовъ нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ высшихъ порядковъ показали, что и для нихъ существуютъ *полныя* системы неприводимыхъ коваріантовъ; но всѣ эти изслѣдованія англійскихъ ученыхъ основываются на недоказанномъ до сихъ поръ *постулатумѣ о несуществованіи неприводимыхъ коваріантовъ и сидзигій перваго рода одинаковыхъ типовъ;* если это послѣднее обстоятельство не имѣло бы мѣста для нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ, то женератрисныя функціи дали бы только низшіи предѣлы для чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ, такъ какъ ихъ числители въ этомъ случаѣ содержали бы члены, служащіе результатами приведенія положительныхъ и отрицательныхъ членовъ одного типа.

Gordan[1] впервые доказалъ, пользуясь символическими обозначеніями бинарныхъ формъ, что одна бинарная форма всегда имѣетъ конечное число неприводимыхъ коваріантовъ, но обобщить это доказательство на случай системы бинарныхъ формъ оказалось дѣломъ весьма сложнымъ вслѣдствіе множества символовъ, и только нѣсколько позже нѣмецкому ученому удалось это обобщеніе[2].

Несравненно проще доказалъ это предложеніе, называемое обыкновенно *теоремой* Gordan'a, Hilbert[3], и при томъ онъ доказалъ это предложеніе не только для системы бинарныхъ формъ, но и для системы алгебраическихъ формъ съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ.

Мы приведемъ доказательство Hilbert'a для теоремы Gordan'a въ случаѣ системы бинарныхъ формъ, основанное на нѣкоторыхъ свойствахъ извѣстныхъ намъ операцій X_1 и X_2.

Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующей леммы:

Лемма 1. Если имѣется безконечный рядъ формъ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *съ n перемѣнными* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *составленныхъ по извѣстному закону, то всегда существуетъ между ними конечное число m такихъ формъ* $f_1, f_2, \ldots f_m$, *черезъ которыя остальныя формы даннаго ряда выражаются такъ:*

$$f = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots A_m f_m,$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_m$ *суть нѣкоторыя формы съ тѣми же перемѣнными какъ и формы* $f_1, f_2, f_3, \ldots$

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 69, S. 323—354. 1868.

[2] „*Programm*". Leipzig. Teubner. 1875.
Vorlesungen über Invariantentheorie, T. II, § 20, 21. Leipzig. Teubner. 1887.

[3] Mathematische Annalen. Bd. 36, S. 473—534. 1890.

Если мы имѣемъ рядъ формъ съ однимъ перемѣннымъ x_1, то выбравъ изъ нихъ форму f_1 съ самою низшею степенью x_1, мы будемъ, конечно, въ состояніи каждую изъ остальныхъ представить въ видѣ

$$A_1 f_1,$$

гдѣ A_1, будетъ нѣкоторая положительная степень x_1, умноженная на постоянный факторъ.

Не трудно также и въ случаѣ бинарныхъ формъ обнаружить справедливость нашей леммы.

Если бинарныя формы даннаго ряда имѣютъ нѣкоторую бинарную форму общимъ множителемъ, то мы можемъ дѣленіемъ устранить этотъ множитель. Послѣ этого будетъ возможно взять такія два линейныхъ сочетанія G и H данныхъ бинарныхъ формъ, которыя не имѣли бы общаго множителя. Очевидно, что всякую бинарную форму f порядка n, не ниже суммы p и q порядковъ G и H, можно представить въ видѣ

$$f = AG + BH,$$

такъ какъ f имѣетъ $n+1$ коэффиціентовъ, а во второй части A содержитъ $n-p+1$ и B содержитъ $n-q+1$ произвольныхъ коэффиціентовъ, которыхъ общее число

$$2n-(p+q)+2 > n+1,$$

если $n \geqq p+q$.

Что касается до бинарныхъ формъ даннаго ряда, порядки которыхъ ниже $p+q$, то между ними, конечно, можно выбрать нѣсколько формъ такъ, чтобы остальныя выражались бы черезъ ихъ линейныя сочетанія.

Для случая троичныхъ формъ уже довольно трудно обнаружить непосредственно справедливость леммы[1]). Поэтому мы воспользуемся способомъ отъ n къ $n+1$.

Допустимъ, что наша лемма справедлива для системы S_0 формъ съ n перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n$ и докажемъ, что

---

[1]) Noether. Mathematische Annalen Bd. 6, S. 352.

она справедлива для системы S_r формъ съ $(n+1)$ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n, y$, при чемъ y входитъ въ степени не выше r.

Каждая форма новой системы можетъ быть представлена единственнымъ образомъ въ видѣ

$$f = y^r \cdot \varphi + \psi,$$

гдѣ въ формѣ ψ перемѣнное y можетъ имѣть степень не выше $r-1$, а въ формѣ φ должно совсѣмъ отсутствовать. На основанiи нашего допущенiя вся система формъ φ можетъ быть представлена черезъ нѣкоторыя изъ формъ этой системы:

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_\mu \varphi_\mu.$$

Пусть $f_1, f_2, \ldots f_\mu$ соотвѣтствуютъ въ системѣ S_r формамъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$, т. е.

$$\begin{aligned} f_1 &= y_r \cdot \varphi_1 + \psi_1, \\ f_2 &= y^r \cdot \varphi_2 + \psi_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_\mu &= y^r \cdot \varphi_\mu + \psi_\mu. \end{aligned}$$

Если положить

$$\Psi = \psi - a_1 \psi_1 - a_2 \psi_2 - \ldots - a_\mu \psi_\mu,$$

то мы можемъ написать

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_\mu f_\mu + \Psi,$$

гдѣ Ψ содержитъ перемѣнное y не выше $r-1$ степени.

Мы предположимъ, что для системы S_{r-1} наша лемма справедлива; тогда мы имѣемъ

$$\Psi = b_1 \Psi_1 + b_1 \Psi_2 + \ldots + b_\nu \Psi_\nu.$$

Пусть $f', f'', \ldots f^{(\nu)}$ суть формы системы S_r, соотвѣтствующiя формамъ $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_\nu$, т. е.

$$
\begin{aligned}
f' &= a_1' \, f_1 + a_2' \, f_2 + \ldots + a_\mu' \, f_\mu + \Psi_1 \\
f'' &= a_1'' f_1 + a_2'' f_2 + \ldots + a_\mu'' f_\mu + \Psi_2 \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
f^{(\nu)} &= a_1^{(\nu)} f_1 + a_2^{(\nu)} f_2 + \ldots + a_\mu^{(\nu)} f_\mu + \Psi_\nu ;
\end{aligned}
\tag{63}
$$

если эти равенства умножить соотвѣтственно на $b_1, b_2, \ldots b_\nu$ и сложить, то мы получимъ, принимая во вниманіе соотношеніе

$$
\begin{aligned}
b_1 \Psi_1 + b_2 \Psi_2 + \ldots + b_\nu \Psi_\nu &= \Psi \\
&= f - a_1 f_1 - a_2 f_2 - \ldots - a_\mu f_\mu ,
\end{aligned}
$$

слѣдующее равенство

$$
\begin{aligned}
f = b_1 f' + b_2 f'' + \ldots + b_\nu f^{(\nu)} \\
+ \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_\mu f_\mu ,
\end{aligned}
\tag{64}
$$

гдѣ

$$
\beta_i = a_i - a_i' \, b_1 - a_i'' \, b_2 - \ldots - a_i^{(\nu)} \, b_\nu ;
$$

полученное такимъ образомъ равенство и доказываетъ справедливость нашей леммы.

Далѣе, не трудно также доказать слѣдующую вторую лемму:

Лемма 2. Если къ совершенно произвольному изобарному многочлену $F(a, b, \ldots s)$ *съ нулевымъ эксцессомъ, однородному относительно коэффиціентовъ каждой формы, примѣнить операцію*

$$
\left[1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ldots \right], \tag{65}
$$

то получится совмѣстный инваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.

Въ § 24 мы вывели для изобарнаго многочлена φ съ эксцессомъ $\chi = 2$ слѣдующее соотношеніе

$$\varphi = X_2 \left\{ \frac{X_1}{1!\ 2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\ 3!} + \frac{X_1^3 X_2^2}{3!\ 4!} - \ldots \right\} \varphi.$$

Если мы возьмемъ произвольный изобарный многочленъ $F(a, b, \ldots s)$ съ нулевымъ эксцессомъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, то $X_2(F)$ будетъ тоже изобарный многочленъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы и тѣхъ же степеней какъ и многочленъ F, но его эксцессъ равенъ 2. Подставивъ въ вышеуказанное соотношеніе вмѣсто φ многочленъ $X_2(F)$, мы получимъ соотношеніе

$$X_2(F) = X_2 \left\{ \frac{X_1}{1!\ 2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\ 3!} + \frac{X_1^3 X_2}{3!\ 4!} - \ \ldots \right\} X_2(F),$$

которое можно написать въ такомъ видѣ:

$$X_2 \left[1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ \ldots \right] F = 0; \quad (66)$$

это послѣднее соотношеніе и обнаруживаетъ справедливость нашей леммы, такъ какъ оно показываетъ, что изобарный многочленъ

$$J = \left[1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ \ldots \right] F,$$

однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы и съ нулевымъ эксцессомъ, удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$X_2(J) = 0,$$

т. е. выполняетъ условіе, достаточное для того, чтобы служить совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ.

При помощи доказанныхъ нами двухъ леммъ не трудно доказать теорему Gordan'а для системы бинарныхъ формъ.

Вообразимъ, что построены всѣ совмѣстные инваріанты

$$J(a_0,\ a_1,\ \ldots a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots b_m,\ \ldots s_0,\ s_1,\ \ldots s_q)$$

для данной системы бинарныхъ формъ. Тогда на основаніи первой леммы между ними возможно выбрать конечное число N такихъ инваріантовъ $J_1,\ J_2,\ \ldots J_N$, чтобы всѣ остальные выражались черезъ нихъ формулой

$$J = A_1 J_1 + A_2 J_2 + \ldots + A_N J_N, \tag{67}$$

гдѣ $A_1,\ A_2, \ldots A_N$ суть однородные относительно коэффиціентовъ каждой формы и изобарные многочлены, потому что все выраженіе J должно быть изобарнымъ многочленомъ, однороднымъ относительно коэффиціентовъ каждой формы; такимъ же свойствомъ обладаютъ, конечно, и многочленны $J_1,\ J_2, \ldots J_N$.

Теперь при помощи второй леммы можно замѣнить многочлены $A_1,\ A_2,\ \ldots A_N$ нѣкоторыми опредѣленными инваріантами $j_1,\ j_2,\ \ldots j_N$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вѣса инваріантовъ $J,\ J_1,\ J_2,\ \ldots J_N$ будутъ $p,\ p_1,\ p_2,\ \ldots p_N$; тогда вѣса многочленовъ $A_1,\ A_2,\ \ldots A_N$ будутъ, конечно, равны

$$p - p_1,\ p - p_2,\ \ldots p - p_N.$$

Такъ какъ для каждаго изъ инваріантовъ $J,\ J_1,\ J_2, \ldots J_N$ вѣсъ имѣетъ видъ

$$p_i = \frac{n\mu_1^{(i)} + m\mu_2^{(i)} + \ldots + q\mu_k^{(i)}}{2},$$

то $p - p_i$ имѣетъ видъ

$$p - p_i = \frac{n(\mu_1 - \mu_1^{(i)}) + m(\mu_2 - \mu_2^{(i)}) + \ldots + q(\mu_k - \mu_k^{(i)})}{2}$$

гдѣ $\mu_1 - \mu_1^{(i)},\ \mu_2 - \mu_2^{(i)},\ \ldots \mu_k - \mu_k^{(i)}$ суть степени многочлена A_i относительно коэффиціентовъ формъ данной системы; слѣдовательно, эксцессы многочленовъ А$_i$ равны нулямъ. Такимъ образомъ мы можемъ обратить многочлены A_i въ инваріанты данной системы бинарныхъ формъ посредствомъ операціи второй леммы:

$$[A_i]=\left[1-\frac{X_1 X_2}{1!\ 2!}+\frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!}-\frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!}+\ldots\right]A_i=j_i. \quad (68)$$

Примѣнивъ эту операцію къ обѣимъ частямъ равенства (67), мы получимъ

$$[J]=[A_1 J_1]+[A_2 J_2]+\ldots+[A_N J_N],$$

но такъ какъ $X_2(J)$, $X_2(J_1)$, $X_2(J_2)$, . . . $X_2(J_N)$ равны нулямъ, то

$$[J]=J,\ [A_1 J_1]=[A_1]J_1,\ [A_2 J_2]=[A_2]J_2,\ldots[A_N J_N]=[A_N]J_N,$$

слѣдовательно

$$J=[A_1]J_1+[A_2]J_2+\ldots+[A_N]J_N,$$

или, наконецъ, на основаніи соотношенія (68), получаемъ равенство

$$J=j_1 J_1+j_2 J_2+\ldots+j_N J_N, \quad (69)$$

которое и доказываетъ справедливость теоремы Gordan'а.

Надо, впрочемъ, замѣтить, что инваріанты j_1, j_2, . . . j_N въ свою очередь могутъ быть выражены черезъ инваріанты J_1, J_2, . . . J_N; такимъ образомъ всякій инваріантъ J можетъ быть, въ концѣ концовъ, выраженъ черезъ неприводимые инваріанты J_1, J_2, . . . J_N цѣлой раціональной функціей.

Изложенное нами доказательство Hilbert'а даетъ возможность обобщить теорему Gordan'а не только на случай инваріантовъ формъ съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, но даже и на случаи инваріантовъ формъ съ нѣсколькими рядами перемѣнныхъ, при чемъ для обращенія многочленовъ A_i формулы (67) въ инваріанты въ этихъ случаяхъ приходится пользоваться совсѣмъ новою операціей Ω [1]).

Hilbert въ своихъ изслѣдованіяхъ затронулъ также вопросъ о сидзигіяхъ между неприводимыми инваріантами данной системы формъ и показалъ, что *могутъ существовать сидзигіи перваго, втораго и т. д. родовъ, но если полная система неприводимыхъ инваріантовъ содержитъ N инваріантовъ, то возможны сидзигіи не выше $N+1$ рода.* Къ сожалѣнію, эти изслѣдованія имѣютъ еще далеко несовершенную форму по своей сложности, и мы не будемъ на нихъ останавливаться [2]).

Что касается до сидзидій каждаго рода въ отдѣльности, то при помощи первой леммы не трудно доказать, что онѣ имѣютъ полныя системы неприводимыхъ сидзигій. Для этого надо только обратить вниманіе на то, что первая лемма остается справедливой и для неоднородныхъ формъ, если подъ неоднородною формою подразумѣвать обыкновенную форму, въ которой одно перемѣнное x_n равно 1. Но сидзиганты Σ перваго рода, конечно, можно разсматривать какъ такія неоднородныя формы, если за перемѣнныя считать неприводимые инваріанты $J_1, J_2, \ldots J_N$ данной системы формъ. Слѣдовательно, каждый изъ сидзигантовъ перваго рода можетъ быть выраженъ линейно черезъ *конечное* число неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода — Σ_1', Σ_2', . . . $\Sigma_{\omega'}'$:

$$\Sigma' = A_1'\Sigma_1' + A_2'\Sigma_2' + \ldots + A_{\omega'}'\Sigma_{\omega'}', \qquad (70)$$

гдѣ A_1', A_2', . . . $A_{\omega'}'$ суть цѣлыя раціональныя функціи неприводимыхъ коваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_N$.

Подобно этому можно показать, что всѣ сидзиганты Σ'' втораго рода, разсматриваемые какъ неоднородныя формы съ

---

1) Hilbert. Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 529. 1890.

2) Ibid. S. 492 und 534.

перемѣнными $\Sigma_1{}'$, $\Sigma_2{}'$, . . . $\Sigma_{\omega'}{}'$, выражаются линейно черезъ *конечное* число неприводимыхъ сидзигантовъ второго рода — $\Sigma_1{}''$, $\Sigma_2{}''$, . . . $\Sigma_{\omega''}{}''$:

$$\Sigma'' = A_1{}''\,\Sigma_1{}'' + A_2{}''\,\Sigma_2{}'' + \ldots + A_{\omega''}{}''\,\Sigma_{\omega''}{}'', \qquad (71)$$

гдѣ $A_1{}''$, $A_2{}''$, . . . $A_{\omega''}{}''$ суть цѣлыя раціональныя функціи неприводимыхъ сидзигантовъ $\Sigma_1{}'$, $\Sigma_2{}'$, . . . $\Sigma_{\omega'}{}'$ перваго рода; и т. д.

ГЛАВА IV.

Различные способы построенiй и преобразованiй коварiантовъ бинарныхъ формъ.

43. Коварiанты неоднородныхъ бинарныхъ формъ.

Будемъ называть *неоднородною формою* многочленъ

$$f(x,1)=a_0 x^n+\binom{n}{1} a_1 x^{n-1}+\binom{n}{2} a_2 x^{n-2}+\ldots+a_n, \quad (72)$$

который получается изъ бинарной формы

$$f(x_1,x_2)=a_0 x_1^n+\binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2+\binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2+\ldots+a_n x_2^n,$$

если въ ней положить $x_1=x$ и $x_2=1$.

Коварiанты бинарной формы $f(x_1,x_2)$ послѣ замѣны въ нихъ x_1 черезъ x и x_2 черезъ 1 мы будемъ называть *коварiантами неоднородной формы* $f(x,1)$.

Если намъ удалось опредѣлить коварiанты неоднородной формы $f(x,1)$, то достаточно только замѣнить въ нихъ x черезъ x_1 и возстановить однородность при помощи x_2, и мы получимъ коварiанты бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

Будемъ сокращенно обозначать:

$$f(x,1)=f_0,\ \frac{1}{n} f'(x,1)=f_1,\ \frac{1}{n(n-1)} f''(x,1)=f_2,\ \ldots; \quad (73)$$

тогда по строкѣ Тэйлора мы будемъ имѣть:

$$f(x+h,1)=f_0(h)+\left(\frac{n}{1}\right)f_1(h).x+\left(\frac{n}{2}\right)f_2(h).x^2+\ldots+f_n(h).x^n.$$

Положимъ въ послѣднемъ равенствѣ $x=\frac{y_2}{y_1}$, тогда получится равенство

$$f(hy_1+y_2, y_1)=f_0(h)y_1^n+\left(\frac{n}{1}\right)f_1(h)y_1^{n-1}y_2+$$

$$+\left(\frac{n}{2}\right)f_2(h)y_1^{n-2}y_2^2+\ldots+f_n(h)y_2^n.$$

Если мы имѣемъ коваріантъ $\Gamma(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n; x_1, x_2)$ бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то онъ по отношенію къ подстановкѣ $x_1=hy_1+y_2$, $x_2=y_1$ съ модулемъ $\Delta=-1$ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$\Gamma[f_0(h), f_1(h), \ldots f_n(h); y_1, y_2]\equiv$$

$$\equiv(-1)^\lambda\,\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n; hy_1+y_2, y_1).$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ $y_1=1$, $y_2=0$, $h=x$, мы получимъ тождественное равенство

$$\Gamma(f_0, f_1, \ldots f_n; 1{,}0)\equiv(-1)^\lambda\,\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n; x, 1), \quad (74)$$

которое даетъ намъ слѣдующее предложеніе Faa di Bruno[1]):

Если въ главномъ коэффиціентѣ $\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n; 1{,}0)$ *коваріанта бинарной формы* $f(x_1, x_2)$ *количества* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *замѣнить черезъ* $f_0, f_1, \ldots f_n$, *то получится коваріантъ неоднородной формы* $f(x, 1)$.

Это предложеніе можно обобщить для системы бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2),\ F(x_1, x_2),\ \varphi(x_1, x_2),\ \ldots\ \varphi(x_1, x_2),$$

---

1) Faa di Bruno. Comptes Rendus. Vol. XC, P. 1203—1205. 1880.

если воспользоваться разсужденіями, подобными предыдущимъ:

Если въ главномъ коэффиціентѣ $\Gamma(a, b, \ldots s; 1{,}0)$ *совмѣстнаго коваріанта системы бинарныхъ формъ*

$$f(x_1, x_2),\ F(x_1, x_2),\ \varphi(x_1, x_2),\ \ldots\ \omega(x_1, x_2)$$

количества $a_i, b_i, \ldots s_i$ *замѣнить черезъ* $f_i, F_i, \ldots \omega_i$, *то получится совмѣстный коваріантъ системы неоднородныхъ формъ*

$$f(x{,}1),\ F(x{,}1),\ \varphi(x{,}1),\ \ldots\ \omega(x{,}1). \tag{75}$$

Изъ § 31 (*Замѣчаніе*) мы знаемъ, что всякій полуинваріантъ системы бинарныхъ формъ можетъ служить главнымъ коэффиціентомъ совмѣстнаго коваріанта порядка $\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p$ этой системы, если только вѣсъ p полуинваріанта удовлетворяетъ неравенству:

$$n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p > 0,$$

гдѣ $n, m, \ldots q$ суть порядки бинарныхъ формъ системы, а $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ степени полуинваріанта относительно коэффиціентовъ каждой формы.

Слѣдовательно, если въ такой полуинваріантъ $J(a, b, c, \ldots s)$ мы подставимъ вмѣсто количествъ $a_i, b_i, \ldots s_i$ соотвѣтственно количества $f_i, F_i, \ldots \omega_i$, то получится совмѣстный коваріантъ $J(f_i, F_i, \ldots \omega_i)$ системы неоднородныхъ формъ, а для того, чтобы получить совмѣстный коваріантъ данной системы бинарныхъ формъ, надо только въ полученномъ коваріантѣ $J(f_i, F_i, \ldots \omega_i)$ замѣнить x черезъ x_1 и возстановить однородность при помощи x_2.

Но очевидно, что послѣдній результатъ мы получимъ также, если въ каждой изъ функцій $f_i, F_i, \ldots \omega_i$ мы сначала замѣнимъ x черезъ x_1, возстановимъ въ нихъ однородность при помощи x_2 и затѣмъ внесемъ ихъ выраженія въ $J(f_i, F_i, \ldots \omega_i)$, при этомъ получится только *лишній множитель* x_2^p.

Функціи f_i, F_i, . . . ω_i имѣютъ выраженія

$$f_i = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-i+1)} f^{(i)}(x,1),$$

$$F_i = \frac{1}{m(m-1)\dots(m-i+1)} F^{(i)}(x,1), \tag{76}$$

. . . .

$$\omega_i = \frac{1}{q(q-1)\dots(q-i+1)} \omega^{(i)}(x,1);$$

если въ нихъ замѣнить x черезъ x_1 и возстановить однородность при помощи x_2, то мы получимъ ихъ новыя выраженія въ однородномъ видѣ:

$$f_i' = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-i+1)} \frac{\partial^i f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,i}},$$

$$F_i' = \frac{1}{m(m-1)\dots(m-i+1)} \frac{\partial^i F(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,i}}, \tag{77}$$

. . . .

$$\omega_i' = \frac{1}{q(q-1)\dots(q-i+1)} \frac{\partial^i \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,i}}.$$

Слѣдовательно, если въ полуинваріантъ $J(a, b, \dots s)$ вставить вмѣсто количествъ a_i, b_i, . . . s_i соотвѣтственно *одностороннія производныя* (*einseitige Dirivirten*) бинарныхъ формъ съ надлежащими числовыми факторами и отбросить множитель x_2^p, то получится совмѣстный коваріантъ $J(f_i', F_i', \dots \omega_i')$ данной системы бинарныхъ формъ, порядокъ котораго

$$\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p.$$

Припоминая опредѣленіе полуинваріанта, мы можемъ полученные нами результаты формулировать еще такимъ образомъ:

Цѣлая раціональная функція $J(f_0, f_1, \dots f_n, F_0, F_1, \dots F_m, \dots)$ *одностороннихъ производныхъ бинарныхъ формъ, однородная относительно* f_i, F_i, . . . *въ отдѣльности и имѣющая соотвѣтственно степени*

$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$, *есть совмѣстный коваріантъ порядка* ν *данной системы бинарныхъ формъ (умноженный на факторъ* x_2^ν*), если она изобарна съ вѣсомъ*

$$p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$$

и удовлетворяетъ уравненію съ частными производными

$$f_0 \frac{\partial J}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial J}{\partial f_2} + \ldots + n f_{n-1} \frac{\partial J}{\partial f_n} + F_0 \frac{\partial J}{\partial F_1} + 2 F_1 \frac{\partial J}{\partial F_2} + \ldots +$$
$$+ m F_{m-1} \frac{\partial J}{\partial F_m} + \ldots = 0.$$

Послѣднее уравненіе мы сокращенно обозначаемъ —

$$X_2(J) = 0.$$

Пусть полученный такимъ образомъ коваріантъ $J(f_0, f_1, \ldots f_n, F_0, F_1, \ldots)$ въ развернутомъ видѣ и въ неоднородной формѣ будетъ

$$J = c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu. \qquad (78)$$

Очевидно, что

$$1.2 \ldots k.c_{\nu-k} = \left(\frac{d^k J}{dx^k}\right)_{x=0}.$$

Принимая во вниманіе

$$\frac{df_i}{dx} = (n-i) f_{i+1},$$

и обозначая черезъ X_1 операцію

$$n f_1 \frac{\partial J}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial J}{\partial f_1} + \ldots + f_n \frac{\partial J}{\partial f_{n-1}} + m F_1 \frac{\partial J}{\partial F_0} +$$
$$+ (m-1) F_2 \frac{\partial J}{\partial F_1} + \ldots + F_m \frac{\partial J}{\partial F_{m-1}} + \ldots,$$

мы получимъ

$$1.2 \ldots k.c_{\nu-k} = [X_1^k(J)]_{x=0}$$

или

$$1.2 \ldots k.c_{\nu-k} = [X_1^k(J)]_{f_i = a_{n-i},\ F_i = b_{m-i}, \ldots};$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$c_k = \frac{(-1)^p}{1\,.\,2\ldots k\,.}\left[X_1^k(J)\right]_{f_i = a_i,\ F_i = b_i,\ldots} \tag{79}$$

— результатъ, равносильный теоремѣ Cayley (§ 31).

Примѣръ. Разсмотримъ бинарную форму третьяго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3;$$

соотвѣтственная неоднородная форма будетъ

$$f(x, 1) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = f_0;$$

кромѣ того,

$$f_1 = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2,$$

$$f_2 = a_0 x + a_1,$$

$$f_3 = a_0.$$

Выраженія a_0 и $a_0 a_2 - a_1^2$ суть полуинваріанты данной бинарной формы, слѣдовательно f_0 и $f_0 f_2 - f_1^2$ суть коваріанты неоднородной формы $f(x, 1)$. Послѣдній коваріантъ имѣетъ видъ

$$f_0 f_2 - f_1^2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x + (a_1 a_3 - a_2^2);$$

если въ немъ замѣнить x черезъ x_1 и возстановить однородность при помощи x_2, то получится извѣстный Гессевскій коваріантъ

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

бинарной формы 3-го порядка. Но онъ получится сразу, если въ полуинваріантъ $a_0 a_2 - a_1^2$ подставить одностороннія производныя (съ надлежащими числовыми факторами) данной бинарной формы:

$$f_1' = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

$$f_2' = a_0 x_1 + a_1 x_2,$$

$$f_3' = a_0$$

и отбросить множитель x_2^2.

§ 44. Сопоставленіе двухъ бинарныхъ формъ.

Мы будемъ называть *сопоставленіемъ* двухъ бинарныхъ формъ ихъ совмѣстный коваріантъ первой степени относительно коэффиціентовъ каждой формы[1]).

Не трудно опредѣлить число линейно-независимыхъ сопоставленій какого-нибудь порядка ν.

Формула (III) въ § 33 даетъ для даннаго случая

$$N_\nu = \left[(1-v)\,\Psi_{1,n}(v)\,.\,\Psi_{1,m}(v)\right]_{v^p}, \tag{80}$$

гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(n+m-\nu)$ есть вѣсъ главнаго члена и

$$\Psi_{1,n}(v) = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}, \quad \Psi_{1,m} = \frac{1-v^{m+1}}{1-v}.$$

Слѣдовательно, число линейно-независимыхъ сопоставленій порядка ν двухъ бинарныхъ формъ порядковъ n и m дается формулой

$$N_\nu = \left[(1-v^{n+1})\frac{1-v^{m+1}}{1-v}\right]_{v^p}. \tag{80'}$$

Мы имѣемъ разложеніе

$$\begin{aligned}(1-v^{n+1})\frac{1-v^{m+1}}{1-v} &= (1-v^{n+1})(1+v+v^2+\ldots+v^m)\\ &= (1+v+v^2+\ldots+v^m)-(v^{n+1}+v^{n+2}+\\ &\qquad +\ldots+v^{n+m+1});\end{aligned}$$

если $n \geqq m$, то для $p = 0, 1, 2, \ldots m$ существуетъ по одному сопоставленію; другихъ же сопоставленій не существуетъ.

Построимъ существующія сопоставленія двухъ бинарныхъ формъ:

$$f\,(x_1, x_2) = a_0\,x_1^n + \binom{n}{1} a_1\,x_1^{n-1}\,x_2 + \ldots + a_n\,x_2^n,$$

$$F(x_1, x_2) = b_0\,x_1^m + \binom{m}{1} b_1\,x_1^{m-1}\,x_2 + \ldots + b_m\,x_2^m.$$

---

[1]) Нѣмецкіе ученые употребляютъ для этихъ коваріантовъ названіе *„Ueberschiebung"*; французскіе — названіе *„composé"*.

Мы будемъ называть p-мъ сопоставленіемъ такое сопоставленіе, котораго главный коэффиціентъ имѣетъ вѣсъ p, и будемъ обозначать его символомъ $(f, F)_p$.

Для p-го сопоставленія главный коэффиціентъ будетъ имѣть видъ

$$c_0 a_0 b_p + c_1 a_1 b_{p-1} + c_2 a_2 b_{p-2} + \ldots + c_p a_p b_0,$$

при чемъ c_0, c_1, c_2, $\ldots c_p$ должны удовлетворять условію

$$X_2 \left[c_0 a_0 b_p + c_1 a_1 b_{p-1} + c_2 a_2 b_{p-2} + \ldots + c_p a_p b_0\right] \equiv 0,$$

которое имѣетъ слѣдующій развернутый видъ:

$$c_1 a_0 b_{p-1} + \quad 2c_2 a_1 b_{p-2} + \quad 3c_3 a_2 b_{p-3} + \ldots + pc_p a_{p-1} b_0$$
$$+ pc_0 a_0 b_{p-1} + (p-1) c_1 a_1 b_{p-2} + (p-2) c_3 a_2 b_{p-3} + \ldots + c_p a_{p-1} b_0 \equiv 0;$$

отсюда мы получаемъ

$$c_1 = -pc_0,$$
$$c_2 = \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} c_0 = \binom{p}{2} c_0,$$
$$c_3 = -\frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3} c_0 = -\binom{p}{3} c_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_p = (-1)^p \frac{p(p-1)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots p} c_0 = (-1)^p c_0.$$

Слѣдовательно, главный членъ p-го сопоставленія имѣетъ видъ

$$a_0 b_p - \binom{p}{1} a_1 b_{p-1} + \binom{p}{2} a_2 b_{p-2} - \ldots + (-1)^p a_p b_0.$$

Если въ этомъ выраженіи замѣнить a_i и b_i соотвѣтственно черезъ одностороннія производныя f_i и F_i, то получится искомое сопоставленіе (если не считать множителя $x_2{}^p$)

$$(f, F)_p = \left[f_0 F_p - \binom{p}{1} f_1 F_{p-1} + \binom{p}{2} f_2 F_{p-2} + \ldots + (-1)^p f_p F_0\right]; \tag{81}$$

при $n \geqq m$ индексъ p можетъ равняться 0, 1, 2 ... m. Послѣдняя формула даетъ возможность составить слѣдующую таблицу сопоставленій различныхъ порядковъ двухъ бинарныхъ формъ

		порядки
$(f,F)_0$	$f_0 F_0$	$n+m$
$(f,F)_1$	$f_0 F_1 - f_1 F_0$	$n+m-2$
$(f,F)_2$	$f_0 F_2 - 2 f_1 F_1 + f_2 F_0$	$n+m-4$
$(f,F)_3$	$f_0 F_3 - 3 f_1 F_2 + 3 f_2 F_1 - f_3 F_0$	$n+m-6$
. . .	. . . .	. . . .
. . .	. . . .	. . . .
$(f,F)_m$	$f_0 F_m - \binom{m}{1} f_1 F_{m-1} + \binom{m}{2} f_2 F_{m-2} + \dots$ $+ (-1)^m f_m F_0$	$n+m-2m$

Если $n=m$, то послѣднее сопоставленіе будетъ совмѣстнымъ инваріантомъ

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} \dots + (-1)^n a_n b_0$$

двухъ данныхъ формъ.

Примѣръ. Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

для нихъ возможны слѣдующія три сопоставленія:

$$(f, F)_0 = f_0 . F_0 = f(x_1, x_2) . F(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned}(f,F)_1 = f_0 F_1 - f_1 F_0 &= \frac{1}{x_2}\left[(a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2)(b_0 x_1 + b_1 x_2)\right. \\ &\quad \left. - (b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2)(a_0 x_1 + a_1 x_2)\right] \\ &= (a_1 b_0 - a_0 b_1) x_1^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x_1 x_2 + \\ &\quad + (a_2 b_1 - a_1 b_2) x_2^2,\end{aligned}$$

$$(f, F)_2 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

послѣднее сопоставленіе есть совмѣстный инваріантъ разсматриваемыхъ формъ.

§ 45. Дериванты; коваріантный процесъ [ ] Hilbert'a.

Мы будемъ называть *деривантомъ* цѣлую раціональную функцію

$$\mathcal{D}(f_0,\ f_1,\ \ldots f_n,\ F_0,\ F_1,\ \ldots)$$

одностороннихъ производныхъ (съ надлежащими числовыми факторами) f_0, f_1, . . . f_n, F_0, F_1, . . . бинарныхъ формъ данной системы, однородную относительно производныхъ каждой формы и изобарную относительно этихъ производныхъ. Такую функцію называютъ также *полуковаріантомъ*.

Если деривантъ $\mathcal{D}$ имѣетъ эксцессъ

$$\chi = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p,$$

то онъ удовлетворяетъ соотношенію (§§ 9, 18)

$$(X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2)\,\mathcal{D} = \nu(\chi - \nu + 1)\,X_1^{\nu-1}\mathcal{D}; \tag{82a}$$

можно вывести также соотношеніе

$$(X_2^\nu X_1 - X_1 X_2^\nu)\,\mathcal{D} = \nu(\chi + \nu - 1)\,X_2^{\nu-1}\mathcal{D}, \tag{82b}$$

если воспользоваться способомъ, аналогичнымъ способу въ § 9.

Эти соотношенія (82a) и (82b) суть частные случаи болѣе общихъ соотношеній:

$$(X_1^\mu X_2^\nu - X_2^\nu X_1^\mu)\,\mathcal{D} = \mu!\,\nu!\left\{\binom{\mu-\nu-\chi}{1}\frac{X^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{X^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right.$$
$$\left. + \binom{\mu-\nu-\chi}{2}\frac{X_2^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\,\frac{X_1^{\mu-2}}{(\mu-2)!} + \ldots\ldots\right\}\mathcal{D}, \tag{83a}$$

$$(X_2^\nu X_1^\mu - X_1^\mu X_2^\nu)\,\mathcal{D} = \mu!\,\nu!\left\{\binom{\chi+\nu-\mu}{1}\frac{X_1^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,\frac{X_2^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \right.$$
$$\left. + \binom{\chi+\nu-\mu}{2}\frac{X_1^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\,\frac{X_2^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \ldots\ldots\right\}\mathcal{D}, \tag{83b}$$

которыя можно получить изъ формулъ (82a), (82b) посредствомъ способа отъ ν, μ къ $\nu + 1$, $\mu + 1$.

Если деривантъ $\mathcal{D}$ удовлетворяетъ уравненію

$$X_2(\mathcal{D}) = 0,$$

то онъ служитъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ; въ этомъ случаѣ соотношеніе (83b) приметъ болѣе простой видъ

$$X_2^{\nu}X_1^{\mu}\phi=\mu!\,\nu!\left(\frac{\chi+\nu-\mu}{\nu}\right)\frac{X_1^{\mu-\nu}\phi}{(\mu-\nu)!};$$

или, полагая $\mu=\nu+k$, мы получимъ соотношеніе

$$X_2^{\nu}X_1^{\nu}(X_1^{k}\phi)=\frac{(k+\nu)!\,(\chi-k)!}{(\chi-k-\nu)!\,k!}X_1^{k}\phi. \tag{84}$$

Послѣднее соотношеніе показываетъ, что дериванты $X_1^{k}\phi$, гдѣ ϕ есть коваріантъ системы, измѣняются отъ операцій $X_2^{\nu}X_1^{\nu}$ только на числовые факторы.

Эксцессъ χ деривантa имѣетъ выраженіе

$$\chi=n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k-2p,$$

слѣдовательно, высшій предѣлъ его такой:

$$\chi\leqq n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k.$$

Съ другой стороны, наибольшій вѣсъ p можетъ равняться $n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k$, если взять членъ $a_n^{\mu_1}b_m^{\mu_2}\ldots s_q^{\mu_k}$, т. е.

$$\chi\geqq-(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k).$$

Такъ какъ операція X_1 понижаетъ эксцессъ дериванта ϕ на 2, а операція X_2 повышаетъ его на 2, то примѣняя къ дериванту послѣдовательно нѣсколько разъ операцію X_1 и операцію X_2, мы получимъ, наконецъ,

$$X_1^{q+1}\phi\equiv 0,\quad X_2^{r+1}\phi\equiv 0.$$

Если $r+1$-ое примѣненіе операціи X_2 къ дериванту ϕ даетъ въ результатѣ нуль, то деривантъ называется деривантомъ r-го *ранга*.

Очевидно, что деривантъ r-го ранга дастъ коваріантъ, если къ нему примѣнить r разъ операцію X_2, т. е. $\Gamma^{(r)}=X_2\phi$ есть коваріантъ, ибо

$$X_2\Gamma^{(r)}=X_2^{r+1}\phi\equiv 0;$$

но кромѣ этого коваріанта $\Gamma^{(r)}$ деривантъ $\mathfrak{f}$ даетъ еще слѣдующіе коваріанты:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(r-1)} &= X_2^{\,r-1}\mathfrak{f} - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{\,r-1} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)}, \qquad\qquad (\sigma=\chi+2r)\\
\Gamma^{(r-2)} &= X_2^{\,r-2}\mathfrak{f} - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{\,r-2} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)} -\\
&\qquad - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_2^{\,r-2} X_1^{\,r-1}\,\Gamma^{(r-1)},\\
\Gamma^{(r-3)} &= X_2^{\,r-3}\mathfrak{f} - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{\,r-3} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)} - \qquad\qquad (85)\\
&\qquad - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_2^{\,r-3} X_1^{\,r-1}\,\Gamma^{(r-1)},\\
&\qquad - \frac{(\sigma-r-2)!}{(\sigma-4)!\;(r-2)!} X_2^{\,r-3} X_1^{\,r-2}\,\Gamma^{(r-2)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Gamma^{(0)} &= \mathfrak{f} - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)} - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_1^{\,r-1}\,\Gamma^{(r-1)} - \ldots\\
&\qquad \ldots - \frac{(\sigma-2r+1)!}{(\sigma-2r+2)!\;1!} X_1\,\Gamma^{(1)};
\end{aligned}
$$

что эти выраженія суть коваріанты, не трудно обнаружить при помощи соотношенія (84), и для этого надо только показать, что они удовлетворяютъ уравненію

$$X_2(\Gamma)=0.$$

Разсмотримъ для примѣра выраженіе

$$\Gamma^{(r-1)} = X_2^{\,r-1}\mathfrak{f} - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{\,r-1} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)},$$

гдѣ $\sigma=\chi+2r$; тогда мы имѣемъ

$$X_2\,\Gamma^{(r-1)} = X_2^{\,r}\mathfrak{f} - \frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\;r!} X_2^{\,r} X_1^{\,r}\,\Gamma^{(r)},$$

гдѣ $\Gamma^{(r)} = X_2^{\,r} \varphi$ есть коваріантъ; на основаніи соотношенія (84) мы будемъ имѣть для коваріанта $\Gamma^{(r)}$ слѣдующее соотношеніе:

$$X_2^{\,r-1} X_1^{\,r-1} (X_1 \Gamma^{(r)}) = \frac{r\,!\,(\chi + 2r - 1)\,!}{(\chi + r)\,!\,1\,!} X_1 (\Gamma^{(r)});$$

вслѣдствіе этого соотношеніе мы будемъ имѣть

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = X_2^{\,r} \varphi - \frac{1}{\chi + 2r} X_2 X_1 X_2^{\,r} \varphi,$$

но на основаніи соотношенія (82a), полагая въ немъ $\nu = 1$, мы имѣемъ

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2)(X_2^{\,r} \varphi) = (\chi + 2r)(X_2^{\,r} \varphi),$$

гдѣ $\chi + 2r$ есть эксцессъ дериванта $X_2^{\,r} \varphi$; слѣдовательно,

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = X_2^{\,r} \varphi - \frac{1}{\chi + 2r} \{X_1 X_2^{\,r+1} \varphi + (\chi + 2r) X_2^{\,r} \varphi\};$$

но во второй части $X_1 X_2^{\,r+1} \varphi \equiv 0$, потому что $X_2^{\,r+1} \varphi \equiv 0$, а остальные два члена взаимно сокращаются; слѣдовательно, мы убѣждаемся въ томъ, что существуетъ тождество

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = 0,$$

показывающее, что $\Gamma^{(r-1)}$ есть коваріантъ.

Вышеприведенные коваріанты, полученные изъ дериванта φ r-го ранга, можно представить въ слѣдующемъ видѣ, если въ ихъ выраженіяхъ послѣдовательно замѣнить $\Gamma^{(r)}$, $\Gamma^{(r-1)}$, ... изъ предудыщихъ равенствъ:

$$\Gamma^{(r)} = X_2^{\,r} \varphi,$$

$$\Gamma^{(r-1)} = \left\{ X_2^{\,r-1} - \frac{1}{\sigma} X_1 X_2^{\,r} \right\} \varphi, \tag{86}$$

$$\Gamma^{(r-2)} = \left\{ X_2^{\,r-2} - \frac{1}{(\sigma - 2)\,.\,1\,!} X_1 X_2^{\,r-1} + \frac{1}{(\sigma - 2)(\sigma - 1)\,.\,2\,!} X_1^2 X_2^{\,r} \right\} \varphi,$$

. . . .

$$\Gamma^{(0)} = \left\{ 1 - \frac{1}{(\sigma - 2\nu + 2)\,.\,1\,!} X_1 X_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\sigma - 2r + 2)(\sigma - 2r + 3)\,.\,2\,!} X_1^2 X_2^2 - \ldots \right\} \varphi.$$

Обозначимъ сокращенно операцію

$$\left\{\frac{1}{(\chi+1)!}-\frac{X_1 X_2}{1!(\chi+2)!}+\frac{X_1{}^2 X_2{}^2}{2!(\chi+3)!}-\ldots\right\}$$

символомъ $[\ ]$; тогда наша система коваріантовъ можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(0)} &= (\chi+1)!\,[\ \varphi],\\
\Gamma^{(1)} &= (\chi+3)!\,[X_2\varphi],\\
\Gamma^{(2)} &= (\chi+5)!\,[X_2^2\varphi],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma^{(\nu)} &= (\chi+2r+1)!\,[X_2{}^\nu\varphi].
\end{aligned}\tag{86'}$$

Если $\chi=0$, то $\Gamma^{(0)}$ будетъ, очевидно, инваріантъ, что намъ извѣстно изъ § 42.

§ 46. Построеніе линейно-независимыхъ коваріантовъ. Сопоставленіе какъ частный случай операціи $[\ ]$.

Разсмотримъ систему формъ

$$f,\ F,\ \ldots$$

и составимъ всевозможные дериванты φ степеней μ_1, μ_2, ... и вѣса p въ ихъ простѣйшемъ видѣ:

$$f_0^{e_0} f_1^{e_1} f_2^{e_2}\ldots f_n^{e_n}\, F_0^{l_0} F_1^{l_1} F_2^{l_2}\ldots F_m^{l_m}\ldots;$$

пусть ихъ число будетъ Ψ_p. Пусть Ψ_{p-1} обозначаетъ число дериванговъ φ' тѣхъ же степеней и такого же вида какъ и дериванты φ, но только съ вѣсомъ $p-1$.

Изъ послѣдняго равенства (85) предыдущаго параграфа мы имѣемъ

$$\varphi=\Gamma_0+\frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!}X_1\Gamma^{(1)}+\frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,4!}X_1^2\Gamma^{(2)}+\ldots\tag{87}$$

$$\ldots+\frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\,r!}X_1{}^r\,\Gamma^{(r)},$$

т. е. *всякій деривантъ ранга* r *можно представить какъ линейное сочетаніе* $r+1$ *выраженій*

$$\Gamma_0,\ X_1\Gamma^{(1)},\ X_1^2\Gamma^{(2)},\ .\ .\ .\ X_2\Gamma^{(\nu)},$$

гдѣ Γ_0, $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, . . . $\Gamma^{(\nu)}$ *суть коваріанты данной системы.*

Изъ этого выраженія дериванта φ, мы получаемъ

$$X_1 X_2 \varphi = 0 + \frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!} X_1 X_2 X_1 \Gamma^{(1)} +$$
$$+ \frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,2!} X_1 X_2 X_1^2 \Gamma^{(2)} + \ldots + \frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\,r!} X_1 X_2 X_1 \Gamma^{r},$$

гдѣ первый членъ $X_1 X_2 \Gamma^{(0)}$ равенъ нулю, потому что $\Gamma^{(0)}$ коваріантъ и, слѣдовательно, $X_2\Gamma^{(0)} \equiv 0$.

На основаніи соотношенія (84) предыдущаго параграфа, мы получимъ формулу

$$X_1 X_2 \varphi = \frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!} (\chi+2) X_1 \Gamma^{(1)} +$$
$$+ \frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,2!}\, 2\,(\chi+3) X_1^2 \Gamma^{(2)} + \ldots,$$

а примѣняя символъ [ ], получимъ соотношеніе

$$[X_1 X_2 \varphi] = 0, \tag{88}$$

потому что

$$[X_1\Gamma^{(1)}] \equiv 0,\quad [X_1^2\Gamma^{(2)}] \equiv 0,\ \ldots.,$$

въ чемъ не трудно убѣдиться провѣркой, если имѣть въ виду соотношеніе (84) предыдущаго параграфа.

Такъ какъ $X_2\,\varphi$ есть деривантъ типа φ', то мы имѣемъ

$$X_2 \varphi = \Sigma\, \varphi';$$

подставивъ это выраженіе $X_2\varphi$ въ уравненіе (88), мы получимъ соотношеніе

$$[\Sigma\, X_1 \varphi'] = 0 \ \text{ или } \ \Sigma\,[X_1 \varphi'] = 0; \tag{89}$$

такихъ соотношеній между Ψ_{p-1} выраженіями $[X_1\varphi']$ мы можемъ получить Ψ_p; въ случаѣ $\Psi_p \geqq \Psi_{p-1}$ мы имѣемъ Ψ_{p-1} равенствъ

$$[X_1 \varphi'] = 0, \tag{90}$$

которыя даютъ Ψ_{p-1} линейныхъ соотношенiй

$$\Sigma[\varphi]=0,$$

если положить, $X_1\varphi'=\Sigma\varphi$, между Ψ_p ковapiантами $[\varphi]$ данной системы; слѣдовательно, существуетъ $\Psi_p-\Psi_{p-1}$ линейно-независимыхъ ковapiантовъ данныхъ степеней $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots \mu_k$ и порядка

$$\nu=n\mu_1+m\mu_2++\ \ldots+q\mu_k-2p.$$

Такимъ образомъ мы можемъ построить всѣ линейно-независимые ковapiанты, пользуясь операцiей [ ].

Приложимъ этотъ способъ къ наиболѣе простому случаю: построимъ ковapiанты двухъ бинарныхъ формъ f и F, линейные относительно коэффицiентовъ каждой формы, т. е. сопоставленiя этихъ двухъ формъ.

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ

$$\varphi=f_0F_p,\quad f_1F_{p-1},\ f_2F_{p-2},\ \ldots\ f_pF_0,$$
$$\varphi'=f_0F_{p-1}, f_1F_{p-2},\ f_2F_{p-3},\ \ldots\ f_{p-1}F_0;$$

слѣдовательно $\Psi_p=p,\ \Psi_{p-1}=p-1.$

Между p ковapiантами

$$[\varphi]=[f_0F_p],\ [f_1F_{p-1}],\ [f_2F_{p-2}]\ \ldots\ [f_pF_0]$$

на основанiи вышеизложеннаго должны существовать p—1 линейныхъ соотношенiй (90):

$$\begin{aligned}\mu\,[f_1F_{p-1}]+(\mu_1-p+1)\ [f_0F_p]\ &=0,\\ (\mu-1)\ [f_2F_{p-2}]+(\mu_1-p+2)\ [f_1F_{p-1}]&=0,\qquad (91)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ (\mu-p+1\ [f_pF_0]\ +\qquad\qquad \mu_1[f_{p-1}F_1]&=0;\end{aligned}$$

Слѣдовательно, существуетъ только одинъ ковapiантъ двухъ бинарныхъ формъ, линейный относительно коэффицiентовъ каждой формы и порядка $\nu = n + m - 2p$; его можно получить приложивъ операцію [ ] къ $f_0 F_p$:

$$[f_0 F_p] = f_0 F_p - \left(\frac{p}{1}\right) f_1 F_{p-1} + \left(\frac{p}{2}\right) f_2 F_{p-2} - \ldots + (-1)^p f_p F_0$$

$$= (f, F)_p, \tag{92}$$

Такимъ образомъ операція [ ] въ разсматриваемомъ случаѣ приводится къ операціи сопоставленія двухъ формъ. Слѣдовательно, операція [ ] есть въ нѣкоторомъ родѣ обобщеніе операціи сопоставленія.

§ 47. Полярный процесъ Aronhold'a.

Полярнымъ процесомъ называется слѣдующая операція:

$$D_{a,b} = b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}. \tag{93}$$

Разсмотримъ функцію

$$f = f(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_n)$$

и замѣнимъ въ ней a_i черезъ $a_i + \lambda b_i$; тогда получится функція

$$F = f(a_0 + \lambda b_0,\ a_1 + \lambda b_1,\ \ldots\ a_n + \lambda b_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_n),$$

которую можно представить въ видѣ

$$F = C_0 + \lambda C_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} C_2 + \ldots + \frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu} C_\nu + \ldots;$$

при чемъ, конечно, $C_0 = f(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_n)$.

Приложимъ полярный процесъ $D_{a,b}$ къ функціи F; тогда получимъ изъ послѣдняго равенства

$$D_{a,b} F = D_{a,b} C_0 + \lambda D_{a,b} C_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} D_{a,b} C_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu} D_{a,b} C_\nu + \ldots;$$

но съ другой стороны

$$D_{a,b}F = b_0\frac{\partial F}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots + b_n\frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{dF}{d\lambda},$$

т. е.

$$D_{a,b}F = C_1 + \lambda C_2 + \ldots + \frac{\lambda^{\nu-1}}{1\,.\,2\ldots(\nu-1)}C_\nu + \ldots;$$

слѣдовательно, сравнивая два выраженія для $D_{a,b}\,F$, мы получимъ

$$C_1 = D_{a,b}\,C_0 = D_{\,a,b}\,f$$

$$C_2 = D_{a,b}\,C_1 = D^2{}_{a,b}\,f$$

$$C_3 = D_{a,b}\,C_2 = D^3{}_{a,b}\,f$$

. . . .

Такимъ образомъ, мы можемъ написать

$$f(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, \ldots a_n + \lambda b_n, b_0, b_1, \ldots b_n) = \tag{94}$$

$$= f + \lambda D_{a,b}f + \frac{\lambda^2}{2.1}D_{a,b}{}^2 f + \ldots + \frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu}D_{a,b}{}^\nu f \ldots$$

Функціи $D_{a,b}f, D_{a,b}{}^2 f, \ldots D_{a,b}{}^\nu f$ называются *полярами* функціи f, при чемъ $D_{a,b}{}^\nu\, f$ называется ν-тою полярою функціи f.

Операція $D_{a,b}{}^\nu$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$D_{a,b}{}^\nu = \left(b_0\frac{\partial}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + b_n\frac{\partial}{\partial a_n}\right)^\nu$$

$$= \sum \frac{\nu!}{k_0!\;k_1!\;k_2!\ldots k_n!}\,b_0{}^{k_0}\,b_1{}^{k_1}\,b^{k_2}\ldots b_n{}^{k_n}\,\frac{\partial^\nu}{\partial a_0{}^{k_0}\,\partial a_1{}^{k_1}\,\partial a_2{}^{k_2}\ldots\partial a_n{}^{k_n}},$$

гдѣ $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots k_n = \nu$.

Разсмотримъ цѣлую раціональную и однородную функцію степени μ

$$f(a) = f(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n);$$

тогда на основаніи вышеизложеннаго мы будемъ имѣть

$$f(a_0+\lambda b_0,\ a_1+\lambda b_1,\ \ldots\ a_n+\lambda b_n)=$$
$$=f(a)+\lambda D_{a,b}f(a)+\frac{\lambda^2}{2!}D^2_{a,b}f(a)+\ldots+\frac{\lambda^\mu}{\mu!}D^\mu_{a,b}f(a);$$

если въ этомъ равенствѣ замѣнить λ черезъ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, то получится равенство

$$\begin{aligned}&f(\lambda_1 a_0+\lambda_2 b_0,\ \lambda_1 a_1+\lambda_2 b_1,\ \ldots\ \lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n)=\\&=\lambda_1^\mu f(a)+\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2 D_{a,b}f(a)+\frac{\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2}{2!}D^2_{a,b}f(a)+\ldots+\frac{\lambda_2^\mu}{\mu!}D^\mu_{a,b}f(a);\end{aligned}\tag{95}$$

переставивъ въ этомъ равенствѣ λ_1 съ λ_2 и a_i съ b_i, мы получимъ

$$\begin{aligned}&f(\lambda_2 b_0+\lambda_1 a_1,\ \lambda_2 b_1+\lambda_1 a_1,\ \ldots+\lambda_2 b_n+\lambda_1 a_n)=\\&=\lambda_2^\mu f(b)+\lambda_2^{\mu-1}\lambda_1 D_{b,a}f(b)+\frac{\lambda_2^{\mu-2}\lambda_1^2}{2!}D^2_{b,a}f(b)+\ldots+\frac{\lambda_1^\mu}{\mu!}D^\mu_{b,a}f(b);\end{aligned}\tag{95'}$$

сопоставивъ это равенство съ предыдущимъ, мы получаемъ сравненіемъ коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ λ_1 и λ_2 слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu!}D^\mu_{a,b}\,f(a)=f(b),\\&\frac{1}{(\mu-1)!}D^{\mu-1}_{a,b}f(a)=D_{b,a}f(a)\\&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\&\frac{1}{(\mu-k)!}D^{\mu-k}_{a,b}f(a)=\frac{1}{k!}D^k_{b,a}f(b),\\&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\tag{96}$$

Если въ соотношеніи (96) положить $b_0=a_0$, $b_1=a_1$, ... $b_n=a_n$, то получится равенство

$$(\lambda_1+\lambda_2)^\mu f(a_0,a_1,\ldots a_n)=\lambda_1^\mu f(a)+\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2[D_{a,b}f(a)]_{b=a}+$$
$$+\frac{\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2}{2!}[D^2_{a,b}f(a)]_{b=a}+\ldots+\frac{\lambda_2^\mu}{\mu!}[D^\mu_{a,b}f(a)]_{b=a};$$

но съ другой стороны, развернувъ въ первой части $(\lambda_1+\lambda_2)^\mu$ по формулѣ бинома Ньютона, мы получимъ

$$(\lambda_1+\lambda_2)^\mu f(a_0,\, a_1,\, \ldots\, a_n)=\lambda_1^\mu f(a)+\binom{\mu}{1}\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2 f(a)+$$

$$+\binom{\mu}{2}\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2 f(a)+\ldots+\lambda_2^\mu f(a)\,;$$

сравнивая коэффиціенты въ правыхъ частяхъ этихъ двухъ равенствъ при одинаковыхъ степеняхъ λ_1 и λ_2, мы получимъ слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}
&[D_{a,b}f(a)]_{b=a}=\mu f(a),\\
&[D^2_{a,b}f(a)]_{b=a}=\mu(\mu-1)f(a),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (96'\\
&[D^k_{a,b}f(a)]_{b=a}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)f(a),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Разсмотримъ бинарную форму $f(x_1,\, x_2)$ n-го порядка.

На основаніи вышеизложеннаго мы можемъ написать

$$f(x_1+\lambda y_1,\; x_2+\lambda y_2)=f(x)+\lambda D_{x,y}f(x)+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2\,!}D_{x,y}{}^2 f(x)+\ldots+\frac{\lambda^n}{n\,!}D_{x,y}{}^n f(x), \qquad (97)$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
&D_{x,y}f(x)=y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2},\\
&D^2_{x,y}f(x)=y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}+2y_1y_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}+y_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}=\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (98)\\
&D_{x,y}{}^n f(x)=y_1{}^n\frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^n}+\binom{n}{1}y_1{}^{n-1}y_2\frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^{n-1}\partial x_2}+\ldots+y_2{}^n\frac{\partial^n f}{\partial x_2{}^n}=\\
&\qquad\qquad=\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^n f
\end{aligned}$$

§ 48. Полярный процесъ Aronhold'a какъ инваріантный процесъ.

Полярнымъ процесомъ можно воспользоваться для построенія новыхъ инваріантовъ или коваріантовъ системы бинарныхъ формъ, если извѣстны нѣкоторые инваріанты или коваріанты этой системы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ коваріантъ $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ системы бинарныхъ формъ n-го порядка:

$$f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2),\ \ldots f_k(x_1, x_2);$$

не трудно доказать слѣдующее предложеніе:

Если надъ коваріантомъ $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ *системы бинарныхъ формъ совершить процесъ* $D_{a,b}$, *то въ результатѣ получится снова коваріантъ этой же системы.*

Для доказательства этого предложенія достаточно только показать, что $D_{a,b}\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ совсѣмъ не измѣняется, когда перемѣнныя бинарныхъ формъ подвергаются какой-нибудь унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, такъ какъ процесъ $D_{a,b}$, конечно, не нарушаетъ однородности функціи $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$. Но при унимодулярномъ преобразованіи перемѣнныхъ мы будемъ имѣть соотношенія:

$$f_1(x_1, x_2) = \varphi_1(y_1, y_2),\ f_2(x_1, x_2) = \varphi_2(y_1, y_2), \ldots\ldots$$

$$\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2) = \Gamma(\alpha, \beta, \ldots \sigma; y_1, y_2);$$

умноживъ обѣ части втораго соотношенія на λ и сложивъ его почленно съ первымъ, мы получимъ

$$(a_0 + \lambda b_0)x_1^n + \binom{n}{1}(a_1 + \lambda b_1)x_1^{n-1}x_2 + \ldots + (a_n + \lambda b_n)x_2^n =$$

$$= (\alpha_0 + \lambda\beta_0)y_1^n + \binom{n}{1}(\alpha_1 + \lambda\beta_1)y_1^{n-1}y_2 + \ldots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)y_2^n;$$

слѣдовательно, мы можемъ написать

$$\Gamma(a + \lambda b, b, \ldots s; x_1, x_2) = \Gamma(\alpha + \lambda\beta, \beta, \ldots \sigma; x_1, x_2);$$

если развернуть обѣ части этого равенства, то мы получимъ: для лѣвой —

$$\Gamma(a, b, \ldots) + \lambda D_{a,b} \Gamma(a, b, \ldots) + \frac{\lambda^2}{2!} D^2{}_{a,b} \Gamma(a, b, \ldots) + \ldots,$$

и для правой —

$$\Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \lambda D_{\alpha,\beta} \Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \frac{\lambda^2}{2!} D^2{}_{\alpha,\beta} \Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \ldots;$$

сравнивая коэффиціенты при первой степени λ въ этихъ выраженіяхъ, мы получимъ равенство

$$D_{a,b} \Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2) = D_{\alpha,\beta} \Gamma(\alpha, \beta, \ldots \sigma; y_1, y_2), \qquad (99)$$

доказывающее справедливость нашего предложенія.

Примѣръ 1. Выраженіе $a_0 a_2 - a_1^2$ служитъ инваріантомъ двухъ бинарныхъ формъ втораго порядка

$$f_1(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

примѣнивъ къ нему процесъ $D_{a,b}$, мы получимъ новый инваріантъ этихъ двухъ формъ:

$$D_{a,b}(a_0 a_2 - a_1^2) = b_0 a_2 + b_1(-2a_1) + b_2 a_0 =$$

$$= b_0 a_2 - 2b_1 a_1 \quad + b_2 a_0,$$

который есть ничто другое какъ второе сопоставленіе $(f_1, f_2)_2$ двухъ данныхъ формъ.

Мы знаемъ, что коваріантъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ съ перемѣнными ξ_1, ξ_2 есть совмѣстный инваріантъ двухъ формъ

$$f(\xi_1, \xi_2) \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Сама бинарная форма есть коваріантъ для ней самой; слѣдовательно, $f(\xi_1, \xi_2)$ служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ системы трехъ бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2), \; \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2, \; \eta_2 x_1 - \eta_1 x_2;$$

а отсюда мы заключаемъ, что поляры формы $f(\xi_1, \xi_2)$

$$D_{\xi,\eta} f(\xi_1, \xi_2), \; D^2{}_{\xi,\eta} f(\xi_1, \xi_2), \ldots$$

суть инваріанты указанной системы трехъ бинарныхъ формъ. Слѣдовательно, поляры формы $f(\xi_1, \xi_2)$ съ перемѣнными x_1, x_2

$$D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2),\ D^2{}_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2),\ \dots,$$

гдѣ

$$D^k{}_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2) = x_1^k \frac{\partial f}{\partial \xi_1{}^k} + \binom{n}{1} x_1^{k-1} x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1{}^{k-1} \partial \xi_2} + \dots + x_2^k \frac{\partial f}{\partial \xi_2{}^k}$$

суть совмѣстные коваріанты двухъ бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2) \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Примѣръ 2. Разсмотримъ бинарную форму

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

поляры формы $f(\xi_1, \xi_2) = a_0 \xi_1^2 + 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2$:

$$\frac{1}{2} D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2) = x_1 (a_0 \xi_1 + a_1 \xi_2) + x_2 (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2) =$$
$$= a_0 \xi_1 x_1 + a_1 (\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1) + a_2 \xi_2 x_2,$$
$$\frac{1}{2} D_{\xi,x}{}^2 f(\xi_1, \xi_2) = x_1^2 . a_0 + 2x_1 x_2 . a_1 + x_2^2 . a_2 =$$
$$= a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

суть совмѣстные коваріанты двухъ бинарныхъ формъ

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2,$$

при чемъ коваріантъ $\frac{1}{2} D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2)$ есть ничто другое какъ первое сопоставленіе $(f, f_1)_1$ двухъ данныхъ формъ.

Если мы разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n,$$

$$F(x_1, x_2) = (\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)^n = \xi_2^n x_1^n - \binom{n}{1} \xi_2^{n-1} \xi_1 x_1^{n-1} x_2 +$$
$$+ \dots + (-1)^n \xi_1^n x_2^n,$$

то на основаніи вышеизложеннаго въ этомъ параграфѣ мы можемъ сказать, что выраженіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0}\xi_2^n - \frac{\partial J}{\partial a_1}\xi_2^{n-1}\xi_1 + \ldots + (-1)^n \frac{\partial J}{\partial a_n}\xi_1^n,$$

гдѣ J обозначаетъ инваріантъ формы $f(x_1, x_2)$, есть совмѣстный инваріантъ формы $f(x_1, x_2)$ и формы $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$; слѣдовательно, если въ этомъ выраженіи ξ_1, ξ_2 замѣнить черезъ x_1, x_2, то получится коваріантъ формы $f(x_1, x_2)$, т. е. *операція*

$$\frac{\partial}{\partial a_0} x_2^n - \frac{\partial}{\partial a_1} x_2^{n-1} x_1 + \ldots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial a_n} x_1^n, \tag{100}$$

примѣненная къ какому-нибудь инваріанту бинарной формы $f(x_1, x_2)$, обращаетъ послѣдній въ коваріантъ этой формы. Получаемый такимъ образомъ коваріантъ Cayley назвалъ *эвектантомъ* бинарной формы. Этой операціей Cayley воспользовался для приведенія бинарной формы къ каноническому виду [1]).

Примѣръ 3. Если къ инваріанту $J = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$ бинарной формы 3-го порядка примѣнить разсматриваемую нами операцію, то получится ея эвектантъ:

$$(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2)x_1^2 x_2 -$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2)x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3)x_2^2.$$

§ 49. Замѣна нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ данной системы коваріантами остальныхъ формъ системы.

При построеніи инваріантовъ и коваріантовъ бинарныхъ формъ можно пользоваться слѣдующимъ способомъ.

Пусть мы имѣемъ систему бинарныхъ формъ

$$f_1, f_2, \ldots f_k, F_1, F_2, \ldots F_r,$$

---

[1]) Faa di Bruno. *Einleitung in die Theorie der binären Formen*, S. 173. Leipzig. 1881.

и пусть цѣлая раціональная функція $J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots)$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ; тогда эта функція J должна удовлетворять соотношенію

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma, \pi', \pi'', \ldots) = J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots) \tag{101}$$

для всякой унимодулярной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$. Замѣнимъ формы $F_1, F_2, \ldots F_r$ совмѣстными коваріантами остальныхъ формъ $f_1, f_2, \ldots f_k$ данной системы, тогда инваріантъ $J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots)$ обратится въ функцію $J_1(a, b, \ldots s)$, конечно — цѣлую, раціональную и однородную относительно коэффиціентовъ каждой формы остаточной системы

$$f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Такъ какъ при унимодулярной подстановкѣ мы имѣемъ равенства

$$f_1(x_1, x_2) = \varphi_1(y_1, y_2),\ f_2(x_1, x_2) = \varphi_2(y_1, y_2), \ldots f_k(x_1, x_2) = \varphi_k(y_1 y_2),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ суть преобразованныя формы, и какъ слѣдствія для коваріантовъ этой остаточной системы — равенства

$$F_1(x_1, x_2) = \Phi_1(y_1, y_2), F_2(x_1, x_2) = \Phi_2(y_1, y_2), \ldots F(x_1, x_2) = \Phi_2(y_1 y_2),$$

то будетъ имѣть мѣсто равенство

$$J_1(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = J_1(a, b, \ldots s),$$

которое показываетъ, что функція $J_1(a, b, \ldots s)$ служитъ инваріантомъ остаточной системы

$$f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Полученный нами результатъ можно формулировать въ слѣдующее предложеніе:

Если въ системѣ бинарныхъ формъ замѣнить часть формъ совмѣстными коваріантами остальныхъ, то прежніе инваріанты обратятся въ инваріанты остаточной системы.

Изъ этого предложенія, какъ слѣдствіе, вытекаетъ другое предложеніе:

Если въ системѣ бинарныхъ формъ замѣнить часть формъ совмѣстными коваріантами остальныхъ, то прежніе коваріанты обратятся въ коваріанты остаточной системы.

Примѣръ 1. Двѣ бинарныхъ формы 2-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

имѣютъ инваріантъ

$$(f, F)_2 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

замѣнивъ F черезъ f, мы получимъ инваріантъ

$$a_0 a_2 - 2a_1 a_1 + a_2 a_0 = 2(a_0 a_2 - a_2^2)$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

Примѣръ 2. Двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

имѣютъ коваріантъ

$$(f, F)_1 = f_0 F_1 - f_1 F_0 = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^3 + \ldots;$$

если $F(x_1, x_2)$ замѣнить черезъ Гессевскій коваріантъ

$$2(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + 2(a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то получится коваріантъ

$$\Gamma_{3,3} = [a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2) - 2a_1(a_0 a_2 - a_1^2)] x_1^3 + \ldots$$
$$= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + \ldots$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

Зная главный членъ этого коваріанта, не трудно составить его выраженіе черезъ одностороннія производныя формы $f(x_1, x_2)$:

$$\Gamma_{3,3} = f_0^2 f_3 - 3f_0 f_1 f_2 + 2f_1^3.$$

Примѣръ 3. Бинарная форма 3-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

имѣетъ Гессевскій коваріантъ

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2;$$

этотъ же коваріантъ имѣетъ инваріантъ

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2),$$

который служитъ, конечно, инваріантомъ данной формы $f(x_1, x_2)$ третьяго порядка.

§ 50. Детерминантъ системы бинарныхъ формъ какъ совмѣстный инваріантъ.

Разсмотримъ систему $n + 1$ бинарныхъ формъ n-го порядка

$$f\,(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$f_1(x_1, x_2) = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + b_n x_2^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1, x_2) = s_0 x_1^n + \binom{n}{1} s_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + s_n x_2^n.$$

Обозначимъ детерминантъ изъ коэффиціентовъ этихъ формъ черезъ D, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{vmatrix}. \tag{102}$$

Равенство нулю этого детерминанту показываетъ, что между данными формами существуетъ линейная зависимость

$$c_0 f + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n \equiv 0.$$

Не трудно показать, что детерминантъ D есть совмѣстный коваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.

Детерминантъ D есть однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы многочленъ.

Кромѣ того, каждый членъ детерминантъ D имѣетъ вѣсъ

$$0+1+2+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2},$$

слѣдовательно D есть изобарный многочленъ съ вѣсомъ $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

Наконецъ, детерминантъ D удовлетворяетъ уравненію въ частныхъ производныхъ

$$X_2\,(J)=0\,;$$

и дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\begin{aligned}X_2(D)=&\,a_0\frac{\partial D}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial D}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial D}{\partial a_n}\\&+b_0\frac{\partial D}{\partial b_1}+2b_1\frac{\partial D}{\partial b_2}+\ldots+nb_{n-1}\frac{\partial D}{\partial b_n}\\&+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\&+s_0\frac{\partial D}{\partial s_1}+2s_1\frac{\partial D}{\partial s_2}+\ldots+ns_{n-1}\frac{\partial D}{\partial s_n},\end{aligned}$$

или, обозначивъ субдетерминанты черезъ A_0, A_1, . . . B_0, B_1, . . ., мы получимъ выраженіе

$$\begin{aligned}X_2\,(D)=&\,a_0\,A_1+2a_1A_2+\ldots+na_{n-1}\,A_n\\&+b_0\,B_1+2b_1\,B_2+\ldots+nb_{n-1}\,B_n\\&+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\qquad\qquad(103)\\&+s_0\,S_1+2s_1\,S_2+\ldots+ns_{n-1}\,S_n,\end{aligned}$$

въ которомъ вертикальные столбцы суть нули, слѣдовательно $X_2\,(D)\equiv 0$.

Такимъ образомъ, детерминантъ D удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ инваріанта, потому что его эксцессъ

$$\chi = n\mu_0 + n\mu_1 + \ldots + n\mu_n - 2p =$$
$$= n.1 + n.1 + \ldots + n.1 - 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

равенъ нулю.

Примѣръ 1. Двѣ бинарныхъ формъ 1-го порядка

$$a_0 x_1 + a_1 x_2,$$
$$b_0 x_1 + b_1 x_2,$$

имѣютъ совмѣстный инваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Примѣръ 2. Три бинарныхъ формы 2-го порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2,$$
$$c_0 x_1^2 + 2c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$$

имѣютъ совмѣстный инваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Разсмотримъ систему $k+2$-хъ бинарныхъ формъ

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots f_k,\ \xi = \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Изъ § 47 слѣдуетъ, что поляры

$$D_{\xi,x}\ f(\xi_1, \xi_2),\ D_{\xi,x}\ f_1(\xi_1 \xi_2),\ \ldots D_{\xi,x}\ f_k(\xi_1 \xi_2),$$
$$D^2{}_{\xi,x}\ f(\xi_1, \xi_2),\ D^2{}_{\xi,x}\ f_1(\xi_1 \xi_2),\ \ldots D^2{}_{\xi,x}\ f_k(\xi_2 \xi_2),$$

. . . .

суть совмѣстные коваріанты данной системы $k+2$-хъ формъ.

Предположивъ, что порядки формъ f, f_1, f_2, $\ldots f_k$ не ниже k, мы будемъ въ состояніи построить k-ыя поляры

$$D^k{}_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2),\ D^k{}_{\xi,x} f_1(\xi_1, \xi_2),\ \ldots\ D^k{}_{\xi,x} f_k(\xi_1 \xi_2),$$

служащія коваріантами k-го порядка данной системы бинарныхъ формъ. Детерминантъ изъ коэффиціентовъ этихъ коваріантовъ имѣетъ видъ

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_1{}^k} & \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_1{}^{k-1} \partial \xi_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_2{}^k} \\ \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_1{}^k} & \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_1{}^{k-1} \partial \xi_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_2{}^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_1{}^k} & \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_1{}^{k-1} \partial \xi_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_2{}^k} \end{vmatrix} \qquad (104)$$

и, конечно, служитъ инваріантомъ какъ системы формъ

$$D^k{}_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2),\ D^k{}_{\xi,x} f_1(\xi_1, \xi_2),\ \ldots\ D^k{}_{\xi,x} f_k(\xi_1, \xi_2),$$

такъ и данной системы бинарныхъ формъ (§ 48), а слѣдовательно это выраженіе D, если въ немъ написать вмѣсто ξ_1, ξ_2 перемѣнныя x_1, x_2, будетъ служить коваріантомъ системы $k+1$ бинарныхъ формъ

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots f_k.$$

Примѣръ 3. Разсмотримъ систему двухъ бинарныхъ формъ

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,\ f_1 = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

для нихъ на основаніи предыдущаго мы будемъ имѣть коваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2, & a_2 x_1 + a_2 x_2 \\ b_0 x_1 + b_1 x_2, & b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2,$$

который есть ничто другое какъ первое сопоставленіе $(f, f_1)_1$ двухъ данныхъ формъ (§ 44).

§ 51. Дифференціальный процесъ Boole'я.

Пусть мы имѣемъ двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) \text{ и } F(x_1, x_2),$$

которыя посредствомъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ съ модулемъ $\varDelta$ переходятъ въ формы

$$\varphi(y_1, y_2) \text{ и } \varPhi(y_1, y_2).$$

Не трудно показать, что имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\varPhi(y_1, y_2) = \varDelta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F(x_1, x_2), \tag{105}$$

т. е. что процесъ

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

будучи примѣненъ къ формѣ $F(x_1, x_2)$, даетъ совмѣстный коваріантъ двухъ данныхъ формъ f и F.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ подстановку

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2;$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\alpha + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\gamma,\\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\beta + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\delta;\end{aligned} \tag{106}$$

отсюда мы имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{\varDelta}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial y_2} + \beta\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\}\\ -\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{\varDelta}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial y_2} + \delta\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\}\end{aligned} \tag{106'}$$

т. е. операціи $\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}$ переходятъ въ операціи $\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial}{\partial y_1}$ посредствомъ той же линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, посредствомъ которой x_1, x_2 переходятъ въ y_1, y_2. Точно также можно показать, что операціи $\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}$, $-\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}$ переходятъ въ $\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^{\,2}}$, $-\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_1\,\partial y_2}$, $\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^{\,2}}$ какъ x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 переходятъ въ y_1^2, $y_1 y_2$, y_2^2, и т. д. Слѣдовательно, мы имѣемъ полное право написать равенство

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=\varphi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$$

или

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right)=\Delta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

гдѣ всякую операцію $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k$ надо считать какъ операцію $\frac{\partial^{i+k}}{\partial x_1^{\,i}\,\partial x_2^{\,k}}$. Примѣнивъ эти операціи къ равенству

$$\Phi(y_1,\ y_2)=F(x_1,\ x_2)$$

мы получимъ равенство

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\Phi(y_1, y_2)=\Delta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F(x_1,\ x_2),$$

справедливость котораго желали доказать и которое впервые было получено Boole'емъ[1]).

Если примѣнить процесъ $f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ къ коваріанту $\Gamma(x_1,\ x_2)$ бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$, то получится, конечно, новый коваріантъ этой же формы. Точно также примѣняя процесъ $\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ къ какому-нибудь другому коваріанту $\Gamma_1(x_1,\ x_2)$ мы получимъ новый коваріантъ данной бинарной формы. Такимъ образомъ посредствомъ процеса Boole'я можно получить изъ одного коваріанта цѣлый рядъ новыхъ коваріантовъ.

---

1) Boole. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. 6. 1851.

Конечно, и въ случаѣ системы бинарныхъ формъ можно пользоваться этимъ замѣчательнымъ процесомъ для построенія новыхъ коваріантовъ.

Примѣръ 1. Возьмемъ бинарную форму порядка $n = 2\nu$ и примѣнимъ процесъ

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \; -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

къ самой бинарной формѣ $f(x_1, \; x_2)$; тогда получится извѣстный намъ инваріантъ второй степени

$$2\left[a_0 a_{2\nu} - \binom{2\nu}{1} a_1 a_{2\nu-1} + \binom{2\nu}{2} a_2 a_{2\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{2}\binom{2\nu}{\nu} a_\nu^2\right] \ldots$$

Примѣръ 2. Возьмемъ систему двухъ бинарныхъ формъ втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

$$b_0 x_1^2 + 2\, b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

примѣнимъ процесъ

$$a_0 \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} - 2a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \, \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}$$

ко второй бинарной формѣ; тогда получится извѣстный намъ совмѣстный инваріантъ данной системы формъ:

$$2\,(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

§ 52. Видоизмѣненіе процеса Bool'я, предложенное Sylvester'омъ.

Boole, нашедшій замѣчательный процесъ, изложенный въ предыдущемъ параграфѣ, не обратилъ вниманія на то, что замѣна въ бинарной формѣ $f(x_1, \; x_2)$ ея перемѣнныхъ соотвѣтственно *дѣйствительными* производными $\frac{\partial F}{\partial x_2}, \; -\frac{\partial F}{\partial x_1}$ даетъ выраженіе, удовлетворяющее равенству

$$\varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \ -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) = \Delta^n f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right), \qquad (107)$$

и, слѣдовательно, *служащее совмѣстнымъ коваріантомъ двухъ данныхъ формъ* f и F. Послѣднее обстоятельство было замѣчено Sylvester'омъ[1]; его не трудно пояснить слѣдующимъ образомъ:

Если перемѣнныя x_1, x_2 переходятъ въ y_1, y_2 посредствомъ подстановки

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то мы получаемъ равенство

$$f(x_1, \ x_2) = \varphi(y_1, \ y_2);$$

это равенство не нарушится, если мы возьмемъ вмѣсто двухъ паръ перемѣнныхъ $(x_1, \ x_2)$, $(y_1, \ y_2)$ другія двѣ пары перемѣнныхъ $(X_1, \ X_2)$, $(Y_1, \ Y_2)$, когредіентныхъ съ первыми, т. е. связанныхъ между собою соотношеніемъ

$$X_1 = \alpha \, Y_1 + \beta \, Y_2,$$
$$X_2 = \gamma \, Y_1 + \delta \, Y_2;$$

но такими перемѣнными служатъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right),$$

потому что изъ равенства

$$F(x_1, \ x_2) = \Phi(y_1, \ y_2)$$

дифференцированіемъ мы получаемъ соотношенія:

---

[1] Sylvester. Cambridge and Dublin Matematical Journal, Vol. 7. 1852.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\alpha \ + \frac{\partial F}{\partial x_2}\gamma, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\beta \ + \frac{\partial F}{\partial x_2}\delta;\end{aligned} \tag{108}$$

откуда имѣемъ соотношенія:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= \alpha \,.\, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \beta \,.\, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \\ -\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \gamma \,.\, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \delta \,.\, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1},\end{aligned} \tag{108$'$}$$

подтверждающія вышесказанное.

На основаніи всего этого мы можемъ написать равенство

$$f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right),$$

изъ котораго непосредственно вытекаетъ соотношеніе Sylvester'a

$$\varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) = \Delta^n f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right),$$

показывающее то, что $f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$ *служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ двухъ формъ f и F.*

Примѣръ 1. Замѣнимъ въ бинарной формѣ 2-го порядка

$$f_2(x_1,\ x_2) = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

перемѣнныя x_1, x_2 соотвѣтственно черезъ

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2\,(a_1 x_1 + a_2 x_2),$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2\,(a_0 x_1 + a_1 x_2);$$

тогда получится коваріантъ разсматриваемой формы

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,2} &= 4\,.\,(a_0\,a_2 - a_1^2)\,.\,f_2 \\ &= 4\,.\,\Gamma_{2,0}\,.\,f_2.\end{aligned}$$

Примѣръ 2. Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы:

$$\begin{aligned}f_1(x_1,\ x_2) &= a_0\,x_1 + a_1\,x_2, \\ F_2(x_1,\ x_2) &= b_0\,x_1^2 + 2b_1\,x_1\,x_2 + b_2\,x_2^2,\end{aligned}$$

и замѣнимъ x_1, x_2 во второй бинарной формѣ соотвѣтственно черезъ производныя

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_1,\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\,a.$$

первой; тогда получится совмѣстный инваріантъ

$$J_{2,1} = b_0\,a_1^2 - 2b_1\,a_0\,a_1 + b_2\,a_0^2$$

двухъ данныхъ формъ (§ 19, *Прим. 3.*)

§ 53. Преобразованіе коваріантовъ Hermite'а какъ обобщеніе преобразованія Sylvester'а въ § 52.

Въ § 22 мы показали, что система бинарныхъ формъ имѣетъ $N-3$ основныхъ въ смыслѣ Aronhold'а инваріантовъ, если N есть число коэффиціентовъ данныхъ формъ; черезъ эти основные инваріанты всѣ остальные инваріанты данной системы выражаются алгебраически, т. е. вообще говоря ирраціонально. Является вопросъ, нельзя ли выбрать

$$N - 3 + \lambda$$

такихъ инваріантовъ данной системы, чтобы всѣ остальные ея инваріанты выражались бы черезъ нихъ раціонально, и чтобы между избранными $N-3+\lambda$ инваріантами существовало λ соотношеній.

Этотъ вопросъ былъ впервые поставленъ и разрѣшенъ въ положительномъ смыслѣ французскимъ ученымъ Hermite'омъ[1]). Clebsch[2]) показалъ, что возможно множество рѣшеній этого вопроса.

Прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію этого вопроса, мы изложимъ преобразованіе Hermite'а.

Изъ главы III намъ извѣстно, что совмѣстный коваріантъ системы бинарныхъ формъ

I) $$f_1, f_2, \ldots f_k,$$

по замѣнѣ въ немъ x_1, x_2 черезъ перемѣнныя ξ_1, ξ_2, можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ этой же системы и еще линейной формы

II) $$\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Пусть мы имѣемъ два такихъ коваріанта $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ и $\Gamma_1(\xi_1, \xi_2)$, порядковъ ν и ν_1.

Въ коваріантѣ $\Gamma_1(\xi_1, \xi_2)$ перемѣнныя ξ_1, ξ_2 можно замѣнить какими угодно когредіентными перемѣнными x_1, x_2 или X_1, X_2, и т. д. или же линейными сочетаніями когредіентныхъ съ ξ_1, ξ_2 перемѣнныхъ; напримѣръ, возьмемъ

$$\xi_1 = \eta_1 x_1 + \eta_2 X_1,$$
$$\xi_2 = \eta_1 x_2 + \eta_2 X_2.$$

Въ этихъ двухъ выраженіяхъ за X_1, X_2 можно взять $\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, потому что изъ § 52 намъ извѣстна когредіентность x_1, x_2 съ $\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

Слѣдовательно, *выраженіе*

$$\Gamma_1 \left\{ \eta_1 x_1 + \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}, \; \eta_1 x_2 - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \right\} \tag{109}$$

---

[1] Hermite. *Sur la théorie des fonctions homogénes à deux indéterminées.* Cambridge and Dublin mathematical Journal, Vol. 9; Crelle's Journal, Bd. 52. 1856.

[2] Clebsch. *Theorie der binären algebraischen Formen.* S. 317. Leipzig. 1872.

при всякихъ значенія η_1, η_2 *есть коваріантъ данной бинарной формы* $f(x_1, x_2)$.

Очевидно, что это преобразованіе коваріантовъ есть обобщеніе преобразованія Sylvester'а въ § 52; оно было впервые предложено Hermite'омъ [1]).

Развернувъ это послѣднее выраженіе по строкѣ Тэйлора, мы получимъ цѣлый многочленъ степени ν относительно η_1, η_2, коэффиціенты котораго, конечно, должны быть коваріантами данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$; въ послѣднемъ не трудно убѣдиться слѣдующимъ образомъ: коэффиціентъ при $\eta_1{}^{\nu_1-k}\eta_2{}^k$, помимо числоваго множителя, есть ничто другое какъ поляра

$$D^k_{x,X}\Gamma_1(x_1,x_2) = X_1^k\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_1{}^k} + \binom{\nu_1}{1}X_1^{k-1}X_2\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_1{}^{n-1}\partial x_2} + \ldots + X_2^k\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_2{}^k},$$

въ которой X_1, X_2 замѣнены черезъ когредіентныя съ ними $\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}$; слѣдовательно, на основаніи § 52 это будетъ коваріантъ данной бинарной формы.

§ 54. Система союзныхъ формъ.

Приложимъ преобразованіе Hermite'а къ самой бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$:

$$f\left(\eta_1 x_1 + \eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \eta_1 x_2 - \eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right) = \Gamma_0\eta_1^n + \binom{n}{1}\Gamma_1\eta_1^{n-1}\eta_2 + \ldots + \Gamma_n\eta_2^n; \tag{110}$$

здѣсь коэффиціенты $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ имѣютъ такія выраженія:

$$\Gamma_0 = f(x_1, x_2),$$

$$n\Gamma_1 = \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

и суть коваріанты данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

---

1) Hermite. *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indé terminées.* Crelle's Journal. Bd. 52. 1856.

Система коваріантовъ

$$\Gamma,\ f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n$$

называется *системою союзныхъ (associé) съ коваріантомъ* Γ *формъ*.

Теперь не трудно рѣшить вопросъ, о которомъ было сказано въ началѣ этого параграфа: система союзныхъ формъ и есть именно та система $(n+3-3)+2$ коваріантовъ, черезъ которые можно выразить *раціонально* всякій коваріантъ данной формы $f(x_1,\ x_2)$ и между которыми существуютъ два соотношенія.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\Gamma_1(\xi_1,\ \xi_2)$ есть другой коваріантъ данной бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$, отличный отъ коваріанта $\Gamma(x_1,\ x_2)$; пусть его развернутая форма будетъ такая:

$$c_0\,\xi_1{}^{\nu_1} + \binom{\nu_1}{1} c_1\,\xi_1{}^{\nu_1-1}\,\xi_2 + \ldots + c_{\nu_1}\,\xi_2{}^{\nu_1}.$$

Преобразуемъ этотъ коваріантъ посредствомъ линейной подстановки

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1\,x_1 + \eta_2\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, \\ \xi_2 &= \eta_1\,x_2 - \eta_2\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}, \end{aligned} \tag{111}$$

которой модуль равенъ

$$x_1\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1} + x_2\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2} = -\nu\,.\,\Gamma\,;$$

тогда мы можемъ написать равенство

$$\begin{aligned} (-\nu)^k\,\Gamma^k\,.\,\Gamma_1\left(\eta_1\,x_1 + \eta_2\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \eta_1\,x_2 - \eta_2\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right) &= \Gamma_1{}'(\eta_1,\ \eta_2) = \\ &= C_0\,\eta_1{}^{\nu_1} + \binom{\nu_1}{1} C_1\,\eta_1{}^{\nu_1-1}\,\eta_2 + \ldots + C_{\nu_1}\,\eta_2{}^{\nu_1}, \end{aligned}$$

гдѣ коэффиціенты $C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_{\nu_1}$ суть *такія же* функціи союзныхъ формъ

$$f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n$$

какъ и c_0, c_1, c_2, . . . c_{ν_1} — коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2, . . . a_n; сравнивъ въ послѣднемъ равенствѣ коэффиціенты при $\eta_1{}^{\nu_1}$ въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ

$$(-\nu)^k \Gamma^k . \Gamma_1(x_1,\ x_2) = C_0(f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n), \qquad (112)$$

что и доказываетъ справедливость первой части нашего предложенія: *всякій коваріантъ* $\Gamma_1(x_1,\ x_2)$ *выражается раціонально черезъ систему союзныхъ формъ* Γ, f, Γ_1, Γ_2, . . . Γ_n *при чемъ знаменателемъ этого выраженія служитъ нѣкоторая степень коваріанта* $\Gamma(x_1,\ x_2)$, *а числитъ его есть цѣлая раціональная и однородная функція остальныхъ союзныхъ формъ.*

Не трудно найти также два соотношенія, существующія между союзными формами: для этого надо только вышеприведенную линейную подстановку примѣнить къ коваріанту

$$\Gamma(\xi_1,\ \xi_2) = b_0\,\xi_1{}^\nu + \left(\frac{\nu}{1}\right) b_1\,\xi_1{}^{\nu-1}\,\xi_2 + \ldots + b_\nu\,\xi_2{}^\nu;$$

тогда получимъ соотношеніе

$$(-\nu)^l\,\Gamma^l . \Gamma\left(\eta_1 x_1 + \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2},\ \eta_1 x_2 - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\right) = \Gamma'(\eta_1,\ \eta_2) =$$

$$= B_0\,\eta_1{}^\nu + \left(\frac{\nu}{1}\right) B_1\,\eta_1{}^{\nu-i}\,\eta_2 + \ldots + B_\nu\,\eta_2{}^\nu,$$

въ которомъ коэффиціенты B_0, B_1, B_2, . . . B_ν суть такія же функціи союзныхъ формъ какъ и b_0, b_1, b_2, . . . b_ν — коэффиціентовъ данной формы. Сравнивая въ этомъ соотношеніи коэффиціенты при $\eta_1{}^\nu$ и при $\eta_1{}^{\nu-1}\,\eta_2$, мы получимъ искомыя соотношенія между союзными формами

$$\left.\begin{aligned} (-\nu)^l\,[\Gamma(x_1,\,x_2)]^{l+1} &= B_0(f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n), \\ 0 &= B_1(f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n). \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

Такимъ образомъ мы доказали справедливость второй части нашего предложенія и рѣшили вопросъ, поставленный въ началѣ § 52, для системы двухъ формъ: $f(x_1,\ x_2)$ и $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$, въ положительнымъ смыслѣ.

§ 55. Система формъ, союзныхъ съ данною формою.

Если въ изслѣдованіяхъ предыдущаго параграфа мы замѣнимъ коваріантъ $\Gamma(x_1, x_2)$ самою бинарною формою $f(x_1, x_2)$, то преобразованіе Hermite'а приметъ видъ

$$f\left(\eta_1 x_1+\eta_2\frac{\partial f}{\partial x_2},\, \eta_1 x_2-\eta_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=f_0\eta_1{}^n+\left(\frac{n}{1}\right)f_1\eta_1{}^n\eta_2+\ldots+f_n\eta_2{}^n,$$

гдѣ коэффиціенты имѣютъ значенія:

$$f_0=f(x_1,\ x_2),$$

$$nf_1=\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

. . . .

Слѣдовательно, система формъ, союзныхъ съ самою бинарною формою, есть система n формъ

$$f,\, 0,\, f_2,\, f_3,\, \ldots f_n,$$

между которыми, очевидно, не существуетъ никакого соотношенія, потому что соотношенія (113) предыдущаго параграфа въ данномъ случаѣ приводятся къ тождествамъ

$$f=f,\ 0=f_1.$$

Соотношеніе (112) предыдущаго параграфа теперь принимаетъ видъ

$$(-n)^k f^k.\Gamma_1(x_1,\ x_2)=C_0(f,\ 0,\ f_2,\ \ldots f_n), \tag{114}$$

и отсюда слѣдуетъ, что *всякій коваріантъ выражается раціональною дробью черезъ союзныя съ f формы, при чемъ знаменателемъ служитъ нѣкоторая степень данной формы f, а числителемъ — результатъ подстановки въ первый членъ коваріанта вмѣсто $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n$ союзныхъ съ f формъ*

$$f,\ 0,\ f_2,\ \ldots f_n.$$

§ 56. Типическое представленіе бинарной формы.

Разсмотримъ три коваріанта бинарной формы $f(x_1, x_2)$ порядка n:

$$\Gamma(x_1, x_2),\ \Gamma'(x_1, x_2),\ \Gamma''(x_1, x_2)$$

— соотвѣтственно порядковъ ν, ν', ν''.

Напишемъ послѣдній коваріантъ съ перемѣнными ξ_1, ξ_2:

$$\Gamma''(\xi_1, \xi_2)$$

и замѣнимъ эти перемѣнныя линейными сочетаніями двухъ паръ перемѣнныхъ

$$(X_1, X_2) \text{ и } (X_1', X_2'),$$

когредіентныхъ съ перемѣнными x_1, x_2:

$$\xi_1 = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_1',$$
$$\xi_2 = \eta_1 X_2 + \eta_2 X_2';$$

за перемѣнныя (X_1, X_2), (X_1', X_2') можно взять на основаніи § 52 соотвѣтственно производныя

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right),\ \left(\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right).$$

Такимъ образомъ мы получимъ *выраженіе*

$$\Gamma''(\xi_1, \xi_2) = \Gamma''\left(\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2} + \eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}, -\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1} - \eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right),$$

которое служитъ, конечно, *коваріантомъ данной бинарной формы при всякихъ значеніяхъ количествъ* η_1, η_2. Послѣднее не трудно также подтвердить, если мы развернемъ наше выраженіе по строкѣ Тэйлора по степенямъ η_1, η_2; и въ самомъ дѣлѣ, тогда коэффиціентомъ при $\eta_1^{\nu''}$ будетъ служить

$$\Gamma''\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right),$$

это же на основаніи § 52, есть коваріантъ данной формы;

остальные коэффиціенты получаются изъ перваго полярнымъ процесомъ, и имѣютъ выраженія: при $\eta_1{}^{\nu''-k}\eta_2{}^k$ —

$$D^k{}_{X,X'}\Gamma''(X_1,\ X_2)=X'{}_1{}^k\frac{\partial^k\Gamma''}{\partial X_1{}^k}+\binom{\nu''}{1}X'{}_1{}^{k-1}X'{}_2\frac{\partial_1{}^k\Gamma''}{\partial X_1{}^{k-1}\partial X_2}+\ldots+$$
$$+X'{}_2{}^k\frac{\partial^k\Gamma''}{\partial_2{}^k X'},$$

гдѣ

$$X_1=\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\quad X_2=-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},$$
$$X'_1=\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2},\quad X'_2=-\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}; \qquad (115)$$

очевидно, что всѣ эти коэффиціенты разложенія суть коваріанты данной бинарной формы.

Въ частномъ случаѣ, когда мы возьмемъ вмѣсто коваріанта Γ'' самую бинарную форму f, мы получимъ выраженіе

$$f(\xi_1,\ \xi_2)=f\left(\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}+\eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2},\ -\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}-\eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right)= \qquad (116)$$
$$=\Gamma_0\eta_1{}^n+\binom{n}{1}\Gamma_1\eta_1{}^{n-1}\eta_2+\ldots+\Gamma_n\eta_2{}^n;$$

въ этомъ разложеніи коэффиціены Γ_0, Γ_1, ... Γ_n суть коваріанты данной формы; они имѣютъ значенія:

$$\Gamma_k=D^k{}_{X,X'}f(X_1,\ X_2),$$

гдѣ $(X_1,\ X_2)$, $(X'_1,\ X'_2)$ имѣютъ вышеприведенныя значенія (115).

Не трудно показать по аналогіи съ § 54, что всякій коваріантъ данной формы, будучи умноженъ на нѣкоторую степень

$$\varDelta=-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\ \frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\ \frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}\right)$$

— модуля нашей линейной подстановки, выражается *цѣлой раціональной функціей* черезъ коваріанты Γ, Γ', Γ_0, Γ_1, ... Γ_n;

между этими коваріантами и модулемъ Δ, кромѣ того, существуетъ четыре соотношенія.

Разсмотримъ два коваріанта перваго порядка для данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$; такіе коваріанты возможны только у бинарныхъ формъ *нечетнаго порядка,* что слѣдуетъ непосредственно изъ соотношенія $2\lambda + \nu = n\mu$ для индекса λ, порядка ν и степени μ коваріанта; напримѣръ, бинарная форма 5-го порядка имѣетъ четыре такихъ коваріанта: $\Gamma_{5,1}$, $\Gamma_{7,1}$, $\Gamma_{11,1}$, $\Gamma_{13,1}$ (*Табл.* V въ § 40). Пусть два коваріанта перваго порядка для бинарной формы $f(x_1, x_2)$ *нечетнаго порядка* $n = 2p + 1$ будутъ:

$$\Gamma = A_0 x_1 + A_1 x_2 .$$

$$\Gamma' = A'_0 x_1 + A'_1 x_2 ;$$

тогда формулы (115) примутъ видъ:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 , \quad X_2 = -A_0 , \\ X_1' &= A_1', \quad X_2' = -A_0'; \end{aligned} \tag{115'}$$

слѣдовательно, разложеніе (116) приметъ въ данномъ случаѣ видъ:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &= f(A_1 \eta_1 + A_1' \eta_2, -A_0 \eta_1 - A_0' \eta_2) \qquad (116') \\ &= J_0 \eta_1^{2p+1} + \binom{2p+1}{1} J_1 \eta_1^{2p} \eta_2 + \ldots + J_{2p+1} \eta_2^{2p+1}, \end{aligned}$$

гдѣ коэффиціенты J_0, J_1, . . . J_{2p+1} суть *инваріанты* данной бинарной формы; они имѣютъ видъ

$$\begin{aligned} J_0 &= f(A_1, -A_0), \\ J_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial A_1} A_1' + \frac{\partial}{\partial A_0} A_0'\right) f(A_1, -A_0) = D_{A,A'} f(A_1, -A_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (117) \\ J_k &= D^k_{A,A'} f(A_1, -A_0), \\ &\ldots\ldots \\ J_{2p+1} &= f(A_1', -A_0'). \end{aligned}$$

Преобразованіе (116′) бинарной формы нечетнаго порядка посредствомъ двухъ коваріантовъ перваго порядка называется *типическимъ представленіемъ бинарной формы нечетнаго порядка.*

Изъ всего вышеизложеннаго въ этомъ параграфѣ слѣдуетъ, что *всякій коваріантъ бинарной формы* $f(x_1, x_2)$ *нечетнаго порядка* $n = 2p + 1$, *имѣющей два коваріанта перваго порядка:* $A_0 x_1 + A_1 x_2$ *и* $A_0' x_1 + A_1' x_2$, *будучи умноженъ на нѣкоторую степень детерминанта*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ A_0' & A_1' \end{vmatrix},$$

выражается цѣлой раціональной функціей черезъ эти два коваріанта и черезъ коэффиціенты

$$J_0, \; J_1, \; . \; . \; . \; J_{2p+1}, \tag{118}$$

полученнаго при помощи нихъ типическаго представленія *данной формы.*

Въ случаѣ бинарной формы четнаго порядка не можетъ быть и рѣчи о подобномъ типическомъ представленіи при помощи двухъ коваріантовъ перваго порядка, потому что у нея ихъ нѣтъ; но въ этомъ случаѣ возможно получить типическое представленіе при помощи трехъ коваріантовъ втораго порядка, какъ это показалъ Clebsch [1]).

Дабы выяснить полную возможность типическаго представленія бинарныхъ формъ, остается еще рѣшить вопросы: *всегда ли бинарная форма нечетнаго порядка имѣетъ два линейно-независимыхъ коваріанта перваго порядка, и всегда ли бинарная форма четнаго порядка имѣетъ три линейно-*

---

[1]) Clebsch. *Theorie der binären algebraischen Formen.* S. 413. Leipzig. 1872.

независимыхъ коварганта 2-го порядка? Hilbert[1]) рѣшилъ эти вопросы въ *положительномъ* смыслѣ весьма простымъ *ариѳметическимъ* пріемомъ при помощи женератрисныхъ функцій Cayley-Sylvester'а.

Для случая системы бинарныхъ формъ не трудно обобщить вышеизложенныя въ §§ 53, 54, 55 преобразованія коваріантовъ и получить утвердительный отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ началѣ § 53; типическое же представленіе системы формъ по методу настоящаго параграфа будетъ возможно для всякой системы, содержащей по крайней мѣрѣ одну форму нечетнаго порядка, а для системы бинарныхъ формъ четныхъ порядковъ необходимо прибѣгнуть къ вышецитированному методу Clebsch'а.

§ 57. Краткій очеркъ новѣйшихъ изслѣдованій Hilbert'а по ариѳмизаціи теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ. Заключеніе.

Въ нашихъ изслѣдованіяхъ свойствъ инваріантовъ бинарныхъ формъ, составляющихъ содержаніе этого сочиненія, мы выяснили главнѣйшія задачи теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ, при чемъ пользовались такими методами, которые безъ труда могутъ быть обобщены и для какихъ угодно алгебраическихъ формъ. Между этими задачами особенно важными являются вопросы о *полныхъ системахъ* инваріантовъ, черезъ которые остальные инваріанты выражаются алгебраическими функціями различнаго характера.

Мы познакомились съ тремя типами *полныхъ системъ* инваріантовъ для данной системы бинарныхъ формъ: *полная система (основныхъ инваріантовъ)* Aronhold'а есть система такихъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *вообще алгебраическими* функціями; *полная система (неприводимыхъ инваріантовъ)* Gordan'а есть система

---

[1]) Hilbert. *Ueber die vollen Invariantensysteme.* Mathematische Annalen, Bd. 42, S. 342. 1893.

такихъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *цѣлыми раціональными* функціями; *полная система (союзныхъ инваріантовъ)* Hermite'а есть система такихъ инваріантовъ, черезъ которые остальные выражаются *вообще раціональными* функціями.

Построеніе полныхъ системъ всѣхъ трехъ типовъ, какъ намъ извѣстно, представляетъ большія затрудненія и выполнены только для немногихъ частныхъ системъ бинарныхъ формъ. Hilbert[1]) впервые далъ общій методъ построенія этихъ полныхъ системъ, сущность котораго заключается въ слѣдующемъ:

Сначала Hilbert устанавливаетъ понятіе о новой *полной системѣ* такихъ инваріантовъ одинаковыхъ порядковъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *цѣлыми алгебраическими* функціями; и оказывается, что всякая система инваріантовъ имѣетъ такую полную системы — съ конечнымъ числомъ инваріантовъ

$$J_1,\ J_2,\ .\ .\ .\ J_\varkappa. \qquad (119)$$

Эта полная система Hilbert'а *обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что при равенствѣ нулю инваріантовъ, ее составляющихъ, всѣ инваріанты данной системы алгебраическихъ формъ обращаются въ нули.*

Построеніе полной системы Hilbert'а не представляетъ особенныхъ алгебраическихъ затрудненій, если имѣть въ виду это ея свойство, и Hilbert даетъ общій методъ такого построенія.

Далѣе, не трудно для полной системы $J_1,\ J_2,\ .\ .\ .\ J_\varkappa$ Hilbert'а пріискать еще одинъ инваріантъ J такъ, чтобы остальные инваріанты выражались бы *раціонально* черезъ инваріанты

$$J,\ J_1,\ J_2,\ .\ .\ .\ J_\varkappa, \qquad (120)$$

---

1) См. стр. 228, *Прим.*

между которыми существуетъ соотношеніе вида

$$J^r + A_1 J^{r-1} + A_2 J^{r-2} + \ldots + A_r = 0, \qquad (121)$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_r$ суть цѣлыя алгебраическія функціи отъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

Вся эта система $\varkappa + 1$ инваріантовъ, конечно, можетъ быть также получена при помощи типическаго представленія.

Система $J, J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ опредѣляетъ такъ называемое *алгебраическое функціональное тѣло* (*Functionenkörper*), въ которомъ цѣлыя раціональныя функціи образуютъ всю совокупность инваріантовъ данной системы алгебраическихъ формъ (*Invariantenkörper*). Степень r уравненія (121), которому удовлетворяетъ J, называется *порядкомъ* этого функціональнаго тѣла.

Kronecker, основавшій теорію алгебраическихъ функціональныхъ тѣлъ, доказалъ, что въ каждомъ такомъ тѣлѣ всегда можно построить алгебраическими пріемами *полную систему* неприводимыхъ — въ смыслѣ Gordan'a, цѣлыхъ и раціональныхъ функцій [1]); это и даетъ Hilbert'у возможность высказать слѣдующее основное въ его ученіи предложеніе:

Когда извѣстны инваріанты $J, J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$, *построеніе полной системы неприводимыхъ инваріантовъ* Gordan'a *требуетъ только рѣшенія одной элементарной задачи изъ ариѳметической теоріи алгебраическихъ функцій.*

Hilbert даетъ также алгебраическій пріемъ, при помощи котораго можно непосредственно отъ системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ перейти къ полной системѣ неприводимыхъ инваріантовъ Gordan'a, не опредѣляя инваріанта J.

Если система инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ построена для одной бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то для двухъ бинарныхъ формъ $f(x_1, x_2)$ и $F(x_1, x_2)$ подобная система получается

---

1) Kronecker. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* Crelle's Journal, Bd. 92, S. 16—19. 1882.

простымъ примѣненіемъ полярныхъ процесовъ $D^i_{a,b}$ къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

Наконецъ, не трудно также получить полную систему Hilbert'а для коваріантовъ одной или нѣсколькихъ бинарныхъ формъ, если таковая извѣстна для ихъ инваріантовъ; для этого надо только примѣнить извѣстный намъ изъ § 48 процесъ

$$\frac{\partial}{\partial a_0} x_2^n - \frac{\partial}{\partial a_1} x_2^{n-1} x_1 + \ldots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial a_n} x_1^n$$

къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$. Это же непосредственно получится изъ предыдущаго, если мы положимъ

$$F(x_1, x_2) = (\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)^n,$$

и примѣнимъ полярные процесы $D^i_{a_k, \xi^k}$ къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

При построеніи системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ иногда можно съ выгодою воспользоваться слѣдующею теоремой Hilbert'а.

Если всѣ инваріанты бинарной формы порядка $n = 2h$ *или* $n = 2h + 1$ *равны нулю, то форма содержитъ* $h + 1$*-кратный линейный факторъ, и наоборотъ, если она имѣетъ такой факторъ, то всѣ ея инваріанты равны нулю.*

Въ силу этого предложенія, для построенія системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$, надо найти такіе инваріанты, равенство нулю которыхъ составляетъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы бинарная форма порядка $n = 2h$ или $n = 2h + 1$ содержала $h + 1$-кратный линейный факторъ. Напримѣръ, въ случаѣ бинарной формы 5-го порядка равенство нулю ея инваріантовъ J_4, J_8, J_{12} есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы она содержала трехкратный линейный факторъ, слѣдовательно эти три инваріанта и составляютъ полную систему Hilbert'а — черезъ нихъ выражаются *цѣлыми алгебраическими* функціями всѣ остальные инваріанты этой формы; полная система Gordan'а для нея содержитъ кромѣ этихъ трехъ инваріантовъ J_4, J_8, J_{12}

еще инваріантъ J_{18}, и между этими четырьмя инваріантами существуетъ одна сидзигія 36-й степени (§ 40, *Табл.* V).

Мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности этого новаго направленія теоріи инваріантовъ: читатель можетъ познакомиться съ ними въ вышецитированномъ мемуарѣ Hilbert'a; замѣтимъ только — въ заключеніе нашей работы, что теорія инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ несимволическомъ направленіи не только является отображеніемъ теоріи непрерывныхъ группъ Sophus'a Lie, какъ мы старались выяснить это нашими изслѣдованіями, но также содержитъ въ себѣ принципы, лежащіе въ основаніи другаго, новѣйшаго, направленія математики — въ основаніи ариѳмизаціи функцій. Значеніе теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ этой области математическихъ изслѣдованій прекрасно характеризуется слѣдующими словами Hilbert'a: онъ говоритъ въ введеніи къ вышецитированному мемуару, — „dass die Theorie der Invarianten lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel für die Theorie der algebraischen Functionenkörper mit mehr Veränderlichen erscheint — gerade wie man in der Zahlentheorie die Theorie der Kreistheilungskörper lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel aufzufassen hat, an welchem die wichtigsten Sätze der Theorie allgemeinen Zahlenkörper zuerst erkannt und bewiesen worden sind.

Труды того же автора:

1. Геометрическія изслѣдованія объ одно-четырехзначномъ соотвѣтствіи четвертаго порядка двухъ плоскостей. Москва 1889.
2. Числовыя характеристики системъ коническихъ сѣченій. Москва. 1890.
3. Соотвѣтствіе, устанавливаемое пучкомъ кривыхъ третьяго порядка. Москва. 1891.
4. Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній Сальмона. (Переводъ съ французскаго). Москва. 1892.
5. Теорія числовыхъ характеристикъ системъ кривыхъ линій. (Удостоено Московскимъ Университетомъ преміи профессора Н. Д. Брашмана). Москва. 1893.
6. Вступительная лекція въ курсъ приложеній дифференціальнаго исчисленія къ Геометріи. Юрьевъ. 1896.
7. Теорія прямолинейныхъ конгруенцій въ связи съ теоріей поверхностей. (По лекціямъ профессора Darboux). Москва. 1897.