Fundamente

der

Geometrie.

Vom

Professor Dr. Magnus Georg Paucker.

Erster bis vierter Cursus.

Congruenz. — Parallellinien und Aehnlichkeit. — Flächeninhalt gradliniger Figuren, einfache Eigenschaften des Kreises. — Elemente der Geometrie des Raums.

Mit 285 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Mitau,
Verlag von Friedrich Lucas.

1842. Müller

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 31. Mai 1841.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

Sr. Excellenz

dem Herrn wirklichen Staatsrath

Paul Heinrich von Fuss

Dr. ph., Mitglied der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften für das Fach der Mathematik, beständigem Secretär und Mitglied des Verwaltungscomité derselben, Mitglied und einer der beständigen Secretäre der Kaiserlichen ökonomischen Societät zu St. Petersburg, Ehrenmitglied der Kaiserlichen Universität zu Kasan, der mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg, der Kaiserlichen naturforschenden Gesellschaft zu Moskau, der ökonomischen Societät zu Moskau, der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst zu Mitau, der Königlichen Societäten der Wissenschaften zu Göttingen, Kopenhagen und Upsala, der italienischen Societät der Wissenschaften zu Modena, der Königlichen Academien der Wissenschaften und Künste zu Palermo und Antwerpen, der Königlichen Gesellschaft für nordische Alterthumskunde zu Kopenhagen, der Königlichen Gesellschaft zur Aufmunterung nützlicher Künste in Edinburg, Ritter des St. Stanislaus-Ordens von der II. Classe, des St. Wladimir-Ordens von der III. Classe, des St. Annen-Ordens von der II. Classe mit der Kaiserlichen Krone u. s. w.

als Zeichen tiefgefühlter Verehrung

ehrerbietigst gewidmet

vom Verfasser

Professor Dr. Georg Paucker,

Correspondent der Kais. Academie
zu St. Petersburg.

Der Erbe eines seit drei Menschenaltern in den Annalen der mathematischen Wissenschaften hochberühmten Namens, erwarben Sie selbst durch mühevolle Forschungen in demselben Bereiche die glänzendsten Lorbeern, welche die Wissenschaft bietet. Mit seltnen Eigenschaften des Geistes und Herzens ausgerüstet, vereinigten Sie die vereinzelt gewordenen Bestrebungen der Gelehrten des Reichs. Sie wurden der geistige Regenerator der höchsten wissenschaftlichen Anstalt Russlands, welche jetzt aufs Neue den ihr gebührenden Rang unter den Akademieen Europas einnimmt. Wo gäbe es gerechtere Ansprüche als diese, auf die dankbare Verehrung derjenigen, denen die geistige Stellung unsers Vaterlandes theuer ist?

Wenn ich es aber wage, meinem Buche durch Ew. Excellenz hochgeehrten Namen eine Zierde zu verleihen, so spricht für mich ein meinem Herzen näher liegender Grund.

Könnte ich jemals des herzlichen Wohlwollens uneingedenk seyn, mit welchem bereits Ihr hochverehrter Herr Vater meine Erstlingsarbeiten aufnahm, der Akademie zur Berücksichtigung empfahl, und im Laufe vieler Jahre bei jeder Gelegenheit freundlich aufmunterte? Sie geruhten, diese Gesinnungen auf mich überzutragen. Die zahlreichen Beweise Ihrer Güte und Freundschaft werden meinem Herzen unauslöschlich eingeprägt bleiben.

Auch dieses Werk, als ich es in lithographirter Handschrift Ew. Excellenz zu überreichen die Ehre hatte, würdigten Sie Ihres Beifalls und Ihrer Theilnahme. Möge es Ihnen denn auch jetzt als ein Hülfsmittel erscheinen, nicht ungeeignet, die Fortschritte der Jugend unsers Vaterlandes in jener hohen Wissenschaft fester zu begründen, die nächst der Religion die wahre Grundlage aller geistigen Erziehung ist. Möge es, unter günstigen Auspicien beitragen, veraltete Methoden zu beseitigen, welche in geistlosen Formen sich ergehend, den Kern der Wissenschaft verhüllen. Möge es in der Erweckung und Schärfung einer schöpferischen Geistesthätigkeit die Stufe bezeichnen, welche die Mathematik nach den Absichten unsrer erhabenen

Regierung unter den Unterrichtsgegenständen einzunehmen bestimmt ist.

Mit der innigsten Verehrung zeichnet sich

Ew. Excellenz

gehorsamster Diener

Professor Dr. G. Paucker.

Mitau, am $\frac{1.}{13.}$ Februar 1842.

Vorrede.

Bekanntlich hat die Geometrie seit etwa 20 Jahren durch die Entdeckungen eines Gauss, Steiner, Plücker, Möbius, Gergonne, Poncelet u. a. eine gänzlich veränderte Gestalt angenommen. Sie ist nach Richtungen erweitert worden, welche man früher kaum ahnte, und welche aufs Entschiedenste selbst in die Darstellung der Elemente eingreifen müssen. Daraus erklärt sich die grosse Anzahl geometrischer Lehrbücher, welche in diesen letzten Jahren erschienen sind. Die Schulmänner, welche das wahre Wesen der Geometrie erkannt haben, können die Frage nicht mehr abweisen, wie die Elemente nach den neuern Betrachtungen umgestaltet werden müssen, um diese letztern für den Unterricht fruchtbar zu machen.

Das hier erscheinende Werk hatte ursprünglich den Zweck, als Lehrbuch für Gymnasien zu dienen, und erhielt daher folgende Anordnung:

Der erste Band besteht aus vier Cursen:

I. **Congruenz.**

II. **Parallellinien und Aehnlichkeit.**

III. **Flächeninhalt gradliniger Figuren, einfache Eigenschaften des Kreises.**

IV. **Elemente der Geometrie des Raums.**

Der zweite Band enthält drei Curse:

V. Metrische Relationen, regelmässige Vielecke, Kreisberechnung.

VI. Gradlinige und sphärische Trigonometrie.

VII. Inhalt der Körper.

Der dritte Band wird aus fünf Cursen bestehen:

VIII. Analysiometrie erster Theil: Lösung der Aufgaben durch geometrische und trigonometrische Analysis; *Sectio rationis, spatii, determinata.*

IX. Coordinatenlehre, Gleichung der graden Linie und des Kreises, ebene Oerter.

X. Parametrie, Berührungen, harmonischer Schnitt, Collineation.

XI. Analysiometrie zweiter Theil: *Inclinationes*, kubische und biquadratische Gleichungen.

XII. Krystallometrie.

Die ersten acht Curse sind vor dem Druck in lithographirten Exemplaren verbreitet worden. Dieses hat mir den Vortheil verschafft, beim Abdruck einige mir gemachte Bemerkungen berücksichtigen, auch hin und wieder Verbesserungen anbringen zu können. Das Werk enthält, als Lehrbuch überhaupt, auch Sätze, welche nicht nothwendig in einen durch geringe Stundenzahl ohnehin beschränkten öffentlichen Unterricht gehören, dessenungeachtet aber im wissenschaftlichen System an der geeigneten Stelle nicht fehlen dürfen. Diese können dem eignen Studium überlassen bleiben.

Dahin gehören im V. Cursus die Sätze über regelmässige Polygone. Die Polygontafeln habe ich mit besondrer Sorgfalt und auf mehr Stellen berechnet, als sie in den Lehrbüchern der höhern Geometrie vorkommen. Der Anhang dieses Cursus enthält als Anregung für fähigere Schüler und zu practischem Gebrauch verschiedene Rectificationen und Quadraturen, welche hier vereinigt zu finden Manchem angenehm seyn dürfte, dem es vielleicht Mühe machen würde, sie aus Werken über höhere Geometrie zusammen zu suchen.

Im VI. Cursus habe ich durch mehrere in den Lehrbüchern gewöhnlich nicht vorkommende Sätze die Berechnung des Dreiecks gleichsam in ihre innersten Elemente zu zerlegen gesucht. Die Wissenschaft fordert, dass sich der Mathematiker in den Besitz der mannigfaltigsten Methoden setze, die zu dem verlangten Resultate führen. Wer sich die Fundamente gehörig angeeignet hat, wird sich allerdings diese Wege selbst öffnen können, wenn er ihrer bedarf, gewöhnlich aber unterbleibt es. Daher dürfte diese vollständigere Sammlung trigonometrischer Auflösungen vielleicht bei Manchem einer einseitigen Auffassung zuvorkommen.

Im VII. Cursus habe ich mich bemüht, den Beweisen die möglichste Strenge zu geben. In dieser Rücksicht mache ich auf VII. 18. 37. aufmerksam. Dass jede Rechnungsregel mit einem vollständigen Zahlenbeispiel versehen ist, wird man hoffentlich billigen. Von dem Anhange zum VII. Cursus gilt dasselbe, was vom Anhange zum V. Cursus gesagt wurde. Man wird wohl keinen Anstoss daran nehmen, dass hier die Berechnung des parabolisch gekrümmten Fasses mit aufgenommen ist, da ich mich bemüht habe, die Richtigkeit der Resultate auch denjenigen, welche die Differentialrechnung nicht kennen, durch einfache geometrische Betrachtungen einleuchtend zu machen.

Ein Hauptaugenmerk bei der Abfassung meines Lehrbuchs war der, begabtern Schülern Mittel in die Hände zu geben, sich durch eignes Studium mehrseitig auszubilden. In keiner Wissenschaft ist die selbstständige Ausbildung so leicht erreichbar, so wichtig und fruchtbar, als in der Mathematik. Wenn man den Schülern die Geometrie gleichsam nur mit der Elle zumessen will, so werden sie in der Mathematik immer nur Stümper bleiben. Sollte denn eine Seite ciceronianisches Latein für den Jüngling wirklich so sehr viel mehr Werth haben, als das Studium *geometrischer Wahrheiten, auf denen das Weltsystem* beruht? Er lieset in den höhern Gymnasialclassen den Aeschylus und Sophokles, während er sich eben dort kaum über die Anfangsgründe der Geometrie zu erheben im Stande ist. Und doch ist grade dieses Jünglingsalter von 17—18 Jahren, bei einigermaassen günstiger Anlage, vollkommen befähigt, sich die Analysis des Unendlichen, Differentialrechnung und höhere Geometrie anzueignen, ja sich in diese Disciplinen mit Enthusiasmus zu vertiefen, wie jeder Mathematiker aus Erfahrung weiss.

Weit entfernt zu fürchten, dass man meinem Werke eine Ueberladung an Stoff zum Vorwurf machen könnte, weiss ich nur zu wohl, wieviel demselben noch fehlt. Um einen Begriff von Reichhaltigkeit bei einem Lehrbuch der Geometrie zu bekommen, sehe man *van Swinden's* Geometrie nach der trefflichen Bearbeitung des Professors an der Landesschule Pforta *Jacobi* (Jena 1834). Das Original hat 686, der Anhang 30, die Zusätze des Herausgebers 1154 Artikel. Wenn dieses Werk etwas übersichtlicher geordnet, die Zusätze etwas mehr begründet und entwickelt wären, so würde es unstreitig die erste Stelle unter den deutschen Lehrbüchern einnehmen.

Dass die Mathematik in den Gymnasien eine so untergeordnete Stufe hat, daran sind wohl grösstentheils die Schulmänner der ältern Zeit Schuld, an deren Schulpläne und Ideen man mit geringen Abänderungen bis auf den heutigen Tag gebunden ist. Nach ihnen sollte der Unterricht der Mathematik in den Schulen nur ein Vehikel der Logik seyn. Die Mathematik sollte nicht um ihrer selbst willen, sondern nur um der Logik willen gelehrt werden. Sie beseitigten alles, was eine sogenannte practische Richtung hatte, weil sie wohl wussten, dass die practischen Fragen, z. B. in der Astronomie, Mechanik, Physik u. s. w. zu allen Zeiten diejenigen waren, welche der Mathematik neuen Aufschwung gaben. Aus gleichem Grunde legten sie in der Mathematik auf die logischen Formen ein grosses Gewicht. Sie waren zufrieden, in der Arithmetik bis zu den Proportionen, in der Geometrie etwa bis zum pythagoräischen Lehrsatz zu kommen, nur musste alles gründlich logisch erörtert werden; *non multa sed multum,* war ihr Wahlspruch. Dazu waren zwei bis drei wöchentliche Lehrstunden völlig ausreichend. In diesem engen Kreise drehten sich geistreiche Männer ein volles Jahrhundert hindurch herum. Diess ist der alte Streit der Humanisten und Realisten. Was in Deutschland einige hochbegabte Geister zur Ausbildung der Geometrie geleistet haben, war und ist noch den Schulen völlig fremd.

Derjenige Schüler, welcher die Mathematik nur als eine Uebung um logischrichtige Schlussfolgen zu bilden, benutzt hat, welcher in ihr nur eine Reihe einzelner Wahrheiten ohne den hindurchgehenden rothen Faden der Wissenschaft sah, wird einst, wenn er ins bürgerliche Leben tritt, von der erlernten Mathematik gar wenig Nutzen haben. Die Sätze werden vergessen seyn, und die sogenannten Denkübungen waren für ihn weiter nichts, als Reproductionen der vom Lehrer vorgetragenen Schlüsse. Aber jeder gut organisirte Kopf macht mit freiem Bewusstseyn logisch richtige Schlüsse, ohne dass er dieses erst durch die Mathematik zu erlernen braucht. Wenn man ihm sagt, dass darin das Wesen der Mathematik bestehe, so giebt man ihm die Schale statt des Kerns, man macht ihn zu einem einseitigen Pedanten und Halbwisser.

Wenn ihm hingegen die Mathematik zur Schärfung des Verstandes, zur Anregung der combinirenden und producirenden Geistesthätigkeit, zur Forschung und Erfindung in selbstständigem wissenschaftlichem Gange dargestellt worden ist, so mögen immerhin die speciellen Wahrheiten der Vergessenheit anheim fallen; die erworbene und gewonnene geistige Kraft wird fürs ganze Leben fruchtbar geworden seyn.

Die Mathematik ist keinesweges, auch für die Schulen nicht, „eine practische Logik", sondern sie ist, ihrem innersten Wesen nach die Wissenschaft des Verstandes, der Forschung, der Erfindung, der Divination des Allgemeinen im Besondern. Haben denn etwa die Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Gauss, Steiner, Bessel, Abel, Jacobi und andre grosse Mathematiker ihre bewundernswerthen Entdeckungen durch die Logik gemacht? Sicherlich nicht. Die Mathematik bedient sich allerdings der Logik, aber sie ist nicht die Logik selbst. Die Mathematik kann in hohem Grade als geistiges Bildungsmittel wirken, aber nicht sowohl durch ihren Einfluss auf die immer vorhandene Thätigkeit der Urtheilskraft, als vielmehr dadurch, dass sie den Verstand schärft, die Ideen entwickelt, die Combinationsgabe übt. Auf diesem indirecten Wege reift die Urtheilskraft, erstarkt das Gedächtniss von selbst.

Daher gehört es denn auch keinesweges zum Wesen eines guten Unterrichts in den untern Classen, dass man die Schüler das Besondre im Allgemeinen wahrnehmen lasse. Dieses kann erst in der höhern Geometrie geschehen, wo man von allgemeinern Standpuncten ausgeht. Hingegen öffne man dem Schüler der untern Classen das geistige Auge, welches ihn in dem besondern Falle den allgemeinen Satz ahnen, anschauen lässt. Kein allgemeiner Satz ist in der Mathematik jemals anders gefunden worden, als durch geistige Anschauung des Allgemeinen im Besondern. Die Mathematik ist immer und überall vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Besondern zum Allgemeinen fortgeschritten, und so muss auch ihr Gang beim Unterricht seyn.

Ich habe daher in meinem Buche von den logischen Formen der alten Schule keinen Gebrauch gemacht. Das Ganze ist nach fortlaufenden Sätzen geordnet, ohne Benennungen von Lehrsätzen, Aufgaben, Grundsätzen, Zusätzen, Folgesätzen, Forderungssätzen, Erklärungen u. s. w. Ich halte die Form, in welcher eine Wahrheit vorgetragen werden soll, im Allgemeinen für unwesentlich; den Namen beizufügen ist vollends überflüssig, da die Abfassung selbst keinen Zweifel darüber lassen kann, ob der Satz ein Lehrsatz oder eine Aufgabe sey.

Die Ueberschriften habe ich so einzurichten gesucht, dass der Hauptgedanke scharf hervortrete, aber jede Wortüberladung möglichst vermieden werde. Dass die Ueberschrift des Satzes alles enthalte, was bewiesen werden soll, scheint mir überflüssig. Man verwechsele nicht den mündlichen Vortrag des Satzes durch den Lehrer, mit dem Ausdruck, welchen der Satz im Buche hat. Diese Ueberschrift könnte ganz und gar fehlen, ohne dass damit dem Beweise der mindeste Eintrag geschähe. Die Ueberschrift hat nur den Zweck, zu bewirken, dass sich der Satz dem Gedächtnisse leicht einpräge. Daher muss sie den Hauptgedanken scharf, ohne Unklarheit, aber auch ohne Breite im Ausdruck wiedergeben. Ueberschrift und Figur müssen einander gegenseitig ergänzen.

Viel wichtiger war es mir, die Sätze so aneinander zu reihen, dass jeder Satz eine aus dem Vorhergehenden folgende, doch selbstständig bewiesene Wahrheit enthalte, zugleich aber auch die Divination der nächsten Sätze einleite. Im Laufe eines dreissigjährigen Unterrichts wurde das Werk vielleicht ein Dutzend Male umgearbeitet, ehe ich bei der gegenwärtigen Abfassung stehen blieb. Es könnte getadelt werden, dass ich im III. Cursus nach dem Satz 51. welcher von der Tangente und beliebigen Secante handelt, im Satze 57 den speciellen Fall von der Tangente und Mittelpunctssecante folgen lasse. Aber beide Sätze waren an der Stelle, wo sie stehen, nothwendig. Jeder liefert eine Divination nach einer verschiedenen Richtung hin; jener zum Viereck im Kreise, dieser zur Verbindung des rechtwinkligen Dreiecks mit dem Kreise. Auch wird auf letztern gewöhnlich die Bestimmung der mittlern Proportionallinie gegründet; da aber diese ebenfalls durch den allgemeinen Satz bestimmt werden kann, so musste jener diesem vorangehen.

Wie schwierig die Durchführung des Gedankens sey, die Geometrie übersichtlich und wissenschaftlich zugleich im oben angedeuteten Sinne zu ordnen, davon geben unsre besten Lehrbücher genugsame Belege. Man schlage z. B. das vielgebrauchte Lehrbuch von Kries an der ersten besten Stelle auf: zuerst kommt ein Lehrsatz, dann fünf Zusätze, dann zwei Erklärungen, dann eine Aufgabe, und so geht es fort. Oft ist eine Wahrheit, auf welche am häufigsten verwiesen wird, in einem Zusatze ohne Beweis enthalten.

Die ersten sieben Curse meines Buchs enthalten zusammen 431 Sätze. Für zwei Schuljahre oder 80 Wochen kommen auf jede Woche etwa 5 Sätze. Wem dieses zuviel scheinen sollte, dem schlage ich vor, folgende Sätze nicht in den Unterricht zu ziehen, sondern dem eignen Studium zu überlassen:

I. 32.
II. 32, 34, 36, 37, 40, 41, 51, 66, 67, 68.
III. 1, 2, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 27, 47, 60, 61, 62, 70, 72, 73, 74.
IV. 37, 38, 50, 53, 68, 69.
V. 1, 2, 3, 7, 10, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 48, 50.
VI. 21, 22, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71.

Nach Weglassung dieser 116 Sätze, bleiben 315 Sätze, also auf jede Woche der zwei Schuljahre 4 Sätze.

Vorrede zum Rechenbuch.

Ich benutze diese Gelegenheit, um mich auch über meinen Leitfaden der Arithmetik (1841. Mitau, Lucas, zweite Auflage) mit Rücksicht auf die darüber bekannt gewordenen Urtheile auszusprechen. Dieses Werk ist nicht zu einem Handbuch für die untern Schulclassen, sondern nur zu einem Leitfaden bestimmt, welches den Lehrer nöthigt, einen bestimmten Gang festzuhalten, und dem Schüler die Repetition erleichtert. Da es wohlfeil seyn sollte, um auch von dem ärmsten Schüler angeschafft werden zu können, so behandelt es die untern Theile der Arithmetik nur kurz. Denn für diese Theile sind geschickte Lehrer und gute Hülfsmittel in Menge vorhanden. Den vielen Lehrbüchern der Arithmetik für die untern Schulclassen ein neues hinzuzufügen, lag nicht in meiner Absicht. Die Einführung eines Leitfadens findet aber bei den Lehrern selbst den meisten Widerstand, weil jeder Lehrer seine eigenthümliche Mittheilungsart und Unterrichtsform hat. Um also den Lehrern das Buch annehmlich zu machen, durfte ich bei den Erklärungen in den untern Regionen nicht zu ausführlich seyn, und nur da eine Begründung anbringen, wo etwas Neues oder weniger Bekanntes zu erklären war. Auf diese Weise erlangte ich einen dreifachen Vortheil. Erstlich wird der Schüler genöthigt, schärfer nachzudenken, und wo ihm der Gegenstand dennoch dunkel bleibt, den Lehrer zu befragen. Das Buch regt also die Geistesthätigkeit des Schülers an. Zweitens wird der Lehrer zu einer gründlichen Vorbereitung auf den Unterricht genöthigt, da er stets gewärtig seyn muss, über schwierige Stellen zu Rathe gezogen zu werden. Die Fragen der Schüler geben ihm Gelegenheit, auch die minder fähigen Köpfe geistig anzuregen. Das Buch gewinnt so drittens Raum für die weniger bekannten Betrachtungen über die Zahlen. Nicht als ob diese alle vom Schüler gelernt werden sollten. Aber sie bieten einen Stoff dar, um den sonst so trocknen Unterricht in der Arithmetik zu beleben. Das Lebendige des Unterrichts besteht aber nicht darin, dass man Gegenstände des täglichen Lebens hineinzieht, auch nicht darin, dass man durch logische Definitionen über die Natur der Zahlen, wofür die Schüler in diesem Alter ohnehin wenig Sinn haben, auf ihre Urtheilskraft zu wirken sucht, sondern darin, dass man ihren Verstand entwickelt und beschäftigt, dass man jeden Umstand benutzt, welcher geeignet ist, ihnen einen Blick in die oft so geheimnissvolle Verknüpfung der Zahlen zu öffnen, ihre Ideen zu bereichern, ihre geistige Wahrnehmung für Dinge zu entwickeln, welche ihnen bei dem gewöhnlichen Unterricht völlig unbekannt geblieben seyn würden. Derjenige Schüler weiss nur wenig, welcher seine Rechnung nur auf eine einzige Art auszuführen versteht. Wenn die Arithmetik geistiges Bildungsmittel seyn soll, so kommt es nicht sowohl darauf an, dass der Schüler auf richtigem Wege ein richtiges Facit zu erlangen wisse, als vielmehr darauf, dass in ihm diejenige Geisteskraft geübt werde, welche ihn befähigt, dasselbe Resultat auf den verschiedensten Wegen wiederzufinden, und in der Wahl des leichtesten Weges eine schnelle Prüfung seiner Rechnung zu erlangen.

Um mich durch ein Beispiel verständlicher zu machen, so seyen 37 Quadratfuss in Decimalstellen einer Quadratsaschen zu verwandeln, also $\frac{37}{49}$ auf eine Decimalzahl zu bringen. Dividirt man auf gewöhnliche Art 37 mit 49, so hat man nur ein Rechenexempel mehr gemacht, ohne etwas Besonderes dabei gelernt zu haben. Ueberlegt man hingegen, dass 49 in 100 die Zahl 2 zum Quotienten und 2 zum Rest giebt, so hat man nur nöthig, 37 doppelt zu nehmen = 74, diese Zahl doppelt zu nehmen = 148 u. s. w.. diese Zahlen immer um zwei Stellen weiter rechts gerückt, zu addiren, so hat man mit einem Male nicht allein die ganze Reihe der Decimalstellen, sondern man erkennt auch dadurch den merkwürdigen Zusammenhang, welcher die Stellen des Quotienten unter einander verknüpft.

In diesem Sinne also muss mein Buch benutzt werden. Nicht eine todte Sammlung von Regeln, durch welche man mechanische Rechner bildet, soll es seyn, sondern ein Hülfsmittel, um Geist und Leben in den Unterricht zu bringen. Diese Regeln sollen keinesweges auswendig gelernt werden. Eben so wenig braucht man sie alle auf einmal durchzugehen. Der Lehrer wähle in dem einem Jahre den einen, in dem andern Jahre einen andern Theil des Buchs, nach welchem er seine Schüler beschäftigt.

Wenn man also sagt, mein Buch sey gut für Realschulen, wo es nur gelte, mechanische Rechenfertigkeit zu bewirken, aber untauglich für Gymnasien, wo es auf logische Begründung ankomme, so kann ich nur bedauern, dass man das Buch nicht begriffen hat. Findet der Lehrer in dem Buche keine Begründung angegeben, so gebe er sie selbst dem Schüler. Aber in den schwierigern Gegenständen ist sie immer angedeutet, und mehr kann man billiger Weise von einem Leitfaden nicht verlangen. Einer meiner geehrten Recensenten bemerkte sehr richtig „er wünsche dem Buche geschickte Lehrer und fähige Schüler."

Noch muss ich bemerken, dass ich auf einen Fehler S. 106 aufmerksam gemacht worden bin, wo irrig die Zahl 49 unter die Primzahlen gerathen ist.

Mitau, $\frac{2.}{14.}$ Januar 1842.

Der Verfasser.

Erster Cursus.

Congruenz.

Der Punct.

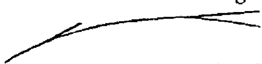
Wenn ein Naturkörper in immer kleinere Theile zerlegt wird, so ist dasjenige Theilchen desselben, welches durch kein mechanisches Mittel mehr verkleinert werden kann, welches daher für unsere Sinne ohne Ausdehnung ist, und nur noch bei der Beleuchtung dem Auge durch seine Farbe sichtbar wird, ein *physischer Punct.* Wenn aber der Punct nicht bloss für unsere Sinne, sondern auch für unser Denkvermögen ohne alle Ausdehnung ist, d. h. wenn er keine Theile, und weder Länge noch Breite oder Dicke hat, so ist er ein *geometrischer Punct.* Ein solcher Punct ist nicht in der Natur, sondern nur in unserer Vorstellung vorhanden.

Die Linie.

Die Bahn oder Spur, welche ein ohne Unterbrechung fortrückender physischer Punct beschreibt, heisst eine *physische Linie.* Eine solche Linie hat eine für unsere Sinne unmerkbar geringe Breite oder Dicke, aber eine sichtbare Ausdehnung nach der Länge. Die feinen Linien, welche der Kalligraph oder Lithograph, der Zeichner, Maler oder Kupferstecher, der practische Geometer u. s. w. mit der Spitze der Feder, des Blei- oder Metallstifts zeichnen, die Linien, welche der Glaser mit der Demantspitze zieht, oder der Optikus in Glas ätzt, die Linien, welche der Sonnenstrahl in den Sonnenstäubchen abbildet, oder in den Lichtbildern auf der Metallfläche darstellt, sind physische Linien. Wenn wir in unserer Vorstellung von der physischen Linie nur die Ausdehnung in der Länge behalten, die Breite oder Dicke aber wegdenken, so erhalten wir den Begriff einer *geometrischen Linie,* welche also auch nicht in der Natur, wohl aber in unserem Denkvermögen vorhanden ist. Anfang oder Ende, die Grenze, oder irgend eine bestimmte Stelle der geometrischen Linie ist also ein geometrischer Punct. Er entsteht da, wo zwei geometrische Linien einander durchschneiden. Die Bahn eines geometrischen Puncts ist eine geometrische Linie.

Die grade Linie.

Indem nun ein Punct bei seinem ununterbrochenen Fortrücken oder bei seiner Bewegung eine Linie beschreibt, welche nur eine Ausdehnung nach der Länge hat, so kann bei derselben, abgesehen von der verschiedenen Geschwindigkeit der Bewegung, noch eine Verschiedenheit in der Richtung stattfinden. Wenn die Richtung der Linie sich beständig ändert, d. h. wenn sie in jedem Puncte eine andere ist, so heisst die Linie eine *krumme Linie.* Bleibt aber die Richtung in allen Puncten unverändert dieselbe, so heisst die so gezogene Linie eine



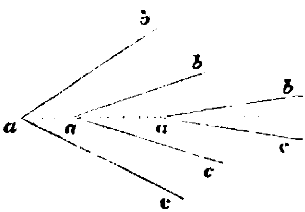
grade Linie. Um also bei einer krummen Linie die Aenderung der Richtung wahrzunehmen, muss man in jedem Puncte derselben eine grade Linie ziehen, oder sich denken.

Zwischen zwei Puncten kann man unzählige krumme Linien, aber nur eine einzige grade Linie denken. Dieses giebt ein Mittel, um die Richtigkeit einer graden Linie (z. B. an einem Lineal) zu erkennen. Denn wenn man die Linie um zwei ihrer festen Puncte wie um eine Axe sich drehen lässt, so werden ihre Puncte, wenn sie krumm ist, bei fortgesetzter Drehung sich trennen. Dieses wird bei der graden Linie nicht der Fall seyn. Also:

Zwei grade Linien, welche zwei Puncte mit einander gemein haben, decken einander in allen übrigen Puncten, d. h. sie bilden nur eine einzige grade Linie, welche zwischen diesen beiden Puncten die *kürzeste Entfernung* oder die *Entfernung überhaupt* angiebt. Die grade Linie ist daher das Mittel, nicht bloss die Richtung zu erkennen, sondern auch die Entfernung zu bestimmen, welche immer auf der graden Linie gemessen wird.

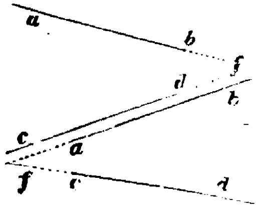
Der Winkel.

Wenn zwei grade Linien *ab*, *ac* von einem Puncte *a* nach verschiedenen Richtungen gehen, so bilden sie einen Winkel. Der Punct *a* heisst die *Spitze* des Winkels; die Linien *ab*, *ac* heissen die *Schenkel* oder *Seiten* des Winkels. Der Winkel selbst wird



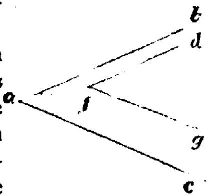
entweder bloss durch den Buchstaben *a* der Spitze bezeichnet; oder indem man diesen Buchstaben in die Mitte setzt: *bac* oder *cab*.

Die Grösse des Winkels *bac* hängt bloss von der Neigung der Linien *ab*, *ac* zu einander ab, d. h. er ist kleiner oder grösser, je nachdem die Richtungen *ab*, *ac* näher zusammen fallen oder weiter auseinander rücken. Da die Seiten des Winkels unbegrenzt verlängert gedacht werden können, ohne dass dadurch die Richtung derselben geändert wird, so hängt die Grösse des Winkels nicht von der Länge der Seiten ab.



Wenn zwei grade Linien *ab*, *cd*, welche nach verschiedenen Richtungen gehen, einander immer näher rücken, so dass sie zuletzt bei gehöriger Verlängerung in einen einzigen Punct *f* zusammentreffen würden, so heissen sie *convergirende Linien*; wenn sie aber immer weiter auseinander gehen, so heissen sie *divergirende Linien.*

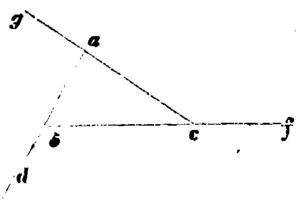
Gleichheit der Winkel.



Zwei Winkel bac, dfg können einander gleich seyn.

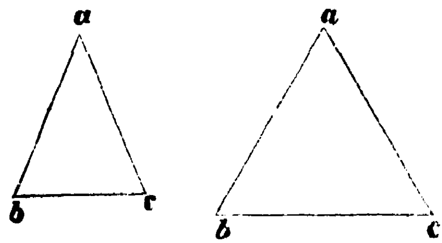
Um dieses zu erkennen, denkt man die Winkelspitze *f* auf die Winkelspitze *a* gelegt, und einen Punct der graden Linie *fg* in die grade Linie *ac* fallend. Dann müssen beide Linien *fg*, *ac* einander decken, d. h. nur eine einzige grade Linie bilden. Wenn in diesem Falle auch die graden Linien *fd*, *ab* einander decken, so sind die Winkel *dfg*, *bac* einander gleich.

Das Dreieck.



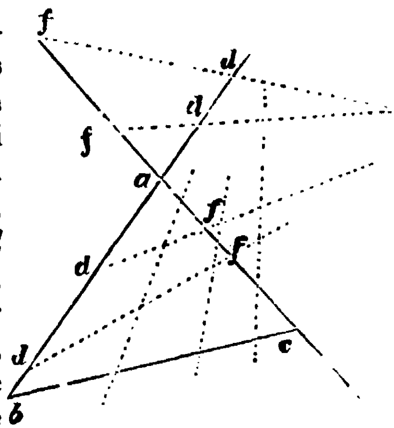
Wenn je zwei von drei nicht in grader Linie liegenden Puncten *a*, *b*, *c* durch grade Linien verbunden werden, so entsteht eine Figur, welche *ein Dreieck* heisst. Die drei Puncte *a*, *b*, *c* heissen die *Winkelpuncte*, *Spitzen* oder *Ecken* des Dreiecks. Auf den unbegrenzten Verbindungslinien *abd*, *bcf*, *cag* heissen diejenigen Stücke, welche zwischen den Ecken des Dreiecks gemessen werden, nämlich *ab*, *bc*, *ca*, die *Seiten* des Dreiecks. Die Winkel *cab*, *abc*, *bca* heissen die *innern Winkel* des Dreiecks. Die Winkel, welche jede Seite des Dreiecks mit der Verlängerung der andern Seite bildet, nämlich *bag*, *cbd*, *acf*, heissen die *Aussenwinkel* des Dreiecks.

Ein Dreieck, in welchem bloss zwei Seiten *ab*, *ac* einander gleich sind, heisst ein *gleichschenkliges* Dreieck, jene beiden Seiten heissen die *Schenkel*, die dritte Seite *bc*, welche den Schenkeln nicht gleich ist, heisst die *Grundlinie* oder *Basis*. Ein *gleichseitiges Dreieck* ist ein solches, in welchem alle drei Seiten *ab*, *bc*, *ca* einander gleich sind.



Die Ebene.

Wenn sich eine grade Linie *df* längs den Seiten eines Winkels *bac* ununterbrochen fortschiebt, so dass sie sich bei dieser Bewegung fortwährend auf die Seiten *ba*, *ac* stützt, d. h. dass einer ihrer Puncte *d* immer in der graden Linie *ab*, ein anderer ihrer Puncte immer in der graden Linie *ac* liegt, so beschreibt die grade Linie eine *Ebene*. Der Winkel *bac* liegt in dieser Ebene, und jede andere grade Linie, welche auf dieselbe Art wie *df* ununterbrochen fortrückt, indem sie sich auf die Linien *ab*, *ac* stützt, beschreibt dieselbe Ebene wie *df*. *Die Lage dieser Ebene ist also durch den Winkel bac völlig bestimmt*, d. h. durch diesen Winkel kann keine zweite Ebene gedacht werden, welche von der ersten verschieden wäre.



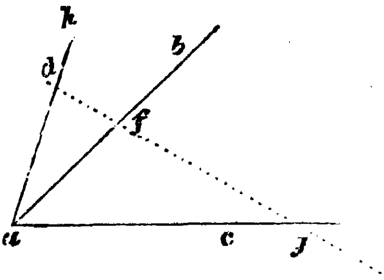
Da die Richtung der graden Linie *ab* durch die Puncte *a* und *b*; die Richtung der graden Linie *ac* durch die Puncte *a* und *c* bestimmt ist, so ist auch der Winkel *bac* durch die drei Puncte a, b, c bestimmt. *Folglich bestimmen auch drei Puncte die Lage einer Ebene*, d. h. grade Linien, welche sich bei ihrer Bewegung auf die graden Linien ab, ac, oder auf die graden Linien ab, bc, oder auf die graden Linien ac, bc, stützen, beschreiben immer dieselbe Ebene.

Ferner, da zwei Puncte eine grade Linie bestimmen, so ist *die Lage einer Ebene auch durch einen Punct und eine grade Linie völlig bestimmt*, d. h. durch einen Punct und eine grade Linie kann immer eine Ebene, und zwar nur eine einzige Ebene gelegt werden.

Eine Ebene ist nichts anders, als der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, welche in graden Linien liegen, die sich auf je zwei von dreien ein Dreieck bildenden graden Linien stützen.

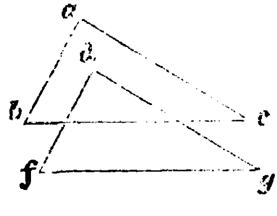
Wenn zwei Puncte einer graden Linie in einer Ebene liegen, so liegen auch alle übrigen Puncte dieser graden Linie, so weit man dieselbe auch verlängern mag, in derselben Ebene.

Wenn also aus dem Puncte a eine grade Linie ah so gezogen werden soll, dass sie in der Ebene bac liege, so hat man nur zu bewirken, dass sie durch irgend einen Punct d gehe, welcher in einer graden Linie fg liegt, die sich auf die graden Linien ab, ac stützt.



1.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander.



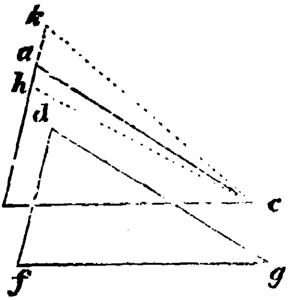
D. h. alsdann sind auch die dritte Seite und die beiden andern Winkel gegenseitig gleich.

Es sey $ab = df$, $bc = fg$, $\angle\, abc = dfg$.

Die Winkel dfg, abc lassen sich so zusammenlegen, dass die Spitze f auf b, die Richtung der Seite fg auf bc fällt. Da nach der Annahme $\angle\, f = b$, so muss dann auch die Richtung fd auf bc fallen. Ausserdem ist nach der Annahme $fg = bc$, $ab = df$. Also fällt bei dieser Zusammenlegung der gleichen Winkel f, b, auch der Punct g auf c, der Punct d auf a. Also fallen die Ecken d, f, g gegenseitig auf die

Ecken a, b, c. Also decken die zwischen ihnen liegenden Seiten einander. Also ist die Seite $dg = ac$, $\angle g = c$, $\angle d = a$.

2.



Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander.

D. h. alsdann sind auch die beiden andern Seiten und der dritte Winkel gegenseitig gleich.

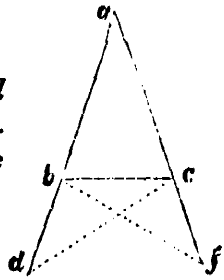
Es sey $bc = fg$, $\angle b = f$, $\angle c = g$.

Man nehme an, df sey $<$ als ab, mache $bh = df$, und ziehe ch. Dann ist in den Dreiecken dfg, hbc, $df = hb$, $fg = bc$, $\angle f = b$, also (I. 1.) decken die Dreiecke hbc, dfg einander, also $\angle hcb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also $\angle hcb = acb$. Dieses ist aber unmöglich, also kann nicht $df <$ als ab seyn.

Man nehme an, df sey grösser als ab, mache $bk = df$ und ziehe ck. Dann ist in den Dreiecken dfg, kbc, $df = kb$, $fg = bc$, $\angle f = b$, also (I. 1.) decken die Dreiecke kbc, dfg einander, also $\angle kcb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also ist $\angle kcb = acb$. Dieses ist aber unmöglich, also kann nicht $df >$ als ab seyn.

Da df weder $<$ noch $>$ als ab seyn kann, so muss $df = ab$ seyn. Aber auch $bc = fg$ und $\angle b = f$. Also decken die Dreiecke abc, dfg einander. Also ist ausser $ab = df$ und $\angle c = g$, auch $ac = dg$ und $\angle a = d$.

3.



In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

D. h. wenn $ab = ac$, so ist auch $\angle abc = acb$.

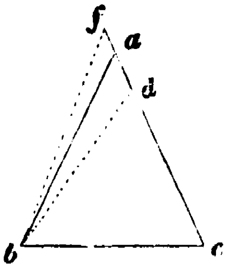
Erster Beweis.

Man bringe das $\triangle\, abc$ in die umgekehrte Lage acb. Da $\angle a = a$, $ab = ac$, $ac = ab$, so decken die $\triangle\, abc$, acb einander, der Punct c fällt auf b, und b auf c (I. 1.) also ist der $\angle b = c$, und $\angle c = b$.

Zweiter Beweis.

Man verlängere ab, ac nach d, f, und mache $bd = cf$, und ziehe cd, bf. In den $\triangle\, acd$, abf ist $ac = ab$,

$ad = af$, $\angle\, a = a$, also (I. 1.) $\triangle\, acd = abf$, also $cd = bf$, $\angle\, acd = abf$, $\angle\, adc = afb$. In den $\triangle\, bdc$, cfb ist $cd = bf$, $bd = cf$, $\angle\, bdc = cfb$, also (I. 1.) $\triangle\, bdc = cfb$, also $\angle\, bcd = cbf$, also $\angle\, acd - bcd = abf - cbf$, also $\angle\, abc = acb$.



4.

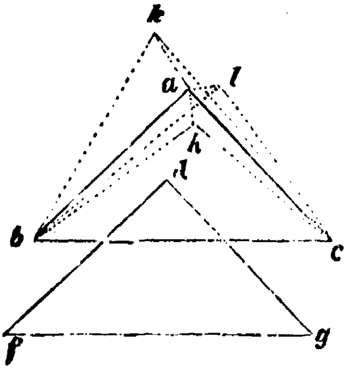
Wenn die Winkel an der Grundlinie eines Dreiecks einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

D. h. wenn $\angle\, abc = acb$, so ist $ab = ac$.

Denn es sey $ab <$ als ac. Man mache $cd = ab$, ziehe bd. In den $\triangle\, dcb$, abc ist $dc = ab$, $bc = bc$, $\angle\, dcb = abc$, also (I. 1.) $\triangle\, dcb = abc$. Dieses ist unmöglich, also kann nicht $ab <$ als ac seyn.

Es sey $ab >$ als ac. Man mache $cf = ab$, ziehe bf. In den $\triangle\, fcb$, abc ist $fc = ab$, $bc = bc$, $\angle\, fcb = abc$, also (I. 1.) $\triangle\, fcb = abc$. Dieses ist unmöglich also kann nicht $ab >$ als ac seyn.

Da ab weder grösser noch kleiner als ac seyn kann so ist $ab = ac$.



5.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander,

D. h. wenn $df = ab$, $fg = bc$, $gd = ca$, so ist $\angle\, d = a$, $\angle\, f = b$, $\angle\, g = c$.

Erster Beweis.

Man lege fg auf bc, und bringe den Punct d in die Ebene des $\triangle\, abc$, nach der Richtung von a, so fällt d entweder innerhalb des $\triangle\, abc$ in h, oder oberhalb des Puncts a in k, oder seitwärts von a in l.

Wenn d in h fällt, so ist $bh = ba$, $ch = ca$, also (I. 3.) $\angle\, bah = bha$, $\angle\, cah = cha$, also $\angle\, bac = bha + cha$, was unmöglich ist; also fällt d nicht in h.

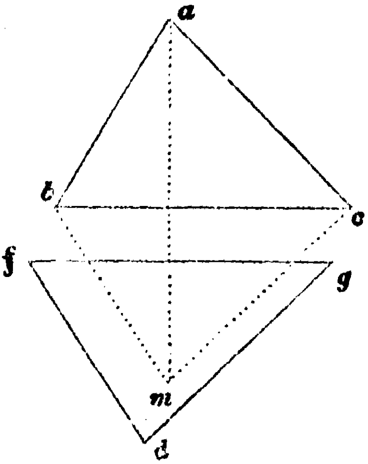
Wenn d in k fällt, so ist $bk = ba$, $ck = ca$, also

(I. 3.) $\angle\, bka = bak$, $\angle\, cka = cak$, also $\angle\, bkc = bak + cak$, was unmöglich ist; also fällt d nicht in k.

Wenn d in l fällt, so ist $bl = ba$, $cl = ca$, also (I. 3.) $\angle\, bal = bla$, $\angle\, cal = cla$. Da $\angle\, cla >$ als bla, so ist auch $\angle\, cal >$ als bla. Da $\angle\, bla = bal$, so ist auch $\angle\, cal >$ als bal, was unmöglich ist. Also fällt d nicht in l.

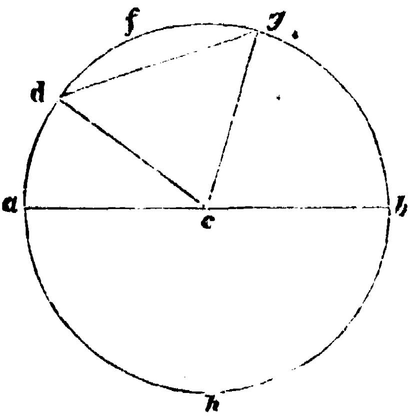
Also kann d nirgends anders fallen, als in a, also decken die $\triangle\, dfg$, abc einander.

Zweiter Beweis.



Man lege fg auf bc, und bringe den Punct d in die Ebene des Dreiecks abc, auf die entgegengesetzte Seite von bc, so dass der Punct d in m fällt. Alsdann ist $bm = ba$, $cm = ca$, also (I. 3.) $\angle\, bma = bam$, und $\angle\, cma = cam$, also $\angle\, bmc$ oder $fdg = bac$. Also (I. 1.) $\triangle\, abc = dfg$.

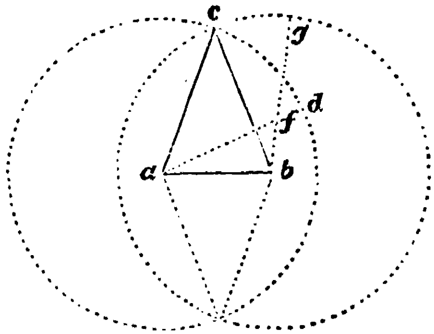
6.



Der Kreis ist eine krumme Linie, welche ganz in einer Ebene liegt, und deren Puncte von einem in derselben Ebene liegenden festen Puncte gleichweit entfernt sind.

Der feste Punct c heisst der *Mittelpunct* oder das *Centrum*, die gleiche Entfernung der Puncte des Kreises vom Mittelpuncte, ca, cd, cf, cg, cb, ch, heisst der *Halbmesser* oder *Radius*, die krumme Linie $adfgbha$, als Länge betrachtet, heisst der *Umfang*, die *Peripherie* oder *Circumferenz*, ein Theil derselben zwischen zwei Puncten, z. B. dfg, heisst der *Bogen*; die grade Linie dg, welche die Endpuncte des Bogens verbindet, heisst die *Sehne* oder *Chorde*; der Winkel dcg, welchen die nach den Endpuncten des Bogens gezogenen Halbmesser mit einander im Mittelpuncte bilden, heisst der *Mittelpunctswinkel* oder *Centralwinkel*, eine grade Linie *a c b*, welche durch den Mittelpunct gezogen wird, heisst der *Durchmesser* oder *Diameter* und ist doppelt so gross als der Halbmesser. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Theile, welche *Halbkreise* heissen.

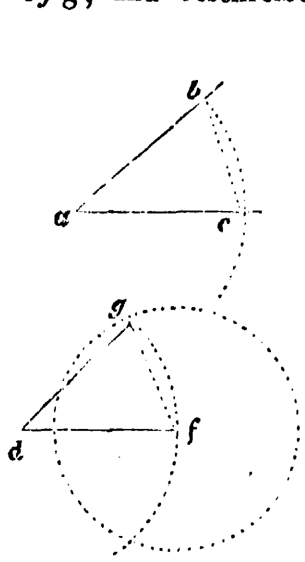
7.



Ueber eine Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben.

Die gegebene Grundlinie sey *a b*, die gegebene Länge der Schenkel sey *a d* = *b g*. Wenn die Ebene, in welcher das Dreieck liegen soll, gegeben ist, so beschreibe man in dieser Ebene, aus *a* als Mittelpunct mit dem Halbmesser *a d*, aus *b* als Mittelpunct mit dem Halbmesser *b g*, zwei Kreise. Wenn diese Halbmesser grösser als $\frac{1}{2}$ *a b* sind, so durchschneiden die Kreise einander in *c*. Dann ist (I. 6.) *a c* = *a d*, *b c* = *b g*; aber nach der Voraussetzung *a d* = *b g*, also *a c* = *b c*, also △ *a b c* gleichschenklig. Wenn die Ebene nicht gegeben ist, so wähle man einen beliebigen Punct *f*, wodurch man die Ebene *a b f* erhält, ziehe in dieser die Halbmesser *a f d* = *b f g*, und beschreibe die Kreise in dieser Ebene.

8.



Einen Winkel einem gegebenen Winkel gleich zu machen.

Der gegebene Winkel sey *b a c*. Aus *a* als Mittelpunct beschreibe man einen Kreis mit einem beliebigen Halbmesser, welcher die Winkelseiten in *b*, *c* schneidet. Man ziehe *b c*. Es sey in der graden Linie, an welcher der Winkel zu zeichnen ist, der Punct *d* als Spitze des Winkels gegeben, so beschreibe man aus *d* als Mittelpunct einen zweiten Kreis mit demselben Halbmesser *d f* = *a b* = *a c*. Aus *f* als

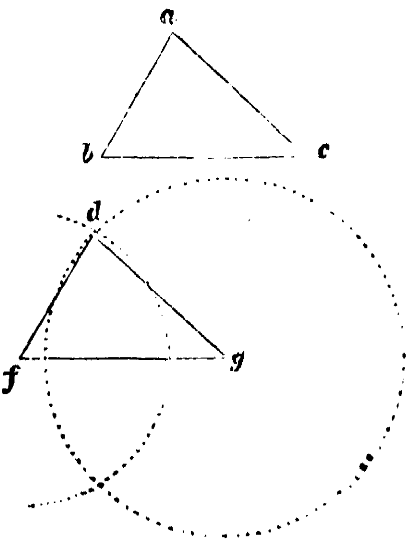
Mittelpunct beschreibe man einen dritten Kreis mit dem Halbmesser bc, welcher den zweiten Kreis in g schneidet. Man ziehe dg, so ist der $\angle fdg = bac$.

Denn $fg = bc$, $dg = df = ab = ac$, also (I. 5.) ist das $\triangle fdg = bac$, also $\angle fdg = bac$.

9.

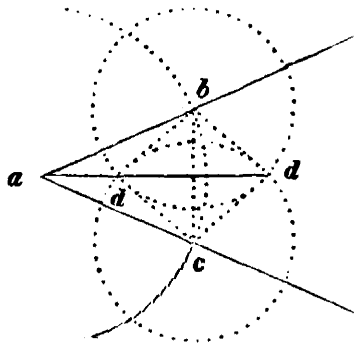
Ein Dreieck einem gegebenen Dreiecke gleich zu machen.

Man mache eine grade Linie $fg = bc$, beschreibe in einer beliebigen Ebene, aus f als Mittelpunct mit dem Halbmesser ba, aus g als Mittelpunct mit dem Halbmesser ca, Kreise, welche einander in d schneiden, so ist (I. 6.) $fd = ba$, $gd = ca$, $fg = bc$, also (I. 5.) $\triangle dfg = abc$.



10.

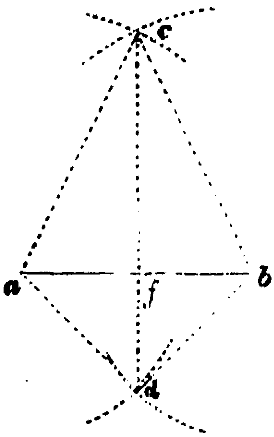
Einen Winkel in die Hälfte zu theilen.



Der gegebene Winkel sey bac. Man beschreibe aus der Spitze des Winkels a als Mittelpunct einen Kreis, welcher die Winkelseiten in b, c schneidet, ziehe bc, und beschreibe über bc als Grundlinie in der Ebene bac ein gleichschenkliges Dreieck bdc (I. 7.), ziehe die grade Linie ad, so theilt sie den $\angle bac$ in die Hälfte. Denn da $ab = ac$, $bd = cd$, $ad = ad$, so ist (I. 5.) $\triangle bad = cad$, also $\angle bad = cad$.

11.

Eine grade Linie in die Hälfte zu theilen.

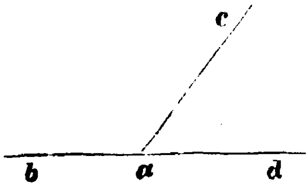


Die gegebene Linie sey ab. Ueber dieselbe als Grundlinie beschreibe man in der nämlichen Ebene zwei gleichschenklige $\triangle\ abc$, abd (I. 7.). Man verbinde cd, so schneidet diese grade Linie die gegebene Linie ab in f, so dass die Theile af, bf einander gleich sind.

Denn da $ac = bc$, $ad = bd$, $cd = cd$, so ist (I. 5.) $\triangle\ acd = bcd$, also $\angle\ acd = bcd$, oder $\angle\ acf = bcf$. Aber auch $ac = bc$, $cf = cf$, also (I. 1.) $\triangle\ acf = bcf$, also $af = bf$.

12.

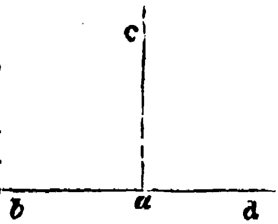
Nebenwinkel sind Winkel, welche an einer graden Linie neben einander liegen, und eine gemeinschaftliche Seite haben.



$\angle\ bac$, dac sind Nebenwinkel, da sie an der graden Linie bd liegen und die gemeinschaftliche Seite ac haben.

13.

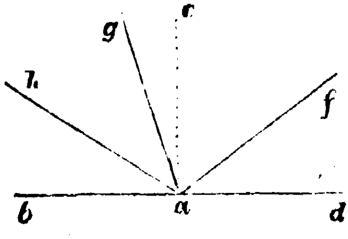
Ein rechter Winkel ist ein Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist.



Der Winkel cab sey seinem Nebenwinkel cad gleich, so heisst er ein rechter Winkel. Die Linie ca heisst auf bad senkrecht, lothrecht (perpendikulär, normal), oder auch das Loth (Perpendikel, Normallinie).

14.

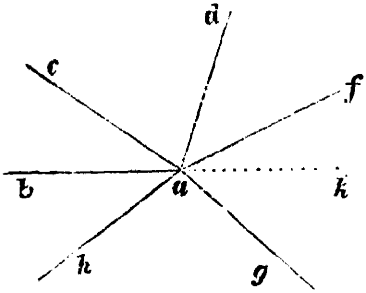
Die Summe zweier Nebenwinkel, und überhaupt die Summe mehrerer Winkel, welche an einer graden Linie in einer Ebene neben einander liegen, ist gleich der Summe zweier rechten Winkel.



Auf der graden Linie bad sey ac senkrecht, und in der Ebene $bacd$ seyen die Linien af, ag, ah gezogen, so ist (I. 13.) $\angle\, bac = cad = R$, und (I. 12.) $\angle\, baf$, daf sind Nebenwinkel. Aber $\angle\, baf = bac + caf = R + caf$, $\angle\, daf = cad - caf = R - caf$, also $\angle\, baf + daf = 2\,R$.

Da $\angle\, baf = bah + hag + gaf$, so ist auch die Summe der Winkel $bah + hag + gaf + fad = 2\,R$.

15.



Die Summe aller Winkel, welche in einer Ebene um einen Punct herum liegen, ist gleich der Summe von vier rechten Winkeln.

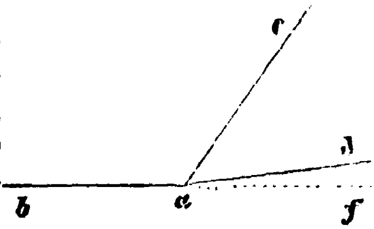
In einer Ebene seyen die Linien ab, ac, ad, af, ag, ah, aus einem Puncte a gezogen. Man verlängere ba nach k, so ist (I. 14.)

$$\angle\, bac + cad + daf + fak = 2\,R,$$
$$\angle\, gak + gah + hab = 2\,R.$$

Da aber $\angle\, fak + gak = fag$, so folgt

$$\angle\, bac + cad + daf + fag + gah + hab = 4\,R.$$

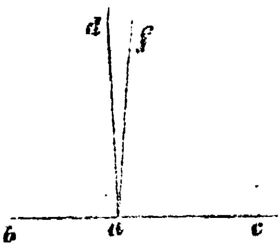
16.



Wenn zwei in einer Ebene liegende Winkel, welche eine gemeinschaftliche Spitze und Seite haben, zusammen zwei rechte betragen, so liegen die andern beiden Winkelseiten in grader Linie.

Es sey $\angle\, bac + cad = 2\,R$. Wäre bad keine grade Linie, und man verlängerte ba nach f, so würde (I. 14.) $\angle\, bac + caf = 2\,R$, also $\angle\, bac + cad = bac + caf$, also $\angle\, cad = caf$ seyn, was unmöglich ist, da ac, ad, baf in einer Ebene liegen; also muss bad eine grade Linie seyn.

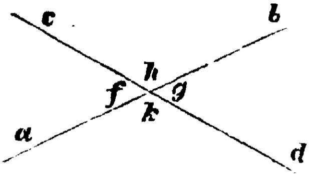
17.



Alle rechte Winkel sind einander gleich. Oder auf eine grade Linie lässt sich aus einem ihrer Puncte in einer Ebene nur eine einzige senkrechte Linie ziehen.

Es seyen auf ab in einer Ebene zwei rechte Winkel dab, fab gesetzt, und es sey $\angle dab <$ als fab. Da $\angle dab = R$, so ist (I. 13.) $\angle dab = dac$, also $\angle dac <$ als fab. Da $\angle fab = R$, so ist (I. 13.) $\angle fab = fac$. Also $\angle dac <$ als fac. Dieses ist unmöglich. Also kann $\angle dab$ nicht kleiner als fab seyn. Eben so beweiset man, dass $\angle dab$ nicht grösser als fab seyn kann. Also sind die rechten Winkel dab, fab einander gleich, und die Lothe ad, af fallen zusammen.

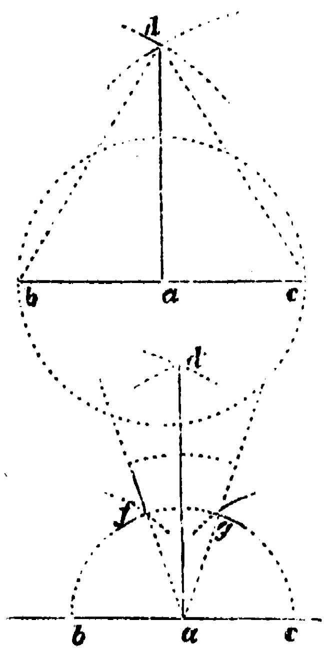
18.



Scheitelwinkel oder Verticalwinkel, welche entstehen, wenn zwei grade Linien einander durchschneiden, sind einander gleich.

Wenn die graden Linien ab, cd einander durchschneiden, so sind die an ihrem Durchschnittspuncte einander entgegengesetzten Winkel f, g und h, k Scheitelwinkel. Aber (I. 14.) $f + h = 2R$, $h + g = 2R$, also $f + h = h + g$, also $f = g$. Ferner $g + k = 2R$, also $h + g = g + k$, also $h = k$.

19.



Auf eine grade Linie aus einem ihrer Puncte eine senkrechte Linie zu errichten.

Die gegebene grade Linie sey bc, ihr gegebener Punct sey a.

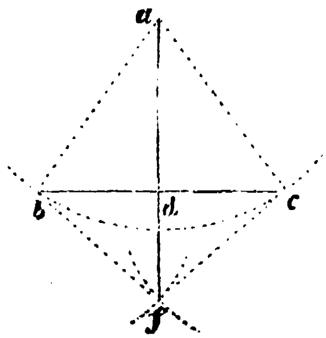
Erste Art.

Man schneide aus a auf bc zwei gleiche Stücke ab, $ab = ac$ (I. 6.), errichte über bc als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck bdc (I. 7.), ziehe ad, so ist ad lothrecht auf bc. Denn $ab = ac$, $bd = cd$, $ad = ad$, also (I. 5.) $\triangle abd = acd$, also $\angle bad = cad$, also $\angle bad = R$ (I. 13.)

Zweite Art.

Man setze an bc in a zwei gleiche Winkel $baf = cag$ an (I. 8.), theile den $\angle fag$ durch ad in die Hälfte (I. 10.), so ist ad lothrecht auf bc. Denn (I. 14.) $\angle baf + fag + cag = 2R$, $\angle baf = cag$, $\angle fag = 2\,fad$, also $2\,baf + 2\,fad = 2R$, also $\angle baf + fad = R$, also $\angle bad = R$. Auf diese Art verfahren die Feldmesser, um auf dem Felde, wo sich die erste Art nicht anwenden lässt, senkrechte Linien zu ziehen. Mit Hülfe eines einfachen Instruments, welches *Diopterkreuz* heisst, tragen sie einen Winkel, welcher einem rechten Winkel sehr nahe kommt, auf beiden Seiten des Puncts a auf die Linie bc, und theilen den kleinen Zwischenraum fg in die Hälfte.

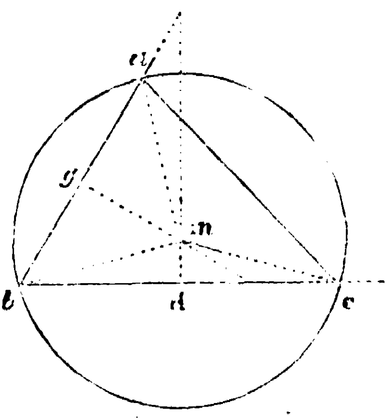
20.



Auf eine grade Linie aus einem ausserhalb derselben gegebenen Puncte eine senkrechte Linie zu fällen.

Die gegebene grade Linie sey bc, der ausserhalb gegebene Punct sey a. Aus a als Mittelpunct beschreibe man einen Kreis (I. 6.), welcher die gegebene Linie in b und c schneidet. Ueber bc als Grundlinie errichte man (I. 7.) ein gleichschenkliges Dreieck bcf in der Ebene des Dreiecks abc, man verbinde af, so schneidet af die bc in d, und ad ist senkrecht auf bc. Denn da $ab = ac$, $bf = cf$, $af = af$, so ist (I. 5.) $\triangle\, abf = acf$, also $\angle baf = caf$, oder $\angle bad = cad$. Aber $ab = ac$, $ad = ad$, also (I. 1.) $\triangle\, abd = acd$, also $\angle adb = adc$, also (I. 13.) $\angle adb = R$.

21.

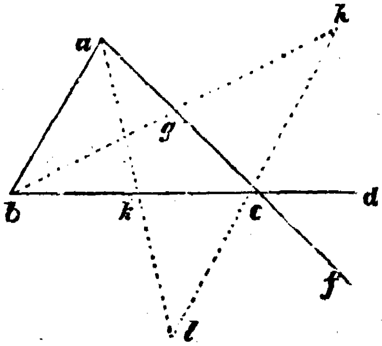


Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Das gegebene Dreieck sey abc. Man theile (I. 11.) ab in g, bc in d, in die Hälfte, errichte (I. 19.) auf ab in g, auf bc in d senkrechte Linien in der Ebene des $\triangle\, abc$, so dass diese senkrechten Linien, gehörig verlängert, die Seiten des $\triangle\, abc$ schneiden. Der Durchschnittspunct m der beiden senkrechten Linien ist der Mittelpunct des umschriebenen

Kreises. Denn da $ag = bg$, $mg = mg$, $\angle agm = bgm = R$, so ist (I. 1.) $\triangle\ agm = bgm$, also $am = bm$. Da $bd = cd$, $md = md$, $\angle\ bdm = cdm = R$, so ist (I. 1.) $\triangle\ bdm = cdm$, also $bm = cm$. Also $am = bm = cm$, also (I. 6.) m der Mittelpunct des umschriebenen Kreises.

22.

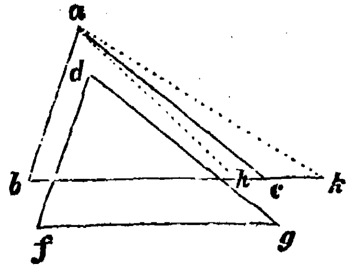


An einem Dreiecke ist der Aussenwinkel grösser als jeder von den innern Gegenwinkeln.

Das $\triangle\ abc$ hat in c die Aussenwinkel $acd = bcf$ (I. 18.), die innern Gegenwinkel sind bac, abc. Man theile ac in g in die Hälfte (I. 11.), ziehe bg, verlängere sie nach h, so dass $gh = bg$ sey, verbinde ch, so ist $ag = cg$, $bg = gh$, $\angle\ agb = cgh$ (I. 18.), also (I. 1.) $\triangle\ agb = cgh$, also $\angle\ ach = bag = bac$. Aber $\angle\ acd >$ als ach, also $\angle\ acd > bac$.

Man theile bc in k in die Hälfte (I. 11.), ziehe ak, verlängere sie nach l, so dass $kl = ak$, verbinde cl, so ist $bk = ck$, $ak = kl$, $\angle\ akb = ckl$ (I. 18.), also (I. 1.) $\triangle\ akb = ckl$, also $\angle\ bcl = abk = abc$. Aber $\angle\ bcf >$ als bcl, also $\angle\ bcf >$ als abc, und auch $\angle\ acd >$ als abc.

23.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und eine Gegenseite gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander.

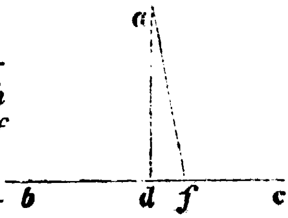
D. h. alsdann sind auch der dritte Winkel und die beiden andern Seiten gegenseitig gleich.

Es sey $ab = df$, $\angle\ abc = dfg$, $\angle\ acb = dgf$. Wäre $fg <$ als bc, so mache man $bh = fg$, verbinde ah, so ist $ab = df$, $bh = fg$, $\angle\ abh = dfg$, also (I. 1.) $\triangle\ abh = dfg$, also $\angle\ ahb = dgf$. Aber $\angle\ dgf = acb$, also $\angle\ ahb = acb$, was unmöglich ist, da (I. 22.) $\angle\ ahb >$ als acb.

Wäre $fg >$ als bc, so mache man $bk = fg$, verbinde ak, so ist $ab = df$, $bk = fg$, $\angle\ abk = dfg$, also (I. 1.) $\triangle\ abk = dfg$, also $\angle\ akb = dgf$. Aber $\angle\ dgf = acb$, also $\angle\, akb = acb$, was unmöglich ist, da (I. 22.) $\angle\, acb >$ als akb.

Da fg weder kleiner noch grösser als bc seyn kann, so ist $fg = bc$. Da nun auch $ab = df$, $\angle\, abc = dfg$, so ist (I. 1.) $\triangle\, abc = dfg$, also auch $\angle\, bac = fdg$, und $ac = dg$.

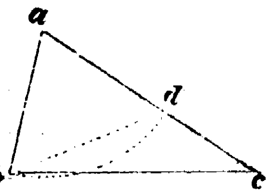
24.



Von einem Puncte, welcher ausserhalb einer graden Linie liegt, lässt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die grade Linie fällen.

Denn es seyen ad, af zwei verschiedene senkrechte Linien, so bilden sie ein $\triangle\, adf$, in welchem (I. 22.) $\angle\, adb >$ als afb. Dieses ist aber unmöglich, da $\angle\, adb = R$, $\angle\, afb = R$, also (I. 17.) $\angle\, adb = afb$ ist. Also können die beiden senkrechten Linien ad, af, kein Dreieck mit einander bilden und fallen also zusammen.

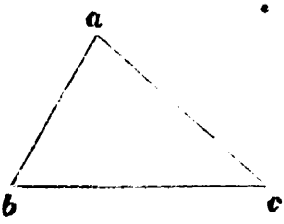
25.



In einem Dreiecke hat die grössere Seite den grössern Gegenwinkel.

Es sey in dem $\triangle\, abc$ die Seite $ac >$ als ab. Man mache $ad = ab$, ziehe bd, so ist in dem $\triangle\, bdc$ der $\angle\, adb >$ als acb (I. 22.). Aber (I. 3.) $\angle\, abd = adb$, also $\angle\, abd >$ als acb, also um so mehr $\angle\, abc >$ als acb. Es liegt aber $\angle\, abc$ der grössern Seite ac, und $\angle\, acb$ der kleinern Seite ab gegenüber.

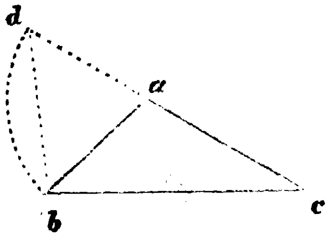
26.



In einem Dreiecke hat der grössere Winkel die grössere Gegenseite.

Es sey in dem $\triangle\, abc$ der Winkel $b >$ als c. Wäre $ab = ac$, so müsste (I. 3.) $\angle\, b = c$ seyn, also kann nicht $ab = ac$ seyn. Wäre $ab >$ als ac, so müsste (I. 25.) $\angle\, c >$ als b seyn. Also kann nicht $ab >$ als ac seyn. Da also ac weder gleich ab noch kleiner als ab seyn kann, so muss ac grösser als ab seyn. Es liegt aber ac dem grössern Winkel b, und ab dem kleinern Winkel c gegenüber.

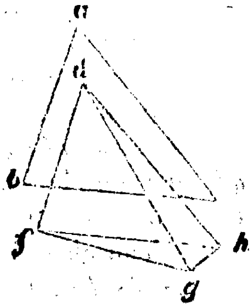
27.



In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite.

In dem $\triangle\, abc$ seyen ab, ac die kleinern Seiten, bc die grössere Seite. Man verlängere ca nach d, und mache $ad = ab$, so ist cd gleich der Summe der Seiten ab, ac. Da $ad = ab$, so ist (I. 3.) $\angle\, cdb = abd$; aber $\angle\, cbd >$ als abd, also $\angle\, cbd >$ als cdb, also (I. 26.) $cd > bc$, also $ab + ac > bc$.

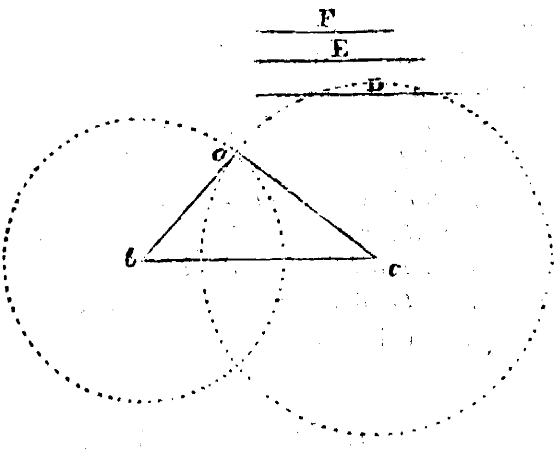
28.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die Zwischenwinkel aber ungleich sind, so hat der grössere Winkel die grössere Gegenseite.

Es sey in den $\triangle\, abc$, dfg die Seite $ab = df$, $ac = dg$, aber $\angle\, bac >$ als fdg. In der Ebene des $\triangle\, dfg$ mache man (I. 8.) den $\angle\, fdh = bac$ und $dh = ac$, so ist auch $dh = dg$, und (I. 1.) $\triangle\, fdh = bac$, also $fh = bc$. Da $dh = dg$, so ist (I. 3.) $\angle\, dgh = dhg$; aber $\angle\, fgh > dgh$, also $\angle\, fgh >$ als dhg; aber $\angle\, dhg >$ als $\angle\, fhg$, also um so mehr $\angle\, fgh > fhg$, also (I. 26.) $fh >$ als fg, also auch $bc >$ als fg.

29.

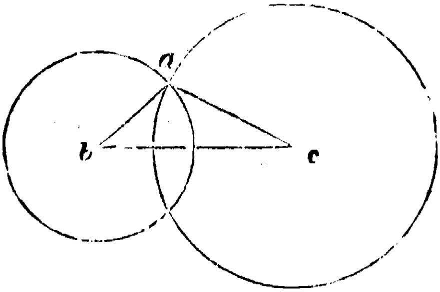


Aus drei gegebenen graden Linien ein Dreieck zu bilden.

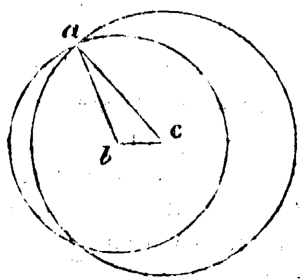
Die gegebenen graden Linien seyen D, E, F. Man mache $bc = D$, u. beschreibe aus c als Mittelpunct mit dem Halbmesser E, aus b als Mittelpunct mit dem Halbmesser F Kreise, welche in einer gemeinschaftlichen Ebene liegen. Wenn diese Kreise einander in a durchschneiden, und man ab, ac zieht, so ist abc das verlangte Dreieck, weil (I. 6.) $ab = F$, $ca = E$ ist.

30.

Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so ist die Summe ihrer Halbmesser grösser als die Entfernung der Mittelpuncte, und der Unterschied ihrer Halbmesser kleiner als die Entfernung der Mittelpuncte.

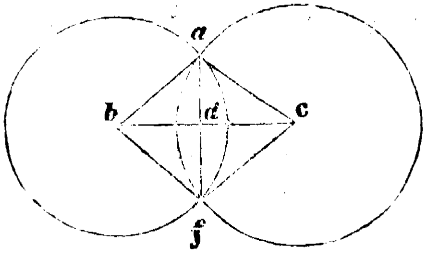


Wenn die Kreise, deren Mittelpuncte b, c sind, einander in a durchschneiden, und man ab, ac, bc zieht, so entsteht ein Dreieck abc, in welchem ab, ac die Halbmesser, bc die Entfernung der Mittelpuncte ist, in welchem also (I. 27.) $ab + ac >$ als bc, und $ac < ab + bc$, also auch $ac - ab <$ als bc ist.



31.

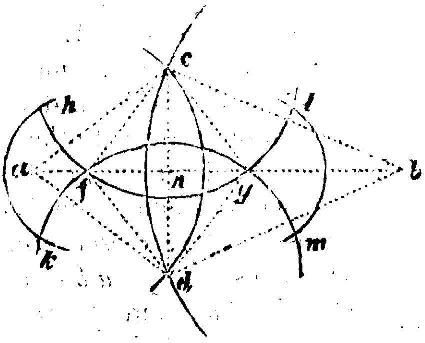
Wenn zwei Kreise einander in einem Puncte durchschneiden, so durchschneiden sie einander noch in einem zweiten Puncte.



Die Kreise, deren Mittelpuncte b, c sind, durchschneiden einander in a. Man fälle aus a auf bc die senkrechte Linie ad (I. 20.), verlängere sie nach f, und mache $df = ad$. Da auch $bd = bd$, $\angle adb = bdf = R$, $cd = cd$, $\angle adc = cdf = R$, so ist (I. 1.) $\triangle adb = bdf$, $\triangle adc = cdf$, also $bf = ab$, $cf = ac$, also liegt (I. 6.) der Punct f im Umfange beider Kreise, eben so wie der Punct a.

32.

Wenn zwei Puncte gegeben sind, mehrere andere Puncte *in derselben graden Linie, durch blosse Kreisdurchschnitte ohne Lineal, zu finden.*



Die gegebenen Puncte seyen a, b. Aus diesen Puncten als Mittelpuncten beschreibe man mit beliebigen ungleichen Halbmessern Kreise in einer Ebene, welche einander in c, d durchschneiden. Da $ca = da$, $cb = db$, $ab = ab$, so ist (I. 5.) $\triangle\, acb = adb$, also $\angle\, cab = bad$. Wenn cd, ab, einander in n durchschneiden, so ist also $\angle\, can = dan$, $ca = da$, $an = an$, also (I. 1.) $\triangle\, can = dan$, also $cn = dn$ und $\angle\, cna = dna = R$ (I. 13.).

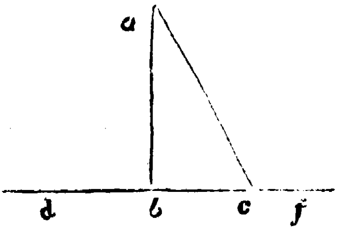
Aus c, d, als Mittelpuncten beschreibe man in der Ebene $acbd$ mit beliebigen gleichen Halbmessern Kreise, welche einander in f, g durchschneiden. Da $cn = dn$, $cf = df$, $fn = fn$, so ist (I. 5.) $\triangle\, cfn = dfn$, also $\angle\, cnf = dnf = R$. Da $cn = dn$, $cg = dg$, $gn = gn$, so ist (I. 5.) $\triangle\, cng = dng$, also $\angle\, cng = dng = R$. Da $\angle\, cnf = R$, $\angle\, cng = R$, so liegen (I. 16.) die Puncte f, n, g in grader Linie. Da $\angle\, cnf = R$, $\angle\, cna = R$, so liegen (I. 17.) die Puncte a, f, n in grader Linie. Da $\angle\, cng = R$, $\angle\, cnb = R$, so liegen die Puncte b, g, n in grader Linie. Also liegen die Puncte f, g in der graden Linie ab.

Um noch mehrere Puncte zu finden, beschreibe man aus f, g, als Mittelpuncten mit beliebigen ungleichen Halbmessern in der Ebene $acbd$ Kreise, welche die beiden vorigen Kreise in h, k und l, m durchschneiden. Da $fh = fk$, $cf = df$, $ch = dk$, so ist (I. 5.) $\triangle\, cfh = dfk$, also $\angle\, cfh = dfk$. Aber (I. 14.) $\angle\, cfn + cfh + hfa = 2\,R$, $\angle\, dfn + dfk + kfa = 2\,R$, also $\angle\, cfn + cfh + hfa = dfn + dfk + kfa$. Aber $\angle\, cfn = dfn$, $\angle\, cfh = dfk$, also $\angle\, hfa = kfa$. Eben so wird bewiesen, dass $\angle\, lgb = mgb$. Da nun $fh = fk$, $gl = gm$, so werden hk, lm von ab senkrecht halbirt. Also kann man sich der Puncte h, k und l, m, wie der Puncte c, d, bedienen.

33.

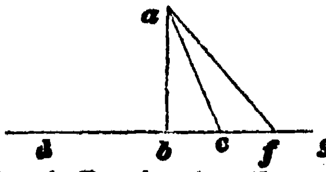
In einem rechtwinkligen Dreiecke ist jeder der beiden andern innern Winkel kleiner als rechter.

Oder wenn man von einem Puncte nach einer graden Linie eine senkrechte und eine schiefe Linie zieht, so ist von den beiden ungleichen Nebenwinkeln der schiefen derjenige, dessen Oeffnung dem Lothe zugekehrt ist, der kleinere, und derjenige, dessen Oeffnung vom Lothe abgekehrt ist, der grössere. Jener heisst *spitz*, dieser *stumpf*.



Denn es sey $\angle\, abc = abd = R$. Aber (I. 22.) $\angle\, acb < abd$, und $\angle\, acf >$ als abc, also $\angle\, acb < R$, und $\angle\, acf > R$.

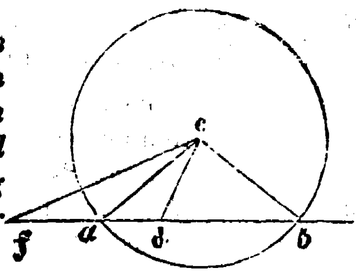
34.



Das Loth ist die kürzeste Entfernung eines Punctes von einer graden Linie.

Es sey ab senkrecht auf dg, so ist (I. 33.) $\angle\, acb < R$, $\angle\, afb < R$, also ist (I. 26.) in dem $\triangle\, abc$ die Seite $ab <$ als ac, und in dem $\triangle\, abf$ die Seite $ab <$ als af. Auch ist (I. 33.) $\angle\, acf > R$. Da nun $\angle\, afc < R$, so ist $\angle\, acf > afc$, also (I. 26.) die Seite $ac < af$.

35.



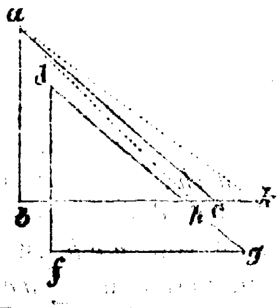
Bei dem Schnitte eines Kreises durch eine grade Linie, oder in einem gleichschenkligen Dreiecke, entstehen Dreiecke, in denen zwei Seiten und der eine Gegenwinkel gegenseitig gleich sind, welche einander aber nicht decken.

Wenn der Kreis c die grade Linie bf, in a, b durchschneidet, so entstehen zwei ungleiche Dreiecke cfa, cfb, in welchen aber zwei Seiten und der eine Gegenwinkel gegenseitig gleich sind, nämlich $cf = cf$, $ca = cb$, $\angle\, cfa = cfb$.

In dem gleichschenkligen Dreiecke abc entstehen zwei ungleiche Dreiecke adc, bdc, in welchen ebenfalls zwei Seiten und der eine Gegenwinkel gegenseitig gleich sind, nämlich $cd = cd$, $ca = cb$, $\angle\, cad = cbd$.

36.

Wenn in zwei re[…]kligen Dreiecken die Hypotenuse



und eine Kathete gegenseitig gleich sind, so decken sie einander.

D. h. die zweite Kathete und die beiden andern Winkel sind dann ebenfalls gegenseitig gleich.

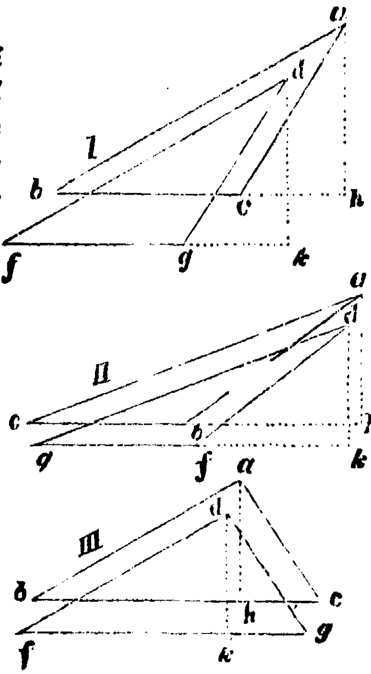
Die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, heisst die *Hypotenuse*, die Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die *Katheten.* In den $\triangle\, abc,\, dfg$, ist $\angle\, b = f = R,\, ac = dg,\, ab = df$.

Es sey $fg <$ als bc. Man mache $bh = fg$, ziehe ah, so ist $ab = df,\, bh = fg,\, \angle\, b = f = R$, also (I. 1.) $\triangle\, abh = dfg$, also $ah = dg$. Aber $dg = ac$, also $ah = ac$, was unmöglich ist, da (I. 34.) $ah <$ als ac seyn muss. Also kann nicht $fg <$ als bc seyn.

Es sey $fg >$ als bc. Man mache $bk = fg$, ziehe ak, so ist $ab = df,\, bk = fg,\, \angle\, b = f = R$, also (I. 1.) $\triangle\, abk = dfg$, also $ak = dg$. Aber $dg = ac$. Also $ak = ac$, was unmöglich ist, da (I. 34.) $ak >$ als ac seyn muss. Also kann nicht $fg >$ als bc seyn.

Da fg weder kleiner noch grösser als bc seyn kann, so ist $fg = bc$. Aber auch $ab = df,\, \angle\, b = f = R$, also (I. 1.) $\triangle\, abc = dfg$, also auch $\angle\, a = d$ und $\angle\, c = g$.

37.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eine Gegenwinkel gegenseitig gleich sind, der andere Gegenwinkel aber in beiden kleiner oder in beiden grösser als ein rechter ist, so decken die Dreiecke einander.

D. h. die dritte Seite und die beiden andern Winkel sind dann ebenfalls gegenseitig gleich.

In den $\triangle\, abc,\, dfg$ ist $ab = df,\, ac = dg,\, \angle\, abc = dfg$. Man fälle (I. 20.) aus a auf bc oder ihre Verlängerung die senkrechte Linie ah, aus d auf fg oder ihre Verlängerung die senkrechte Linie dk, so ist $ab = df,\, \angle\, b = f,\, \angle\, h = k = R$, also (I. 23.) $\triangle\, abh = dfk$, also $bh = fk$,

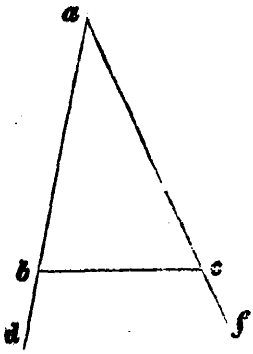
$ah = dk$. Da $ac = dg$, $ah = dk$, $\angle h = k = R$, so ist (I. 36.) $\triangle\, ach = dgk$, also $ch = gk$, und $\angle\, ach = dgk$.

Der andere Gegenwinkel der Dreiecke abc, dfg ist acb, dgf. Dieser Winkel ist entweder der Nebenwinkel des Winkels ach, dgk (I.), oder er ist ihm selbst gleich (II. und III.). Vermöge der Voraussetzung aber, soll, wenn acb der Nebenwinkel von ach ist, auch dgf der Nebenwinkel von dgk seyn, und wenn $\angle\, acb = ach$ ist, auch $\angle\, dgf = dgk$ seyn. Aber es ist bewiesen worden, dass $\angle\, ach = dgk$ ist. Folglich ist in allen obigen Fällen auch $\angle\, acb = dgf$. Aber auch $\angle\, abc = dfg$, und $ab = df$. Also (I. 23.) $\triangle\, abc = dfg$.

Zweiter Cursus.

Parallellinien und Aehnlichkeit.

1.

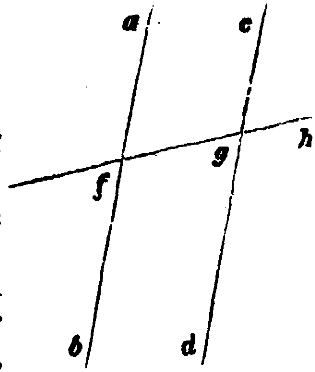


In einem Dreiecke beträgt die Summe der beiden innern Winkel weniger als zwei rechte, und die Summe der beiden Aussenwinkel mehr als zwei rechte Winkel.

Wenn bc von abd, acf durchschnitten wird, so ist (I. 22.) $\angle\ acb < cbd$, also $\angle\ abc + acb < abc + cbd$. Aber (I. 14.) $\angle\ abc + cbd = 2\ R$, also $\angle\ abc + acb < 2\ R$.

Ferner ist (I. 22.) $\angle\ cbd > acb$, also $\angle\ cbd + bcf > acb + bcf$. Aber (I. 14.) $\angle\ acb + bcf = 2\ R$, also $\angle\ cbd + bcf > 2\ R$.

2.



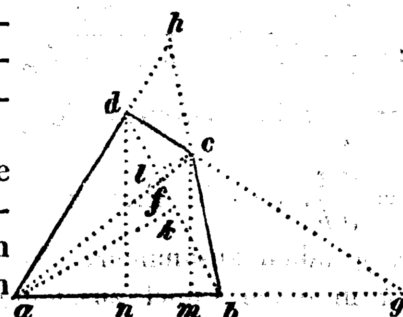
Wenn die innern Winkel zusammen zwei rechte betragen, oder wenn die Wechselswinkel oder Seitenwinkel einander gleich sind, so sind die in einer Ebene liegenden graden Linien parallel.

Die graden Linien ab, cd liegen in einer Ebene und werden von der graden Linie fgh so durchschnitten, dass die innern Winkel $afg + cgf = 2\ R$, oder $bfg + dgf = 2\ R$, oder dass die Wechselswinkel $afg = dgf$, $cgf = bfg$, oder dass die Seitenwinkel $afg = cgh$, $bfg = dgh$. Würden nun ab, cd einander irgendwo auf der Seite von ac durchschneiden, so müsste (II. 1.) $afg + cgf < 2\ R$, $bfg + dgf > 2\ R$ oder (I. 22.) $afg < dgf$, $cgf < bfg$, $afg < cgh$, $bfg > dgh$ seyn, was der Voraussetzung widerspricht. Würden ab, cd einander irgendwo auf der Seite von bd durchschneiden, so müsste (II. 1.) $afg + cgf > 2\ R$, $bfg + dgf < 2\ R$, oder (I. 22.) $afg > dgf$, $cgf > bfg$, $afg > cgh$, $bfg < dgh$ seyn, bindung mit den Diagonallinien ad, bf, cg, die Abschnitte am, dm, bm, fm, cm, gm. Nun berechnet man (V. 10. 11.) die Transversallinie df als Diagonallinie des $\triangle\, cad$ oder bcf; die Transversallinie fg als Diagonallinie des $\triangle\, abf$ oder cag; die Transversallinie gd als Diagonallinie des $\triangle\, abd$ oder bcg.

Beispiel. Es sey $ab = 46$, $bc = 56$, $ca = 39$, $bd = 24$, $cd = 32$, $cf = 18$, $af = 21$, so ist:
$ag = 28$, $bg = 18$, und hieraus
$ad^2 = 1093$, $bf^2 = 2287\frac{3}{13}$, $cg^2 = 2000\frac{1}{23}$,
$ad = 33{,}06055$, $bf = 47{,}82500$, $cg = 44{,}72184$,
$am = 24{,}17861$, $dm = 8{,}88194$,
$bm = 27{,}83845$, $fm = 19{,}98655$,
$cm = 30{,}70454$, $gm = 14{,}01729$,
$df^2 = 677\frac{11}{13}$, $fg^2 = 1060\frac{237}{299}$, $gd^2 = 274\frac{7}{23}$,
$df = 26{,}03548$, $fg = 32{,}56981$, $gd = 16{,}56214$.

28.

An einem ebenen Vierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder verlängerten Seiten wie die Nebendreiecke.



Das Viereck sey $abcd$, die Diagonallinien ac, bd schneiden einander in f, die verlängerten Seiten ab, cd in g; bc, da in h. Man fälle ak, cl auf bd, und cm, dn auf ab senkrecht, so ist

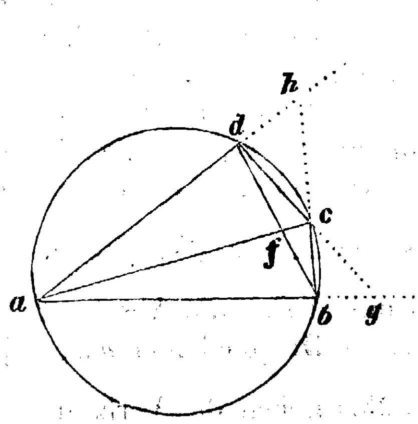
$$\frac{cf}{af} = \frac{cl}{ak} = \frac{\triangle\, bcd}{\triangle\, dab}, \quad \frac{cg}{dg} = \frac{cm}{dn} = \frac{\triangle\, abc}{\triangle\, dab},$$

ebenso $\dfrac{df}{bf} = \dfrac{\triangle\, cda}{\triangle\, abc}$, $\dfrac{bg}{ag} = \dfrac{\triangle\, bcd}{\triangle\, cda}$, $\dfrac{ch}{bh} = \dfrac{\triangle\, cda}{\triangle\, dab}$,

$$\frac{dh}{ah} = \frac{\triangle\, bcd}{\triangle\, abc}.$$

29.

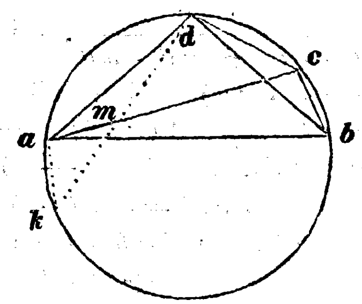
An einem Kreisvierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder verlängerten Seiten wie die Rechtecke der Nebenseiten.



Die Diagonallinien ac, bd schneiden einander in f; die verlängerten Seiten ab, cd in g; bc, da in h. Da $\triangle\, afd \sim bfc$, so ist $\frac{df}{cf} = \frac{da}{bc}$. Da $\triangle\, cfd \sim bfa$, so ist $\frac{af}{df} = \frac{ab}{cd}$. Aus beiden Proportionen folgt: $\frac{af}{cf} = \frac{da \cdot ab}{bc \cdot cd}$. Eben so wird bewiesen, dass $\frac{bf}{df} = \frac{ab \cdot bc}{cd \cdot da}$, $\frac{bg}{ag} = \frac{db \cdot bc}{da \cdot ac}$, $\frac{cg}{dg} = \frac{bc \cdot ca}{bd \cdot da}$, $\frac{ch}{bh} = \frac{ac \cdot cd}{ab \cdot bd}$, $\frac{dh}{ah} = \frac{cd \cdot db}{ca \cdot ab}$.

Sind also zwei Abschnitte einander gleich, so sind auch die Rechtecke der Nebenseiten einander gleich. Z. B. wenn $bf = df$, so ist $ab \cdot bc = cd \cdot da$; wenn $af = cf$, so ist $da \cdot ab = bc \cdot cd$.

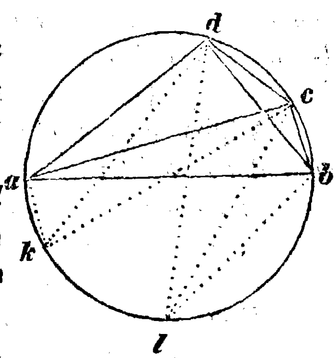
30.



An einem Kreisvierecke ist das Rechteck der Diagonallinien gleich der Summe der Rechtecke der Gegenseiten.

Man mache die Sehne $ak = bc$. Wenn ca, dk einander in m schneiden, so ist (III. 38.) $\angle\, adk = adm = bdc$, $\angle\, dam = dac = dbc$, $\angle\, adb = mdc$, $\angle\, dba = dca = dcm$, also $\triangle\, dam \sim dbc$, $\triangle\, dcm \sim dba$, also $\frac{da}{am} = \frac{bd}{bc}$ oder $bd \cdot am = bc \cdot da$, $\frac{cd}{cm} = \frac{bd}{ab}$, oder $bd \cdot cm = ab \cdot cd$; aus beiden folgt $ac \cdot bd = ab \cdot cd + bc \cdot da$.

31.

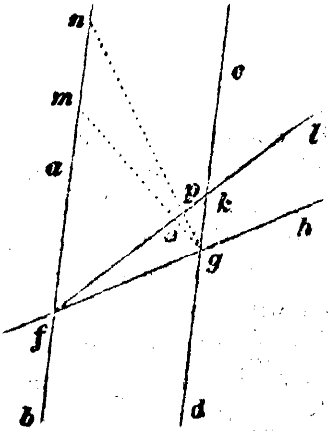


An einem Kreisvierecke verhalten sich die Diagonallinien wie die Summen der Rechtecke der Nebenseiten.

Man mache die Sehnen $ak = bc$, $bl = da$, so ist auch $ck = ab$, $dl = ab$, $cl = dk$. Aber (V. 30.) $ac \cdot dk = ak \cdot cd + da \cdot ck = bc \cdot cd + da \cdot ab$, $bd \cdot cl = dl \cdot bc + cd \cdot bl = ab \cdot bc + cd \cdot da$, also $\frac{ac}{bd} = \frac{da \cdot ab + bc \cdot cd}{ab \cdot bc + cd \cdot da}$.

was der Voraussetzung widerspricht. Es können daher ab, cd einander weder auf der Seite von ac, noch auf der Seite von bd durchschneiden. Sie durchschneiden einander also nirgends, und da sie in einer Ebene liegen, so heissen sie parallel.

3.



Wenn die Linien parallel sind, so ist die Summe der innern Winkel gleich zwei rechten, und die Wechselswinkel, so wie die Seitenwinkel sind einander gleich.

Parallellinien können auf dreierlei Art erklärt werden:

1) Grade Linien, welche in einer Ebene liegen und, soweit man sie auch verlängern mag, nirgends zusammentreffen, heissen *Parallellinien.* Siehe Euklides Elemente, erstes Buch, 35ste Erklärung.

2) Grade Linien, welche in einer Ebene liegen und überall gleichweit von einander entfernt sind, heissen *Parallellinien.*

3) Grade Linien, welche in einer Ebene liegen, und welche an einer andern graden Linie innere Winkel bilden, deren Summe gleich der Summe von zwei rechten Winkeln ist, heissen *Parallellinien.*

Die beiden Hauptlehrsätze der Parallellinien sind:

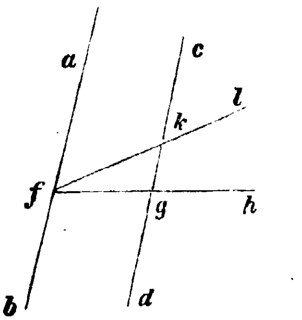
a) *Wenn zwei in einer Ebene liegende grade Linien an einer andern Linie innere Winkel bilden, deren Summe gleich 2 R ist, so durchschneiden sie einander nirgends, so weit man sie auch verlängern mag.*
Dieser Lehrsatz *a*) ist in II. 2. strenge bewiesen worden.

b) *Wenn zwei in einer Ebene liegende grade Linien an irgend einer Linie innere Winkel bilden, deren Summe gleich 2 R ist, so bilden sie auch an jeder andern Linie innere Winkel, deren Summe gleich 2 R ist.*

Es ist den Mathematikern aller Zeiten nicht gelungen, einen Grundsatz von hinreichender Einfachheit, d. h. einen Satz, welcher an und für sich selbst einleuchtend, keinen weitern Beweis erfordert, zu finden, durch welchen sich dieser zweite Lehrsatz *b*) beweisen lässt. Euklides nahm als Grundsatz (Elemente erstes Buch 11r Grundsatz) das Umgekehrte oder die Converse von II. 1. an, nämlich:

c) *Wenn zwei in einer Ebene liegende grade Linien an einer andern Linie innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als 2 R ist, so durchschneiden sie einander an dieser Seite.*

Durch den Satz *c*) wird der Satz *b*) folgendermaassen bewiesen:

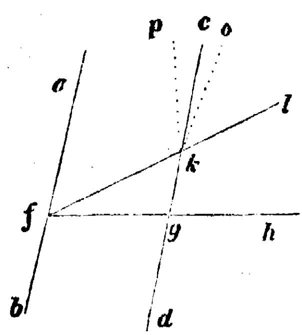


Es sey $afg + cgf = 2R$, so schneiden (II. 2.) ab, cd einander nirgends. Es sey fkl eine beliebige grade Linie. Wäre nun $afk + ckf < 2R$, so würden nach Satz *c*) ab, cd einander oben schneiden, also (II. 1.) $afg + cgf < 2R$ seyn. Wäre aber $afk + ckf > 2R$, also $bfg + dgf < 2R$, so würden nach Satz *c*) ab, cd einander unten schneiden, also (II. 1.) $afg + cgf > 2R$ seyn. Beides widerstreitet der Annahme, dass $afg + cgf = 2R$ ist. Also ist auch $afk + ckf = 2R$, wenn $afg + cgf = 2R$ ist.

Da aber der Satz *c*) nicht einfach genug ist, um als Grundsatz zu gelten, so nimmt man gewöhnlich folgenden Satz als Grundsatz an. (Siehe meine ältere Geometrie, Königsberg 1823, Seite 29, XXI, und Kries' Geometrie § 39. 4.)

d) *Wenn eine grade Linie und ein Punct gegeben sind, so lässt sich in ihrer Ebene nur eine einzige grade Linie ziehen, welche die gegebene Linie nirgends schneidet, so weit man sie auch verlängern mag.*

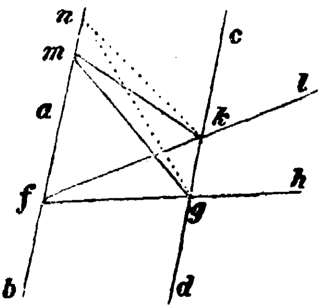
Durch den Satz *d*) wird der Satz *b*) folgendermaassen bewiesen:



Es sey $afg + cgf = 2R$, so schneiden ab, cd einander nirgends. Es sey fkl eine beliebige grade Linie. Wäre nun $afk + ckf < 2R$, so lässt sich in der Ebene abk die ko so ziehen, dass $afk + okf = 2R$ ist. Also würde (II. 2.) ko die ab nirgends schneiden. Also müsste es in der Ebene abk zwei grade Linien kc, ko geben, welche die ab nirgends schneiden, was dem Satz *d*) widerstreitet. Wäre aber $afk + ckf > 2R$, so lässt sich in der Ebene abk die kp so ziehen, dass $afk + pkf = 2R$ ist. Also würde (II. 2.) kp die ab nirgends schneiden. Also müsste es in der Ebene abk zwei grade Linien kc, kp geben, welche die ab nirgends schneiden, was dem Satze d) widerstreitet. Also ist $afk + ckf$ weder grösser noch kleiner als $2R$. Also ist $afk + ckf = 2R$, wenn $afg + cgf = 2R$ ist.

Ich nehme noch folgenden Satz als Grundsatz an:

f) *Wenn zwei Grössen auf eine solche Art von einander abhängen, dass mit der einen auch die andre wächst, und dass beide eine gemeinschaftliche Grenze haben, so muss, wenn die eine von ihnen diese Grenze erreicht, auch die andre dieselbe Grenze erreichen.*



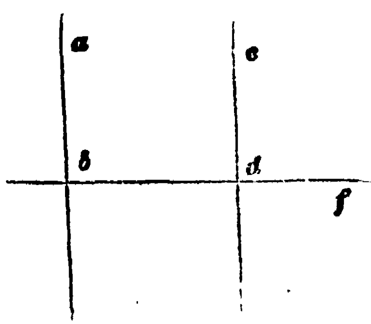
Durch den Satz *f)* wird der Satz *b)* folgendermaassen bewiesen:

Es sey $afg + cgf = 2R$, und fkl eine beliebige grade Linie. Man nehme auf ab beliebige Puncte m, n an, und ziehe mg, mk, ng, nk. Man bezeichne die Summe der beiden innern Winkel an fg durch A, an fk durch B, so ist:

für den Punct m: $A = afg + mgf$, $B = afk + mkf$,
für den Punct n: $A = afg + ngf$, $B = afk + nkf$.

Wenn fn grösser als fm ist, so ist offenbar ngf grösser als mgf, und nkf grösser als mkf. Wenn also fm grösser wird, so wird sowohl A grösser, als B grösser. Also hängen die beiden Summen A, B so von einander ab, dass, wenn die eine zunimmt, auch die andre zunehmen muss. Aber so lange sich der Punct m noch irgendwo auf der graden Linie af befindet, ist (II. 1.) sowohl $A < 2R$, als auch $B < 2R$. Also ist $2R$ die gemeinschaftliche Grenze von A und B. Also wird nach Satz *f)*, wenn $A = 2R$ ist, auch $B = 2R$ seyn. Wenn also $afg + cgf = 2R$ ist, so ist auch $afk + ckf = 2R$.

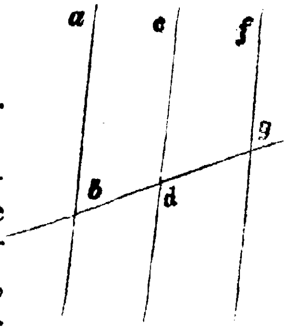
4.



Grade Linien, welche auf einer andern graden Linie senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, sind parallel.

$\angle abd = R$, $\angle cdf = cdb = R$, also $\angle abd + cdb = 2R$, also (II. 2.), $ab \frown cd$.

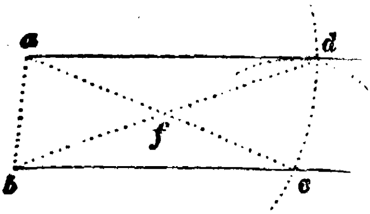
5.



Wenn zwei grade Linien einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel.

Es wird angenommen, dass die graden Linien ab, cd, fg in einer Ebene liegen, und dass sowohl ab als cd der Linie fg parallel sey. Da $ab \parallel fg$, so ist (II. 3.) $\angle\, abg + fgb = 2\,R$. Da $cd \parallel fg$, so ist (II. 3.) $\angle\, cdg + fgb = 2\,R$. Folglich ist $\angle\, abg = cdg$. Da diese Winkel Seitenwinkel sind, so sind (II. 2.) $ab \parallel cd$.

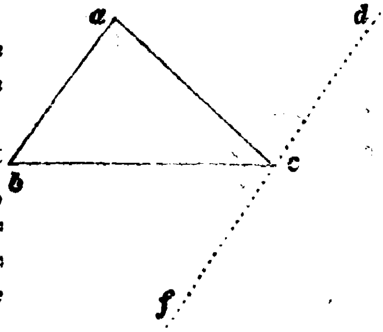
6.



Aus einem Puncte eine grade Linie einer andern graden Linie parallel zu ziehen.

Der gegebene Punct sey a, die gegebene Linie bc. Man verbinde ab, ac, beschreibe aus a mit dem Halbmesser bc, aus c mit dem Halbmesser ab Kreise, und zwar in der Ebene des $\triangle\, abc$. Da $ab + bc > ac$ (I. 27.), so betragen die Halbmesser der beiden Kreise zusammen mehr als die Entfernung der Mittelpuncte ac, also (I. 30.) durchschneiden die Kreise einander in d, und es ist (I. 5. 9.) $\triangle\, acd = cab$, also $\angle\, cad = acb$. Da nun diese Dreiecke acd, cab, also auch die graden Linien ad, bc in einer Ebene liegen, so dass ac, bd einander in f schneiden, und die Wechselswinkel $cad = acb$ sind, so sind (II. 2.) $ad \parallel bc$.

7.

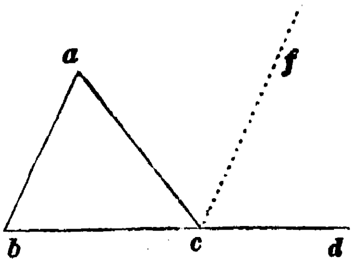


In einem Dreiecke ist die Summe der innern Winkel gleich der Summe von zwei rechten Winkeln.

Man ziehe $dcf \parallel ab$, so ist (II. 3.) $\angle\, abc + dcb = 2\,R$, oder $\angle\, abc + acb + dca = 2\,R$. Aber (II. 3.) $\angle\, dca = bac$, also $\angle\, abc + acb + bac = 2\,R$.

8.

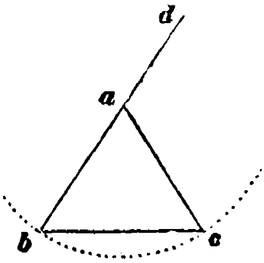
An einem Dreiecke ist der Aussenwinkel gleich der Summe der beiden innern Gegenwinkel.



Man ziehe $cf \frown ab$, so ist (II. 3.) $\angle\, fcd = abc$, $\angle\, acf = bac$, also $\angle\, acd = abc + bac$.

9.

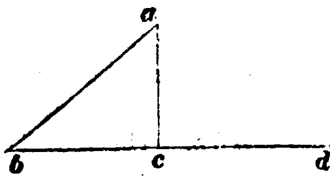
An einem gleichschenkligen Dreiecke ist der Aussenwinkel an der Spitze doppelt so gross als jeder Winkel an der Grundlinie.



Nach (II. 8.) ist $\angle\, cad = abc + acb$. Aber $ab = ac$, also (I. 3.) $\angle\, abc = acb$, also $\angle\, cad = 2.\ abc = 2.\ acb$.

10.

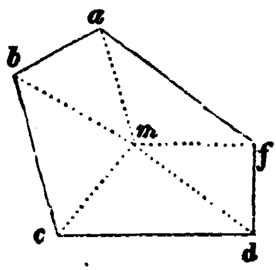
Im rechtwinkligen Dreiecke machen die beiden spitzen Winkel zusammen einen rechten Winkel aus.



Nach (II. 8.) ist $\angle\, acd = abc + bac$. Aber $\angle\, acd = acb = R$, also $\angle\, abc + bac = R$.

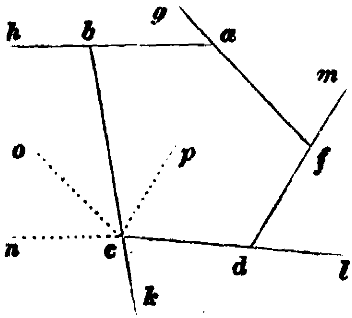
11.

In jedem Vielecke, dessen Winkelpuncte alle in einer Ebene liegen, ist die Summe aller innern Umfangswinkel so viel mal zwei rechte Winkel, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.



Die Anzahl der Seiten des Vielecks sey N, die Summe der innern Umfangswinkel $abc + bcd$ u. s. w. $= S$. Man wähle einen beliebigen Punct m im Innern der Figur, verbinde diesen Punct mit den Ecken a, b, c u. s. w., so ergeben sich soviel Dreiecke als das Vieleck Seiten hat, nämlich N. In jedem Dreiecke ist die Summe der Winkel $= 2\,R$ (II. 7.). Also ist die Summe der Winkel aller Dreiecke $N.\ 2\ R$. Die Summe der Winkel an den Grundlinien der Dreiecke ist $= S$. Die Winkel an den Spitzen der Dreiecke liegen um den Punct m herum, und betragen also (I. 15.) $4\,R$. Demnach ist $N.\,2\,R = S + 4\,R$, also $S = N.\,2\,R - 4\,R$.

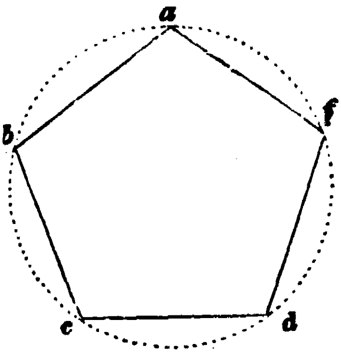
12.



An jedem Vielecke, dessen Winkelpuncte alle in einer Ebene liegen, ist die Summe der Aussenwinkel gleich vier rechten Winkeln.

Man ziehe $cn \parallel bh$, $co \parallel ag$, $cp \parallel fm$, so ist (II. 3.) $\angle\, kcn = cbh$, $\angle\, nco = bag$, $\angle\, ocp = afm$, $\angle\, pcd = fdl$. Aber (I. 15.) $\angle\, dck + kcn + nco + ocp + pcd = 4\,R$, also auch $\angle\, dck + cbh + bag + afm + fdl = 4\,R$.

13.

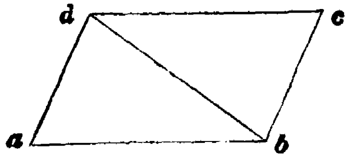


Der innere Umfangswinkel eines regelmässigen ebenen Vielecks, dessen Seiten und Winkel alle einander gleich sind, ist gleich zwei rechten Winkeln weniger dem Quotienten, welcher aus der Division von vier rechten durch die Seitenzahl entsteht.

Die Summe aller Aussenwinkel ist (II. 12.) $= 4\,R$; da alle Aussenwinkel des regelmässigen Vielecks einander gleich sind, so ist jeder $= \frac{4\,R}{N}$. Jeder Aussenwinkel macht mit dem innern Umfangswinkel $2\,R$, also ist der innere Umfangswinkel gleich $2\,R - \frac{4\,R}{N}$.

Z. B. beim Dreieck $\frac{2}{3}\,R$, beim Viereck R, beim Fünfeck $\frac{6}{5}\,R$, beim Sechseck $\frac{8}{6}\,R$, beim Siebeneck $\frac{10}{7}\,R$ u. s. w.

14.

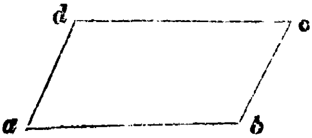


Ein Parallelogramm, d. h. ein ebenes Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, wird von seiner Diagonallinie in zwei gleiche Dreiecke getheilt.

Da $ab \parallel cd$, so ist (II. 3.) $\angle\, abd = cdb$. Da

$bc \parallel da$, so ist $\angle\, cbd = adb$. Nun ist $bd = bd$, also (I. 2.) $\triangle\, abd = cdb$.

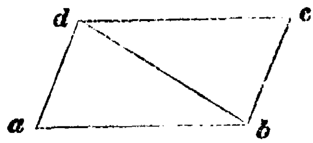
15.



In einem Parallelogramm sind die Gegenwinkel einander gleich.

Da $ab \parallel cd$, so ist (II. 3.) $\angle\, abc + bcd = 2\, R$. Da $bc \parallel da$, so ist $\angle\, bcd + cda = 2\, R$. Also ist $\angle\, abc + bcd = bcd + cda$, also $\angle\, abc = cda$. Eben so ist $\angle\, bcd = dab$.

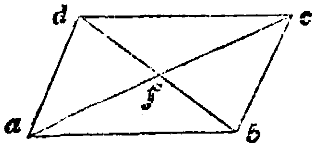
16.



In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich, oder Parallellinien zwischen Parallellinien sind einander gleich.

Da $ab \parallel cd$, $bc \parallel da$, so ist (II. 14.) $\triangle\, abd = cdb$, also $ab = cd$, $bc = da$.

17.

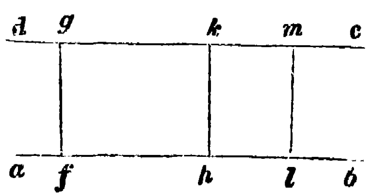


In einem Parallelogramm halbiren die Diagonallinien einander.

Wenn von zwei Puncten Parallellinien nach einerlei Richtung gehen, so heissen ihre Endpuncte *gleichnamig*; wenn sie aber nach entgegengesetzten Richtungen gehen, so heissen sie *wechselnamig*. So sind auf den Parallellinien ab, dc die Puncte b, c gleichnamig zu den Puncten a, d und umgekehrt; aber die Puncte b, d wechselnamig zu den Puncten a, c und umgekehrt. Die Diagonallinien sind also die Verbindungslinien der wechselnamigen Puncte.

Da $ab \parallel cd$, $bc \parallel da$, so ist (II. 3.) $\angle\, baf = dcf$, $\angle\, abf = cdf$, und (II. 16.) $ab = cd$. Also (I. 2.) $\triangle\, abf = cdf$, also $bf = df = \frac{1}{2}\, bd$, und $af = cf = \frac{1}{2}\, ac$.

18.



Zwischen Parallellinien sind alle senkrechten Linien einander gleich.

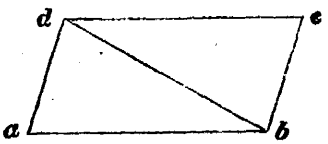
Jede dieser senkrechten Linien heisst daher der Abstand der Parallellinien, oder auch die Höhe der Parallelogramme oder Dreiecke, welche zwischen den Parallellinien liegen.

Es sey $ab \parallel cd$; auf ab seyen die senkrechten Linien fg, hk, lm errichtet. Da $\angle gfh = R$, $\angle khf = R$, so ist $\angle gfh + khf = 2\,R$, also (II. 3.) $fg \parallel hk$, also $fhkg$ ein Parallelogramm, also (II. 16.) $fg = hk$ und (II. 15.) $\angle k = f = R$, $\angle g = h = R$.

Eben so wird bewiesen, dass auch $lm = hk = fg$, und dass $\angle m = R$.

19.

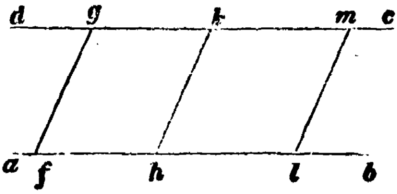
Wenn zwei grade Linien parallel und einander gleich sind, so sind auch die Verbindungslinien ihrer gleichnamigen Endpuncte parallel und einander gleich.



Es sey $ab \parallel cd$, so ist (II. 3.) $\angle abd = cdb$. Aber auch $ab = cd$ und $bd = bd$, also (I. 1.) $\triangle abd = cdb$, also $da = bc$ und $\angle cbd = bda$, also (II. 2.) $da \parallel bc$.

20.

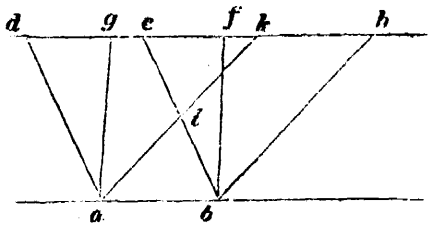
Wenn an einer graden Linie mehrere einander gleiche Parallellinien liegen, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpuncte eine grade Linie, welche der Grundlinie parallel ist.



Es sey $ab \parallel cd$, und $fg \parallel = hk \parallel = lm$, so ist (II. 19.) $kg \parallel fh$, $mk \parallel hl$, also (II. 3.) $\angle fhk + hkg = 2\,R$. Aber auch $\angle fhk + khl = 2\,R$, also $\angle hkg = khl$. Aber auch $\angle khl + hkm = 2\,R$, also $\angle hkg + hkm = 2\,R$, also (I. 16.) gkm eine grade Linie.

21.

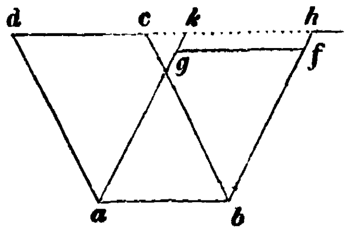
Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und von gleicher Höhe sind einander an Inhalt gleich.



Die Parallelogramme $abcd$, $abfg$, $abhk$ haben einerlei Grundlinie ab und liegen zwischen Parallellinien ab, dh, haben also gleiche Höhen (II. 18.). In $abcd$ ist (II. 16.) $ad = bc$ und $ab = cd$. In $abfg$ ist $ag = bf$ und $fg = ab$. In $abhk$ ist $ak = bh$ und $hk = ab$. Also ist

$cd = fg = hk$. Wenn man von cd, fg das Stück cg nimmt, so ist $gd = fc$. Wenn man zu cd, hk das Stück ck hinzulegt, so ist $kd = hc$. Also (I. 5.) ist $\triangle\, agd = bfc$ und $\triangle\, akd = bhc$. Wenn man zu den $\triangle\, agd$, bfc das Trapez $abcg$ hinzufügt, so ist $abcd = abfg$. Wenn man von den Dreiecken akd, bhc das gemeinschaftliche $\triangle\, clk$ wegnimmt und zu den Trapezien $alcd$, $blkh$ das $\triangle\, abl$ hinzufügt, so ist $abcd = abhk$.

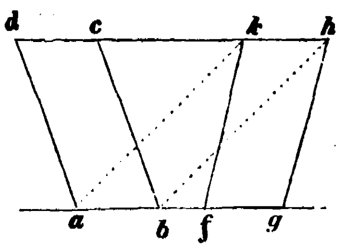
22.



Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

Die Parallelogramme $abcd$, $abfg$ sollen vermöge der Voraussetzung gleichen Inhalt haben. Da $cd \frown ab$, $fg \frown ab$, so müssen cd, fg entweder zusammenfallen oder (II. 5.) parallel seyn. Wenn cd, fg nicht zusammenfallen, so verlängere dc nach kh, dann ist (II. 21.) $abcd = abhk$. Aber auch $abcd = abfg$, also $abfg = abhk$, was unmöglich ist, da sie um das Parallelogramm $gfhk$ unterschieden sind. Also müssen cd, fg zusammenfallen.

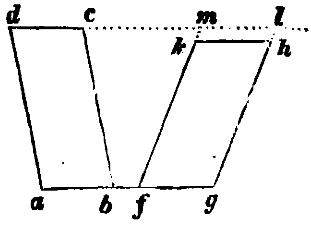
23.



Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und von gleicher Höhe sind an Inhalt gleich.

Es wird angenommen, dass $ab = fg$ sey. Da $hk \frown = fg$, so ist $hk \frown = ab$, also (II. 19.) $abhk$ ein Parallelogramm, also (II. 21.) $abcd = abhk$, $abhk = fghk$, also $abcd = fghk$.

24.

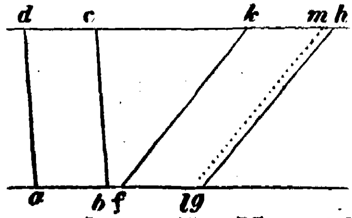


Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

Es wird angenommen, dass $ab = fg$ sey, dass ab, fg in grader Linie liegen, und dass an Inhalt $abcd =$

$fghk$ sey. Da $hk \parallel fg$, $fg \parallel cd$, so ist (II. 5.) $hk \parallel cd$. Wenn man dc nach ml verlängert, so ist (II. 23.) $abcd = fglm$. Also ist $fghk = fglm$. Dies ist unmöglich, wenn nicht hk, lm zusammenfallen. Also muss hk in der Verlängerung von dc liegen.

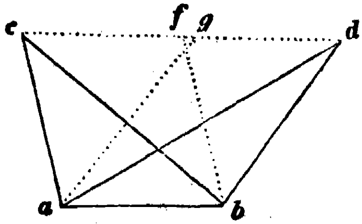
25.



Parallelogramme von gleicher Höhe und gleichem Inhalt haben gleiche Grundlinien.

Es wird angenommen, dass $abcd = fghk$ sey, und $dckh$ eine grade mit ag parallele Linie sey. Wäre ab nicht $= fg$, so sey $ab = fl$. Man ziehe $lm \parallel fk$, so ist (II. 23.) $abcd = flmk$, also auch $fghk = flmk$. Dieses ist aber unmöglich, wenn nicht l in g fällt. Also ist $ab = fg$.

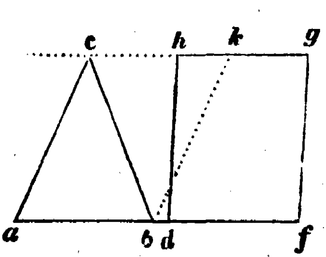
26.



Dreiecke auf einerlei Grundlinie und von gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Es wird angenommen, dass $cd \parallel ab$ sey. Man ziehe $bf \parallel ac$, $ag \parallel bd$, so ist (II. 14.) $\triangle\, abc = \frac{1}{2}\, abfc$, $\triangle\, abd = \frac{1}{2}\, abdg$, und (II. 21.) $abfc = abdg$, also $\triangle\, abc = abd$.

27.

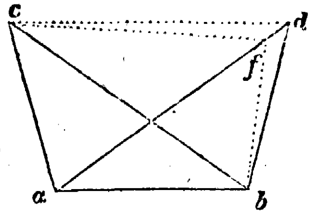


Ein Dreieck ist an Inhalt die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe.

Es wird angenommen, dass $ab = df$ und dass chg eine grade der af parallele Linie sey. Man ziehe $bk \parallel ac$, so ist (II. 14.) $\triangle\, abc = \frac{1}{2}\, abkc$ und (II. 23.) $abkc = dfgh$, also ist $\triangle\, abc = \frac{1}{2}\, dfgh$.

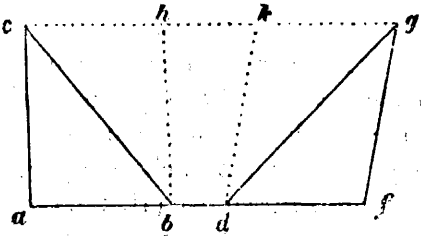
28.

Dreiecke auf einerlei Grundlinie und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.



Es wird angenommen, dass die $\triangle$ abc, abd an Inhalt gleich sind und in einer Ebene liegen. Wäre cd nicht $\frown$ ab, so sey cf $\frown$ ab, folglich (II. 26.) $\triangle$ $abc = abf$, also $\triangle$ $abf = abd$, was unmöglich ist. Also ist cd $\frown$ ab.

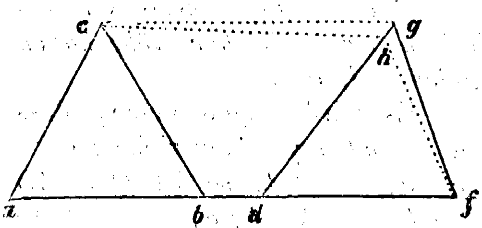
29.



Dreiecke auf gleichen Grundlinien und von gleicher Höhe sind an Inhalt gleich.

Es wird angenommen, dass $ab = df$, und dass cg eine grade der af parallele Linie sey. Man ziehe bh $\frown$ ac, dk $\frown$ fg, so ist (II. 14.) $\triangle$ $abc = \frac{1}{2}$ $abhc$, $\triangle$ $dfg = \frac{1}{2}$ $dfgk$, und (II. 23.) $abhc = dfgk$, also $\triangle$ $abc = dfg$.

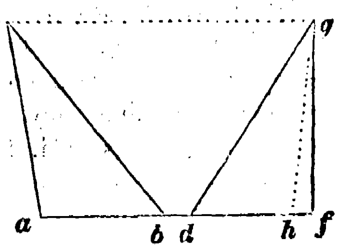
30.



Dreiecke auf gleichen Grundlinien und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

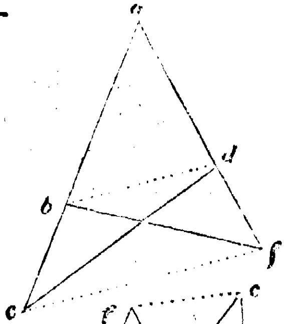
Es wird angenommen, dass $ab = df$ sey, dass die $\triangle$ abc, dfg an Inhalt gleich seyen und in einer Ebene liegen. Wäre cg nicht $\frown$ af, so sey ch $\frown$ af. Dann ist (II. 29.) $\triangle$ $abc = dfh$. Aber auch $\triangle$ $abc = dfg$. Also $\triangle$ $dfh = dfg$, was unmöglich ist. Also ist cg $\frown$ af.

31.



Dreiecke von gleicher Höhe und gleichem Inhalt haben gleiche Grundlinien.

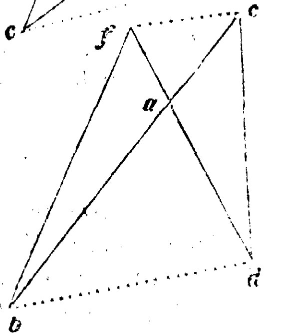
Es wird angenommen, dass cg eine grade der af parallele Linie sey, und dass an Inhalt $\triangle$ $abc = dfg$ sey. Wäre ab nicht $= df$, so sey $ab = dh$, und gh gezogen. Dann ist (II. 29.) $\triangle$ $abc = dhg$. Aber auch $\triangle$ $abc = dfg$. Also $\triangle$ $dhg = dfg$, was unmöglich ist. Also ist $df = ab$.



32.

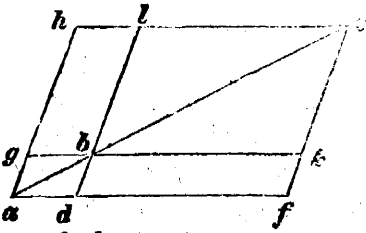
Wenn die Seiten eines Winkels durch Parallellinien geschnitten werden, so sind die wechselnamigen Dreiecke an Inhalt gleich.

Es sey $bd \parallel cf$, so ist (II. 26.) $\triangle\, bdf = bdc$. Addirt oder subtrahirt man das $\triangle\, abd$, so ist $\triangle\, abf = adc$.



33.

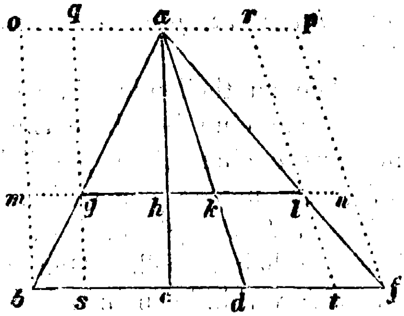
Wenn von drei in grader Linie liegenden Puncten drei Paare von Parallellinien in einer Ebene gezogen werden, so sind die an diesen Puncten liegenden Parallelogramme an Inhalt gleich.



Die Puncte a, b, c liegen in grader Linie, und $af \parallel bk \parallel ch$, $ah \parallel bl \parallel cf$. Also (II. 14.) $\triangle\, abg = abd$, $\triangle\, ach = acf$, $\triangle\, bcl = bck$, also $ach - abg - bcl = acf - abd - bck$, d. h. $blgh = bkfd$. Ferner $ach - bcl + abd = acf - bck + abg$, d. h. $adlh = agkf$. Ferner $ach - abg + bck = acf - abd + bcl$, d. h. $chgk = cldf$.

34.

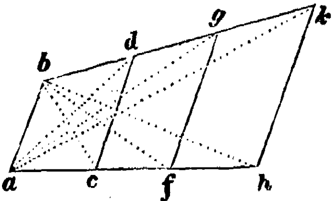
Parallellinien schneiden in Dreiecken von gleichen Grundlinien und Höhen gleiche Stücke ab.



D. h. wenn $bc = df$, und $gl \parallel bf$, so ist auch $gh = kl$. Denn wenn man über bc, df die Parallelogramme vollendet, so ist (II. 33.) $aomh = aqsc$, $apnk = artd$. Aber (II. 23.) $aomh = apnk$, also $aqsc = artd$, also (II. 25.) $sc = dt$. Aber (II. 16.) $so = gh$, $dt = kl$, also $gh = kl$.

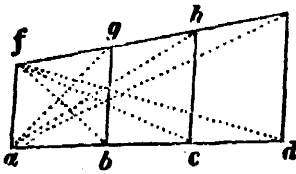
35.

Parallellinien schneiden auf beliebigen Transversallinien gleiche Stücke ab.



D. h. wenn die Parallellinien ab, cd, fg, hk von den Transversallinien ah, bk geschnitten werden, und $ac = fh$ ist, so ist auch $bd = gk$. Denn wenn man ad, ag, ak, und bc, bf, bh zieht, so ist (II. 26.) $\triangle\, bac = abd$, $\triangle\, baf = abg$, $\triangle\, bah = abk$, also $\triangle\, bfh = agk$. Aber $ac = fh$, also (II. 29.) $\triangle\, bac = bfh$, also auch $\triangle\, abd = agk$, also (II. 31.) $bd = gk$.

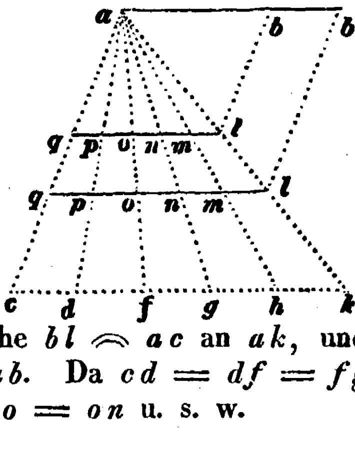
36.



Wenn grade Linien, welche in einer Ebene liegen, in gleiche Theile getheilt werden, und zwei Verbindungslinien der Theilpuncte parallel sind, so sind auch die übrigen Verbindungslinien der Theilpuncte parallel.

Es sey $ab = bc = cd$ und $fg = gh = hk$. Wenn nun $af \parallel bg$, so ist auch $af \parallel ch$, und $af \parallel dk$. Denn man ziehe fb, fc, fd und ag, ah, ak, so ist (II. 26.) $\triangle\, fab = afg$. Aber (II. 29.) $\triangle\, fab = fbc = fcd$, und $\triangle\, afg = agh = ahk$, also $\triangle\, fac = afh$, $\triangle\, fad = afk$, also (II. 28.) $af \parallel ch$ und $af \parallel dk$.

37.

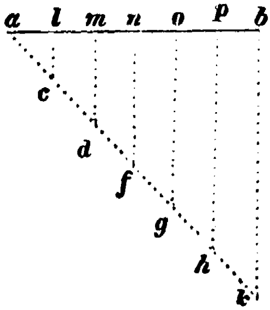


Eine grade Linie durch Diagonallinien in gleiche Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe eine beliebige Linie ac, und aus c eine Linie parallel ab; auf dieser nehme man soviel gleiche Stücke cd, df, fg u. s. w. als ab Theile erhalten soll. Den letzten Punct k verbinde man mit a, ziehe $bl \parallel ac$ an ak, und $lq \parallel kc$, so ist (II. 16.) $lq = ab$. Da $cd = df = fg$ u. s. w., so ist (II. 34.) $qp = po = on$ u. s. w.

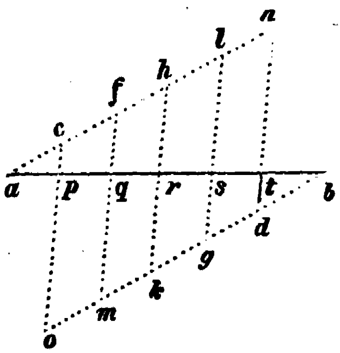
38.

Eine grade Linie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen.



Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe aus a eine grade Linie in beliebiger Richtung und nehme darauf soviel gleiche Stücke ac, cd, df u. s. w. als ab Theile erhalten soll, den letzten Punct k verbinde man mit b, ziehe mit kb Parallellinien durch die Theilpuncte von ak, so theilen diese Parallellinien auch ab in gleiche Theile. Denn da $ac = cd = df$ u. s. w. und $cl \frown dm \frown fn$ u. s. w., so ist (II. 35.) $al = lm = mn$ u. s. w.

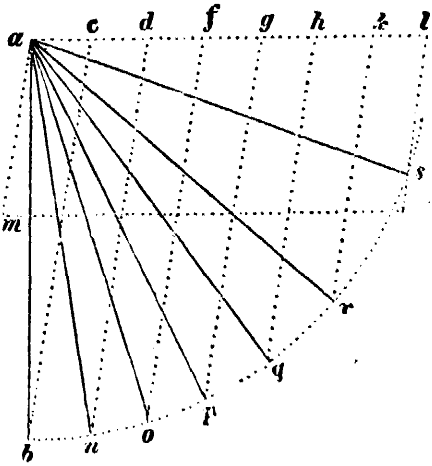
39.



Eine grade Linie durch zwei Parallellinien in gleiche Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe aus a, b in beliebiger Richtung zwei Parallellinien ac, bd, und nehme auf denselben soviel gleiche Stücke als ab Theile erhalten soll weniger eins. Wenn man nun den ersten Punct c mit dem letzten o, den zweiten f mit dem zweitletzten m u. s. w. verbindet, so theilen diese Linien die ab auf die verlangte Art. Denn da $cf \frown = om$, $fh \frown = mk$ u. s. w., so ist (II. 19.) $co \frown fm \frown hk$ u. s. w., also (II. 35.) $ap = pq = qr$ u. s. w.

40.

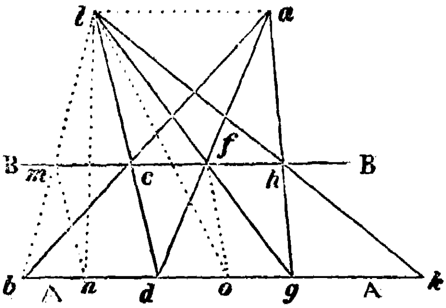


Eine grade Linie durch Parallellinien in eine unbestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe aus a eine beliebige grade Linie al, nehme auf derselben eine beliebige Anzahl gleicher Stücke ac, cd, df u. s. w., ziehe durch die Theilpuncte nach einer beliebigen Richtung am Parallellinien, beschreibe aus

a mit dem Halbmesser ab einen Kreisbogen, so wird der Halbmesser $an = ab$ durch cb (II. 35.) in 2 gleiche Theile, $ao = ab$ durch cb, dn, in 3 gleiche Theile, $ap = ab$ durch cb, dn, fo in 4 gleiche Theile u. s. w. getheilt.

41.



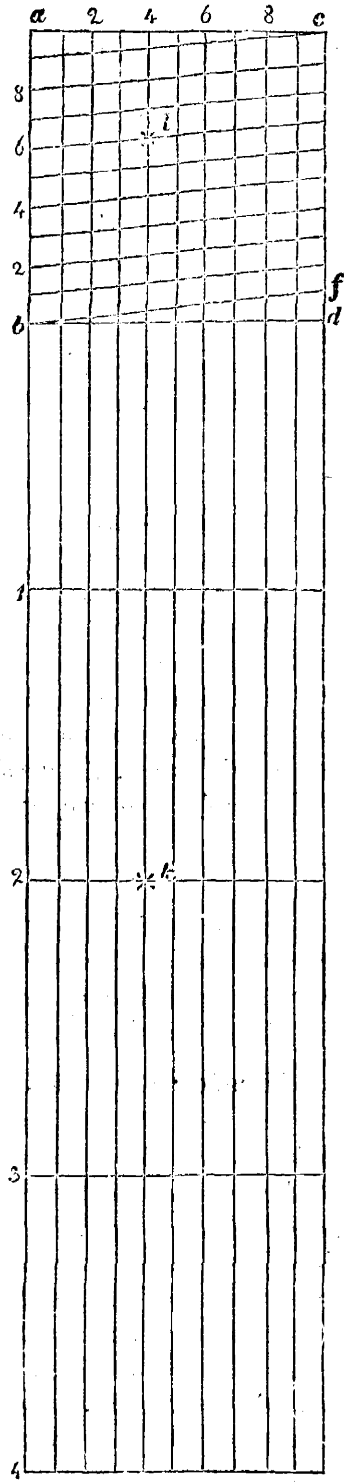
Parallellinien auf dem Felde in gleiche Theile zu theilen.

Die gegebenen Parallellinien seyen AA, BB, man soll auf denselben mehrere gleiche Stücke durch Visiren ansetzen. Man wähle ausserhalb der Parallellinien in ihrer Ebene einen Punct a, und ziehe $al \parallel A \parallel B$ von beliebiger Länge. Man verbinde ab, welche die B in c schneidet, lc, welche die A in d schneidet, ad, welche die B in f schneidet, lf, welche die A in g schneidet, ag, welche die B in h schneidet, lh, welche die A in k schneidet u. s. w., so ist $bd = dg = gk$ u. s. w. und $cf = fh$ u. s. w. Denn wenn lb die B in m schneidet, so ist (II. 32.) $\triangle\, acd = lcb$. Aber (II. 26.) $\triangle\, acd = lfd$, $\triangle\, lcb = lmd$, also $\triangle\, lfd = lmd$. Zieht man $mn \parallel ld$, $fo \parallel ld$, so ist (II. 26.) $\triangle\, lmd = lnd$, $\triangle\, lfd = lod$, also ist $\triangle\, lod = lnd$, also (II. 31.) $od = nd$, also (II. 16.) $cf = cm$, also (II. 34.) $dg = bd$, also (II. 34.) $cf = fh$ u. s. w.

42.

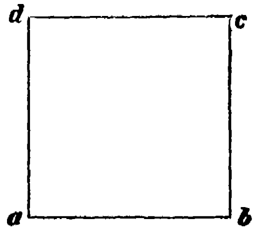
Einen tausendtheiligen Maassstab zu verfertigen, und darnach grade Linien auszumessen.

Die Einheit des Längenmaasses ist der russisch-englische Fuss von 12 Zoll. Dieser Fuss wird in 10 gleiche Theile getheilt, welche man neben einander aufträgt. Das erste Zehntel ab wird wieder in 10 gleiche Theile getheilt, jeder Theil ist also $\frac{1}{100}$ Fuss. Im Anfangspunct a errichtet man auf ab eine senkrechte Linie ac von beliebiger Länge, welche man ebenfalls in 10 gleiche Theile theilt. Durch die Theilpuncte von ac zieht man Parallellinien mit ab. Die Linie cd, welche der ab parallel und gleich ist, wird in 10 gleiche Theile getheilt, auch werden parallele Transversallinien von b nach dem ersten Theilpunct von cd, von dem ersten Theilpunct von ab nach dem zweiten Theilpunct von cd u. s. w. gezogen. Die erste Transversallinie bf bildet mit bd ein $\triangle\, bdf$, in welchem die durch die Parallellinien abgeschnittenen Stücke respective $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u. s. w. von df, oder $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$ von ab, oder $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$ des ganzen Fusses sind. Passt nun die zu messende Linie auf einer der Parallellinien z. B. von k bis l, so giebt die Bezifferung von b nach k die Zahl 2, von b nach a die Zahl 6, von a nach c die Zahl 4, zusammen also $\frac{264}{1000}$ oder 0,264 Fuss, d. h. 3,168 Zoll.



43.

Ein Quadrat ist ein ebenes Viereck, dessen vier Seiten einander gleich sind, und dessen vier Winkel rechte Winkel sind.

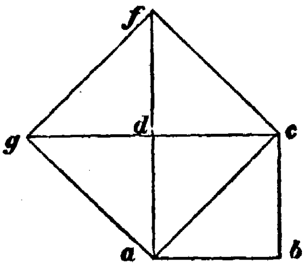


Man errichtet nämlich ad, bc senkrecht auf ab in einer Ebene, so ist (II. 4.) $ad \parallel bc$. Man macht $ad = bc = ab$, so ist (II. 16.) $cd \parallel = ab$, also das Viereck $abcd$ ein Quadrat.

Wenn die Seite des Quadrats ab ist, so wird der Inhalt des Quadrats durch ab^2 bezeichnet.

44.

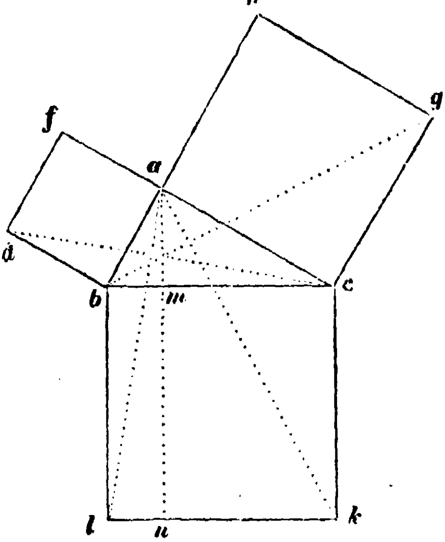
Das Quadrat der Diagonallinie eines Quadrats ist doppelt so gross als das Quadrat selbst.



Das Quadrat sey $abcd$, man verlängere die Seiten ad, cd nach f, g, mache $df = dg = ad = cd$, so ist $acfg$ ebenfalls ein Quadrat, und $acfg = 4.\ \triangle\ acd$, $abcd = 2\ \triangle\ acd$, also $acfg = 2\ abcd$, oder $ac^2 = 2\ ab^2$.

45.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

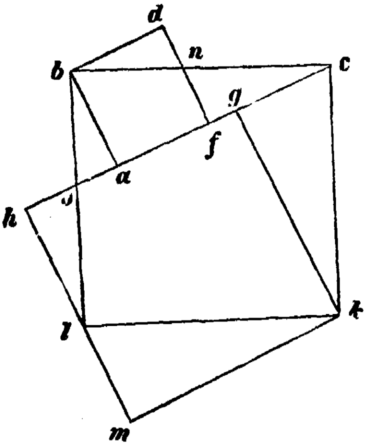


Erster Beweis.

Es sey abc das rechtwinklige Dreieck, a der rechte Winkel, ab, ac die Katheten, bc die Hypotenuse. Ueber diese drei Seiten seyen die Quadrate $abdf$, $acgh$, $bckl$ beschrieben. Man ziehe die Diagonallinien ak, al, bg, cd, und die grade Linie amn senkrecht auf bc oder kl. Alsdann ist in den Dreiecken

abl, dbc, der $\angle abl = R + abc$, der $\angle dbc = R + abc$, also $\angle abl = dbc$; auch $ab = db$, $bl = bc$, also (I. 1.) $\triangle abl = dbc$. Aber (II. 27.) $\triangle abl = \frac{1}{2}\, bmnl$, $\triangle dbc = \frac{1}{2}\, abdf$, also $bmnl = abdf$. In den $\triangle ack$, gcb ist $\angle ack = R + acb$, $\angle gcb = R + acb$, also $\angle ack = gcb$; auch $ac = gc$, $ck = bc$, also (I. 1.) $\triangle ack = gcb$. Aber (II. 27.) $\triangle ack = \frac{1}{2}\, cmnk$, $\triangle gcb = \frac{1}{2}\, acgh$, also $cmnk = acgh$. Also $bmnl + cmnk = abdf + acgh$. Aber $bmnl + cmnk = bckl$, also $bckl = abdf + acgh$, oder $bc^2 = ab^2 + ac^2$.

Zweiter Beweis.



Man beschreibe über ab, bc die Quadrate $abdf$, $bckl$, fälle kg, hlm senkrecht auf ca; km senkrecht auf kg, so ist (II. 10.), $\angle bca = gkc = lkm$, also (I. 2, 23.) $\triangle abc = gck = mlk$, also $ca = kg = km$, also $kghm = ac^2$. Ferner (II. 10.) $\angle dbn = abo$, also (I. 2, 23.) $\triangle dbn = abo$, also $bn = bo$, also $cn = lo$, also (I. 2, 23.) $\triangle cnf = loh$. Aber $bckl = abo + abnf + cnf + gck + kgol$. Aber $abo + abnf = dbn + abnf = abdf$, und $cnf + gck + kgol = loh + lkm + kgol$. Also $bckl = abdf + kghm$, oder $bc^2 = ab^2 + ac^2$. Hieraus ersieht man, wie ein Quadrat in fünf Stücke zerlegt werden kann, aus denen sich zwei Quadrate bilden lassen; und wie umgekehrt bei zwei Quadraten das kleinere in zwei, das grössere in drei Stücke zerlegt werden kann, aus denen sich ein Quadrat zusammensetzen lässt.

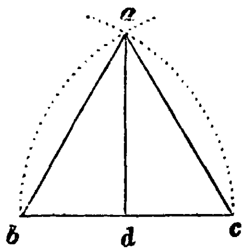
46.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat der grössern Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden kleinern Seiten ist, so ist das Dreieck rechtwinklig, und die grössere Seite die Hypotenuse.

Es sey $bc^2 = ab^2 + ac^2$. In der Ebene des $\triangle abc$ errichte man auf ac die Senkrechte $ad = ab$, so ist (II. 45.)

$cd^2 = ad^2 + ac^2$, also $cd^2 = ab^2 + ac^2$, also $cd^2 = bc^2$, also $cd = bc$. Also (I. 5.) $\triangle\, adc = abc$, also $\angle\, dac = bac$, aber $\angle\, dac = R$, also auch $\angle\, bac = R$.

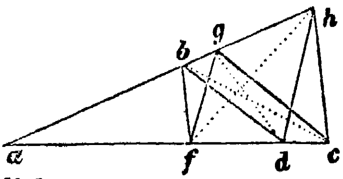
47.



In einem gleichseitigen Dreiecke ist das Quadrat der Höhe gleich dem dreifachen Quadrat der halben Grundlinie, oder $\frac{3}{4}$ des Quadrats der Grundlinie.

Es sey $ab = bc = ca$, so ist, wenn man die Senkrechte ad fället, $\triangle\, adb = acd$, also $bd = cd$, also $ab = 2\,bd$. Aber (II. 45.) $ab^2 = ad^2 + bd^2$, also $4\,bd^2 = ad^2 + bd^2$, also $ad^2 = 3\,bd^2 = \frac{3}{4}\,bc^2$. Auch ist jeder der Winkel $a = b = c = \frac{2}{3}\,R$ (II. 7.).

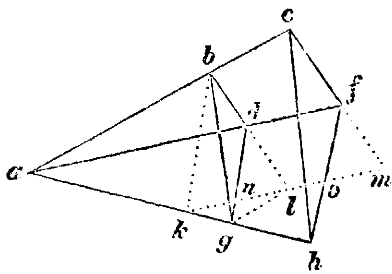
48.



Wenn von den Seiten eines Winkels zwei Paare von Parallellinien ausgehen, so sind die Verbindungslinien der wechselnamigen Durchschnittspuncte ebenfalls parallel.

Es sey $bf \parallel ch$, $bd \parallel cg$, so ist $fg \parallel dh$. Man verbinde nämlich bc, dg, fh, so ist (II. 32.) $\triangle\, adg = abc$, $\triangle\, abc = afh$, also $\triangle\, adg = afh$, also $\triangle\, fgd = fgh$, also (II. 28.) $fg \parallel dh$.

49.



Wenn drei in einer Ebene liegende grade Linien in einem Puncte zusammentreffen, und von der ersten zur zweiten ein Paar Parallellinien, von der zweiten zur dritten ein Paar Parallellinien ausgehen, so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Durchschnittspuncte der ersten und dritten ebenfalls parallel.

Es sey $bd \parallel cf$, $dg \parallel fh$, so ist $bg \parallel ch$. Denn da die Puncte b, g in den Linien bd, ag liegen, so ist, wenn man $bk \parallel gd$ an ag, und $gl \parallel ba$ an bd zieht, auch (II. 48.) $kl \parallel adf$. Wenn also kl, cf einander in m

schneiden, so ist (II. 16.) $lm = df$. Wenn kl die Parallellinien dg, fh in n, o schneidet, so ist (II. 16.) $df = no$. Also ist $lm = no$. Da $gl \frown bc$, so ist (II. 26.) $\triangle\, cbg = cbl$. Da $cm \frown bl$, so ist (II. 26.) $\triangle\, cbl = mbl$. Also ist $\triangle\, cbg = mbl$. Da $lm = no$, so ist (II. 29.) $\triangle\, mbl = nbo$. Also ist $\triangle\, cbg = nbo$. Da $bk \frown ho$, so ist (II. 26.) $\triangle\, bkh = bko$. Da $bk \frown gn$, so ist (II. 26.) $\triangle\, bkg = bkn$. Also ist $\triangle\, bgh = nbo$. Also ist $\triangle\, cbg = bgh$. Also ist (II. 28.) $bg \frown ch$.

50.

Wenn zwei grade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maasse nach denselben ganzen Zahlen ausgemessen werden, wie zwei andere grade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maasse, so sind die beiden ersten Linien den beiden andern Linien proportionirt.

Man drückt das Verhältniss zweier Linien M, N arithmetisch aus, indem man sie neben einander setzt, nämlich $M : N$. Schreibt man die erste über die zweite, indem man setzt $\frac{M}{N} = A$, so bedeutet A eine Zahl, und heisst der *Werth* oder *Exponent* des Verhältnisses $M : N$. Zwei Verhältnisse von gleichem Werthe geben eine Proportion. Es seyen nämlich bei vier Linien M, N, P, Q, $\frac{M}{N} = A$, und $\frac{P}{Q} = A$, so hat man die Proportion $M : N = P : Q$ oder $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$.

Auch können zwei Dreiecke oder Parallelogramme von ihrem gemeinschaftlichen Maasse, welches dann ebenfalls ein Dreieck oder Parallelogramm seyn muss, nach denselben ganzen Zahlen ausgemessen werden, wie zwei grade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maasse. Dann sind jene Dreiecke oder Parallelogramme diesen Linien proportionirt.

Wenn zwei grade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maasse nach ganzen Zahlen ausgemessen werden, d. h. wenn das gemeinschaftliche Maass in jeder Linie eine ganze Anzahl Male enthalten ist, so haben diese graden Linien ein *rationales Verhältniss* zu einander, und zwar das Verhältniss jener ganzen Zahlen.

Es giebt aber Fälle, wo zwei grade Linien von keinem gemeinschaftlichen Maasse jemals in ganzen Zahlen vollkommen genau ausgemessen werden können. Dann haben sie ein *irrationales* oder *incommensurables Verhältniss* zu einander.

Z. B. die Seite und Diagonallinie eines Quadrats stehen zu einander in dem irrationalen Verhältniss von $1 : \sqrt{2}$ (II. 44.). Die Höhe und Grundlinie eines gleichseitigen Dreiecks stehen zu einander in dem irrationalen Verhältniss von $\sqrt{3} : 2$ (II. 47.). Jedoch lassen sich immer ganze Zahlen finden, deren Verhältniss dem irrationalen Verhältniss der Linien je weiter desto genauer entspricht (V. 3.).

Z. B. die genäherten Verhältnisse für die Seite und Diagonallinie eines Quadrats sind $1:1$; $2:3$; $5:7$; $12:17$; $29:41$; $70:99$; $169:239$; $408:577$ u. s. w. Die genäherten Verhältnisse für die Höhe und Grundlinie eines gleichseitigen Dreiecks sind $1:1$; $6:7$; $13:15$; $84:97$; $181:209$; $1170:1351$ u. s. w.

51.

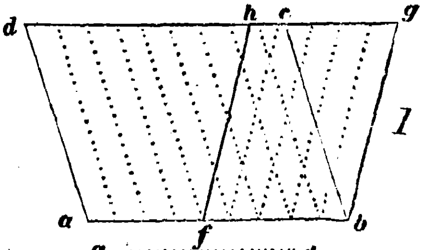
Wenn zwei rationale Linienverhältnisse einander gleich sind, so ist das Rechteck oder Product der ersten und vierten gleich dem Rechteck oder Product der zweiten und dritten.

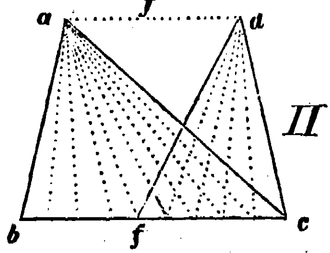
Nimmt man an, dass zwei Linien durch ihr gemeinschaftliches Maass gemessen, die Zahlen M, N; und zwei andre Linien durch ihr gemeinschaftliches Maass gemessen, die Zahlen P, Q geben, und dass diese vier Linien proportionirt seyen, auch dass die Zahl A der Exponent ihres Verhältnisses sey, so ist (II. 50.) $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} = A$, also $M = A \, . \, N$, $A \, . \, Q = P$. Hieraus folgt durch Multiplication $A \, . \, M \, . \, Q = A \, . \, N \, . \, P$, und hieraus folgt: $M \, . \, Q = N \, . \, P$. Aber die Zahlen, welche sich durch Messung der vier proportionirten Linien ergaben, waren M, N, P, Q. Folglich ist das Product der ersten und vierten Zahl gleich dem Product der zweiten und dritten Zahl, oder die Producte der wechselnamigen Glieder sind einander gleich, wie bei jeder Zahlenproportion in der Arithmetik.

Bildet man aus den beiden gemeinschaftlichen Maassen ein Rechteck, so zeigt das Product $M \, . \, Q$ an, wie viel Mal dieses Maassrechteck in dem Rechteck der ersten und vierten Linie enthalten sey; so wie das Product $N \, . \, P$ anzeigt, wie viel Mal dieses Maassrechteck in dem Rechteck der zweiten und dritten Linie enthalten sey. Folglich ist auch das Rechteck der ersten und vierten Linie dem Rechteck der zweiten und dritten Linie an Inhalt gleich. Wenn zwei grade Linien dasselbe *irrationale Verhältniss* (II. 50.) wie zwei andre grade Linien zu einander haben, so lassen sich ähnliche Dreiecke bilden, deren gleichnamige Seiten diese Linien sind, und an denen nach II. 49. bewiesen wird, dass das Rechteck der ersten und vierten Linie dem Rechteck der zweiten und dritten an Inhalt gleich sey. Dieses wird in II. 55. geschehen.

52.

Dreiecke oder Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich dem Inhalte nach wie ihre Grundlinien.





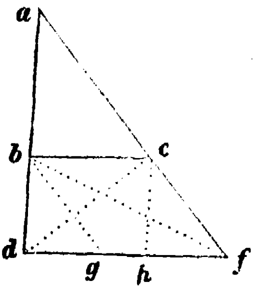
Bei den Parallelogrammen *abcd*, *fbgh*, so wie bei den Dreiecken *abc*, *dfc* sind die Grundlinien in grader Linie, die Höhen gleich. Wenn die Grundlinien ein rationales Verhältniss zu einander haben, so werden sie (II. 50.) von ihrem gemeinschaftlichen Maass nach ganzen Zahlen gemessen, d. h. das Maass wird eine ganze Anzahl Male in ihnen enthalten seyn. Durch die Theilpuncte ziehe man Parallellinien mit den Seiten der Parallelogramme, oder grade Linien nach den Spitzen der Dreiecke, so sind (II. 23. 29.) die einzelnen kleinen Parallelogramme oder Dreiecke einander an Inhalt gleich, also das gemeinschaftliche Maass dieser Parallelogramme oder Dreiecke. Also werden diese Parallelogramme oder Dreiecke von ihrem gemeinschaftlichen Maass nach denselben ganzen Zahlen gemessen, wie die Grundlinien von ihrem gemeinschaftlichen Maasse.

Also I. $abcd : fbgh = ab : fb$ oder $\frac{abcd}{fbgh} = \frac{ab}{fb}$

II. $\triangle\ abc : dfc = bc : fc$ oder $\frac{abc}{dfc} = \frac{bc}{fc}$

Wenn die Grundlinien ein irrationales Verhältniss zu einander haben, so werden dieselben genäherten Verhältnisse, welche man nach und nach für die Grundlinien findet, auch für die Flächen der auf ihnen ruhenden Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe gültig seyn. Alsdann haben diese Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe dasselbe irrationale Verhältniss zu einander, wie ihre Grundlinien, und sind also ebenfalls den Grundlinien proportionirt (II. 51.).

53.



Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die gleichnamigen Abschnitte und Abstände proportionirt, und die Parallellinien verhalten sich wie die Abstände von den Winkelspitzen.

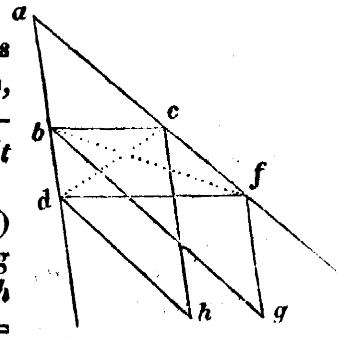
Es sey $bc \parallel df$, man ziehe die Diagonallinien cd, bf, so ist (II. 52.) $\frac{cab}{cbd} = \frac{ab}{bd}$, $\frac{cab}{bcf} = \frac{ac}{cf}$, aber (II. 26.) $\triangle\, cbd = bcf$, also $\frac{cab}{cbd} = \frac{cab}{bcf}$, also $\frac{ab}{bd} = \frac{ac}{cf}$ oder $ab : bd = ac : cf$.

Ferner (II. 52.) $\frac{cad}{cbd} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{baf}{bcf} = \frac{af}{cf}$. Aber (II. 26.) $\triangle\, cbd = bcf$, und (II. 32.) $\triangle\, cad = baf$, also $\frac{cad}{cbd} = \frac{baf}{bcf}$, also $\frac{ad}{bd} = \frac{af}{cf}$, oder $ad : bd = af : cf$.

Ferner (II. 52.) $\frac{cab}{cad} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{cab}{baf} = \frac{ac}{af}$, aber (II. 32.) $\triangle\, cad = baf$, also $\frac{cab}{cad} = \frac{cab}{baf}$, also $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$ oder $ab : ad = ac : af$.

Man ziehe $bg \parallel af$, so ist aus demselben Grunde in dem $\angle\, d$, welcher durch die Parallellinien bg, af geschnitten wird, $\frac{ab}{ad} = \frac{fg}{df}$, aber $fg = bc$, also $\frac{ab}{ad} = \frac{bc}{df}$ oder $ab : ad = bc : df$. Man ziehe $ch \parallel ad$, so ist aus demselben Grunde in dem $\angle\, f$, welcher durch die Parallellinien ch, ad geschnitten wird, $\frac{ac}{af} = \frac{dh}{df}$. Aber $dh = bc$, also $\frac{ac}{af} = \frac{bc}{df}$ oder $ac : af = bc : df$.

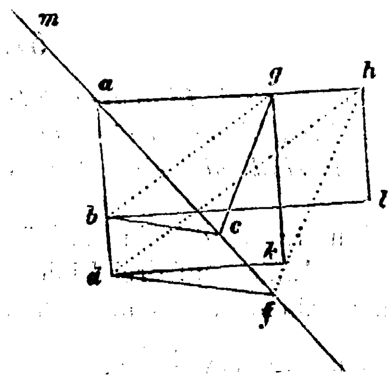
54.



Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die Parallelogramme der wechselnamigen Seiten einander an Inhalt gleich.

Es sey $bc \parallel df$, so ist (II. 32.) $\triangle\, abf = acd$. Zieht man also $fg \parallel ab$, $bg \parallel af$, $ch \parallel ad$, $dh \parallel ac$, so ist (II. 14.) $abgf = 2.\ \triangle\, abf$, $achd = 2\ \triangle\, acd$, also $abgf = achd$.

55.

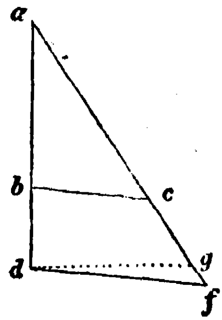


Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die Rechtecke der wechselnamigen Seiten einander an Inhalt gleich.

Es sey $bc \parallel df$. Man errichte in der Ebene von adf die ah senkrecht auf ad, und mache $ag = ac$, $ah = af$. Man verlängere ca nach m, so ist (II. 9.) $\angle\, gam = 2.\ acg$, $\angle\, gam = 2\ afh$, also ist $\angle\, acg = afh$, also (II. 2.) $cg \parallel fh$. Aber auch $bc \parallel df$, also (II. 49.) $bg \parallel dh$, also (II. 54.) $ablh = adkg$. Der Inhalt eines Rechtecks wird geschrieben, indem man die beiden anliegenden Seiten neben einander setzt und durch das Multiplicationszeichen verbindet, also statt $ablh = adkg$ setzt man $ab \, . \, ah = ad \, . \, ag$, oder $ab \, . \, af = ad \, . \, ac$.

Arithmetischer Beweis. Da $bc \parallel df$, so ist (II. 53.) $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$. Es sey A der Werth dieser Verhältnisse, so ist $\frac{ab}{ad} = A$, $\frac{ac}{af} = A$, also $ab = A.\ ad$, $ac = A.\ af$, also $A.\ af \, . \, ab = A.\ ad \, . \, ac$, also $af \, . \, ab = ad \, . \, ac$.

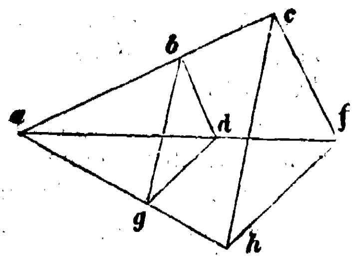
56.



Wenn auf den Seiten eines Winkels die gleichnamigen Abschnitte proportionirt, oder die Rechtecke der wechselnamigen Abschnitte gleich sind, so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Puncte parallel.

Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$ oder $ab \,.\, af = ac \,.\, ad$. Wäre df nicht $\parallel bc$, so sey $dg \parallel bc$, dann ist (II. 53.) $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{ag}$ und (II. 55.) $ab \,.\, ag = ac \,.\, ad$. Aus beiden folgt $af = ag$. Also müssen die Puncte f, g zusammenfallen, und da $dg \parallel bc$, so ist auch $df \parallel bc$.

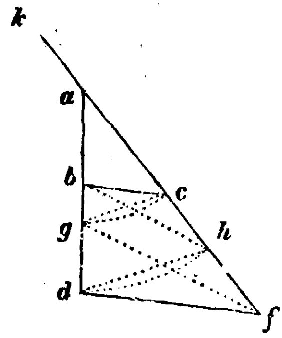
57.



Wenn zwei Linienverhältnisse einem dritten Linienverhältniss gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Man trage die in Verhältniss stehenden Linien auf drei Linien, die in einer Ebene von einem Punct a ausgehen. Es sey $\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{af}$ und $\frac{ad}{af} = \frac{ag}{ah}$ oder es sey $ab \,.\, af = ac \,.\, ad$ und $ad \,.\, ah = af \,.\, ag$, so folgt (II. 56.) $bd \parallel cf$, $dg \parallel fh$, also (II. 49.) $bg \parallel ch$, also (II. 53.) $\frac{ab}{ac} = \frac{ag}{ah}$, oder (II. 55.) $ab \,.\, ah = ac \,.\, ag$.

58.

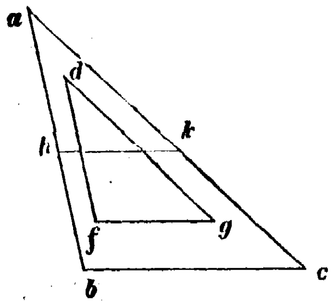


Wenn vier Linien in Proportion stehen, so bleibt die Proportion richtig, wenn man die innern Glieder vertauscht.

Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, oder $ab \,.\, af = ac \,.\, ad$, so ist (II. 56.) $bc \parallel df$. Man mache $ag = ac$, $ah = ad$, und verlängere ca nach k, so ist (II. 9.) $\angle\, dak = 2.\ acg$, $\angle\, dak = 2.\ ahd$, also $\angle\, acg = ahd$, also (II. 2.) $cg \parallel dh$.

Aber auch $cb \frown df$, also (II. 48.) $bh \frown fg$, also (II. 53.) $\frac{ab}{ag} = \frac{ah}{af}$, oder $\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{af}$.

59.



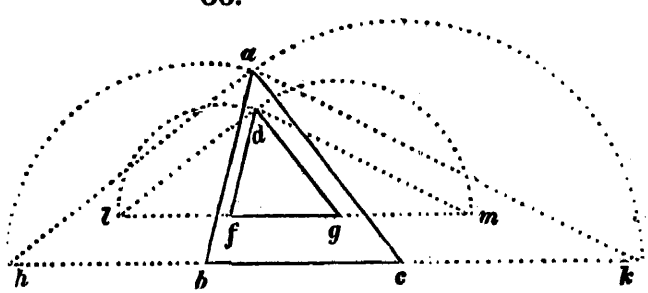
In ähnlichen Dreiecken sind die gleichnamigen Seiten proportionirt.

Aehnliche Dreiecke sind solche, deren Winkel gegenseitig gleich sind. Wenn in den $\triangle\ abc,\ dfg,\ \angle\ a = d,\ \angle\ b = f,\ \angle\ c = g$ ist, so ist $\triangle\ abc \sim dfg$. Gleichnamige Seiten sind diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. In den ähnlichen Dreiecken abc, dfg sind also die gleichnamigen Seiten ab und df; ac und dg; bc und fg. Man mache $ah = df$, $ak = dg$; da nun auch $\angle\ a = d$, so ist (I. 1.) $\triangle\ ahk = dfg$, also $\angle\ h = f$ und $hk = fg$. Aber $\angle\ f = b$, also $\angle\ h = b$, also (II. 2.) $hk \frown bc$, also (II. 53.) $\frac{ah}{ab} = \frac{ak}{ac} = \frac{hk}{bc}$, also auch $\frac{df}{ab} = \frac{dg}{ac} = \frac{fg}{bc}$.

Hieraus folgt auch (II. 58.) $\frac{df}{dg} = \frac{ab}{ac}$, $\frac{df}{fg} = \frac{ab}{bc}$, $\frac{dg}{fg} = \frac{ac}{bc}$.

Ferner (II. 55.) $df \cdot ac = dg \cdot ab$, $df \cdot bc = fg \cdot ab$, $dg \cdot bc = fg \cdot ac$.

60.



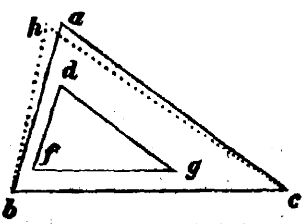
In ähnlichen Dreiecken sind die Umfänge den gleichnamigen Seiten proportionirt.

Es sey $\triangle\ abc \sim dfg$. Auf der Verlängerung von bc mache man $bh = ab$, $ck = ac$, auf der Verlängerung von fg mache man $fl = df$, $gm = dg$, so sind hk, lm die Umfänge der Dreiecke abc, dfg. Nach II. 9. ist $\angle\ b = 2\ h$, $\angle\ c = 2\ k$, $\angle\ f = 2\ l$, $\angle\ g = 2\ m$, aber $\angle\ b = f$, $\angle\ c = g$, also $\angle\ h = l$, $\angle\ k = m$, also $\triangle\ ahk \sim dlm$, also (II. 59.) $\frac{hk}{lm} = \frac{ah}{dl}$. Aber auch

$\triangle\ abh \sim dfl$, also (II. 59.) $\frac{ah}{dl} = \frac{ab}{df}$. Also (II. 57.) $\frac{hk}{lm} = \frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$.

Arithmetischer Beweis. Das Verhältniss der gleichnamigen Seiten sey durch die Zahl A ausgedrückt (II. 50.), so ist $ab = A.df$, $bc = A.fg$, $ac = A.dg$, also $ab + bc + ac = A\ (df + fg + dg)$, also $\frac{ab + bc + ac}{df + fg + dg} = A = \frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$.

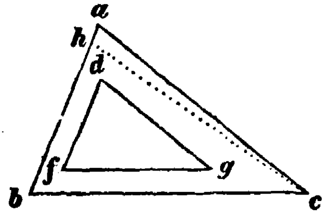
61.



Wenn die gleichnamigen Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

In den Dreiecken abc, dfg sey $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$. An bc setze man (I. 8.) $\angle\ hbc = f$, $\angle\ hcb = g$, so ist auch (II. 7.), $\angle\ bhc = d$, also $\triangle\ hbc \sim dfg$, also (II. 59.) $\frac{hb}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{hc}{dg}$. Also (II. 57.) $hb = ab$, $hc = ac$, also (I. 5.) $\triangle\ hbc = abc$. Aber $\triangle\ hbc \sim dfg$, also $\triangle\ abc \sim dfg$.

62.

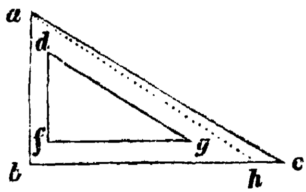


Wenn ein Winkel gegenseitig gleich und die Nebenseiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

In den Dreiecken abc, dfg sey $\angle\ b = f$, und $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg}$. Man mache $\angle\ bch = g$, so ist $\angle\ h = d$, also $\triangle\ hbc \sim dfg$, also (II. 59.) $\frac{hb}{df} = \frac{bc}{fg}$, also (II. 57.) $hb = ab$, also (I. 1.) $\triangle\ hbc = abc$, aber $\triangle\ hbc \sim dfg$, also $\triangle\ abc \sim dfg$.

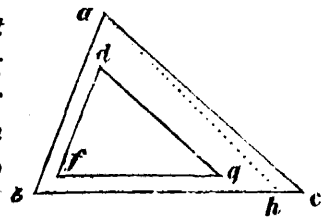
63.

Rechtwinklige Dreiecke, in denen die Hypotenuse und eine Kathete gegenseitig proportionirt sind, sind einander ähnlich.



In den $\triangle\ abc,\ dfg$ sey $b = f = R$ und $\frac{ab}{df} = \frac{ac}{dg}$. Man mache den $\angle\ bah = d$, so ist $\triangle\ abh \sim dfg$, also (II. 59.) $\frac{ab}{df} = \frac{ah}{dg}$, also (II. 57.) $\frac{ah}{dg} = \frac{ac}{dg}$, also $ah = ac$, also (I. 36.) $\triangle\ abh = abc$. Aber $\triangle\ abh \sim dfg$, also $\triangle\ abc \sim dfg$.

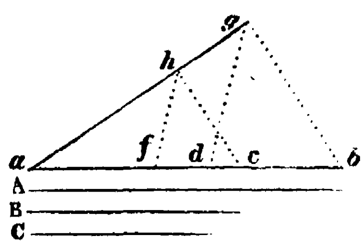
64.



Wenn zwei Seiten proportionirt und der eine Gegenwinkel gegenseitig gleich, der andere Gegenwinkel aber in beiden Dreiecken kleiner oder in beiden grösser als ein rechter ist, so sind die Dreiecke ähnlich.

In den Dreiecken $abc,\ dfg$ sey $\angle\ b = f$, und $\frac{ab}{df} = \frac{ac}{dg}$. Man mache $\angle\ bah = d$, so ist (II. 7.) $\angle\ h = g$, also $\triangle\ abh \sim dfg$, also (II. 59.) $\frac{ab}{df} = \frac{ah}{dg}$, also (II. 57.) $\frac{ah}{dg} = \frac{ac}{dg}$, also $ah = ac$, also (I. 37.) $\triangle\ abh = abc$; aber $\triangle\ abh \sim dfg$, also $\triangle\ abc \sim dfg$.

65.

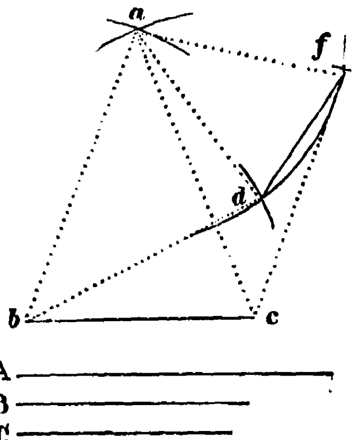


Zu drei graden Linien die vierte Proportionallinie durch Parallellinien zu finden.

Die gegebenen Linien seyen A, B, C. Man trage auf eine grade Linie von einem Punct a aus $ab = A$, $ac = B$, $ad = C$, ziehe in beliebiger Richtung ag, verbinde bg, ziehe $ch \parallel bg$, verbinde dg, ziehe $hf \parallel dg$, so ist (II. 53.) $ab : ac = ag : ah$, $ag : ah = ad : af$, also (II. 57.) $ab : ac = ad : af$, also af die gesuchte vierte Proportionallinie.

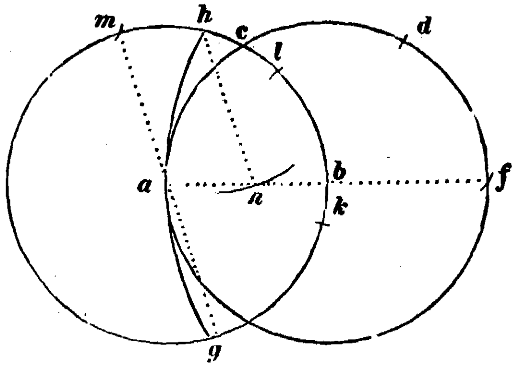
66.

Zu drei graden Linien die vierte Proportionallinie bloss durch Kreisdurchschnitte zu finden.



Die gegebenen Linien seyen A, B, C. Ueber die Grundlinie $bc = B$ beschreibe man (I. 7.) ein gleichschenkliges $\triangle\, abc$, so dass $ab = ac = A$. Aus a als Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser C einen Kreisbogen, wähle darauf einen beliebigen Punct d, fasse den Abstand bd in den Zirkel, und aus c als Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser bd einen Kreisbogen, welcher jenen Bogen in f schneidet, so ist df die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn da $ab = ac$, $ad = af$, $bd = cf$, so ist (I. 5.) $\triangle\, bad = caf$, also $\angle\, bad = caf$, also $\angle\, bac = daf$, also $\triangle\, bac \sim daf$, also (II. 59.) $ab : bc = ad : df$ oder $A : B = C : df$.

67.



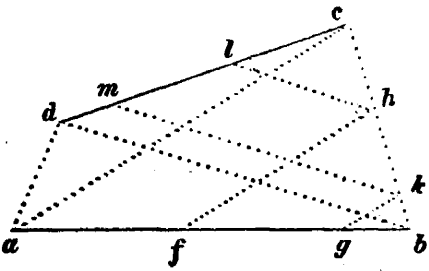
Zwischen zwei Puncten die Mitte bloss durch Kreisdurchschnitte zu finden.

Die gegebenen Puncte seyen a, b. Aus diesen Puncten als Mittelpuncten mit dem Halbmesser ab beschreibe man zwei Kreise, welche einander in c durchschneiden, so ist abc ein gleichseitiges Dreieck, also (II. 47.) $\angle\, b = \frac{2}{3} R$. Denselben Halbmesser ab trage man von c nach d, von d nach f, so ist (I. 16.) abf eine grade Linie. Aus dem Mittelpunct f mit dem Halbmesser $fa = 2\,ab$ beschreibe man einen Kreis, welcher den Kreis a in g, h schneidet, so sind die gleichschenkligen Dreiecke $fag = fah$, also $\angle\, fag = fah$, also (II. 7.) $\angle\, gah + afh = 2\,R$. Den Halbmesser ab trage man von g nach k, von k nach l, von l nach m, so ist gam eine grade Linie, also (I. 14.) $\angle\, gah + mah = 2\,R$, also $\angle\, mah = afh$, also $\triangle\, mah \sim afh$, also (II. 59.) $\frac{ma}{ah} = \frac{ah}{af}$. Aber $\frac{ah}{af} = \frac{1}{2}$, also $\frac{mh}{ah}$

$= \frac{1}{2}$, oder $mh = \frac{1}{2}\, ah = \frac{1}{2}\, ab$. Man beschreibe also (I. 9.) über ah ein $\triangle\, anh = hma$, so ist n die Mitte von ab.

68.

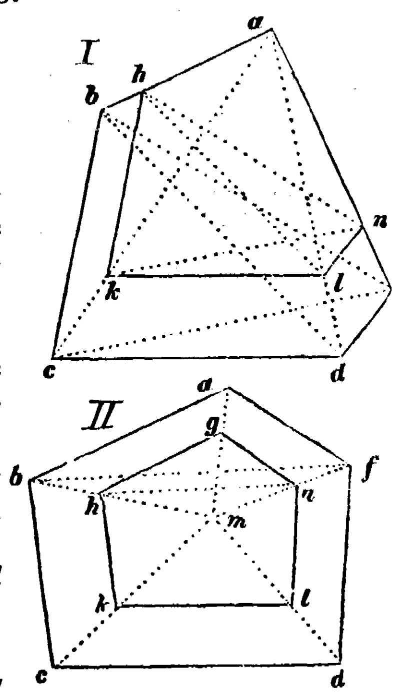
Eine grade Linie nach denselben Verhältnissen zu theilen, wie eine andere grade Linie.



Die gegebenen Linien ab, cd liegen in einer Ebene. Eine von ihnen z. B. ab, sey in f, g beliebig getheilt. Man verbinde ac, bc, bd. Man ziehe $fh \frown gk \frown ac$, so ist (II. 53.) $af : fg : gb = ch : hk : bk$. Man ziehe $hl \frown km \frown bd$, so ist (II. 53.) $ch : hk : kb = cl : lm : md$. Also (II. 57. 58.) $af : fg : gb = cl : lm : md$.

69.

In ähnlichen ebenen Vielecken sind die gleichnamigen Seiten und Diagonallinien proportionirt.



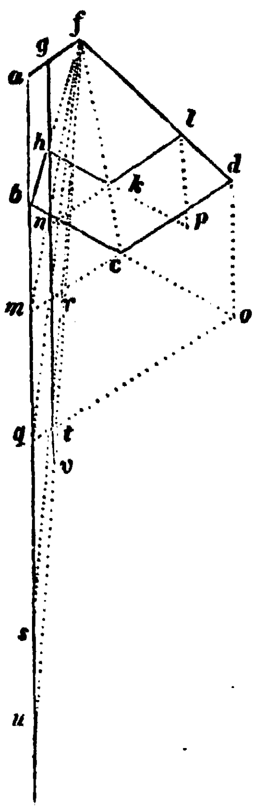
Aehnliche Vielecke sind solche, welche durch gleichnamige Diagonallinien in ähnliche Dreiecke getheilt werden. Es sey $abcdf$ das gegebene Vieleck, man ziehe (I.) aus einer Ecke a nach den übrigen die Diagonallinien ac, ad. Die der ab gleichnamige Seite ah des zweiten Vielecks setze man auf ab, ziehe $hk \frown bc$, $kl \frown cd$, $ln \frown df$, so ist (II. 49.) $hl \frown bd$, $kn \frown cf$, $hn \frown bf$, also (II. 53.) $\frac{ah}{ab} = \frac{hk}{bc} = \frac{kl}{cd}$

$$= \frac{ln}{df} = \frac{an}{af} = \frac{ak}{ac} = \frac{al}{ad} = \frac{hl}{bd} = \frac{hn}{bf} = \frac{kn}{cf}.$$

Oder (II.) man wähle einen beliebigen Punct m innerhalb oder ausserhalb in der Ebene der Figur $abcdf$, ziehe aus m nach allen Ecken derselben grade Linien, ma, mb, mc, md, mf. Die der Linie ma gleichnamige Linie mg des zweiten Vielecks setze man auf ma, ziehe $gh \mathrel{\overset{\frown}{=}} ab$, $hk \mathrel{\overset{\frown}{=}} bc$, $kl \mathrel{\overset{\frown}{=}} cd$, $ln \mathrel{\overset{\frown}{=}} df$, so ist (II. 49.) $hn \mathrel{\overset{\frown}{=}} bf$, $gk \mathrel{\overset{\frown}{=}} ac$ u. s. w. Hieraus folgt ebenfalls (II. 53.) $\frac{mg}{ma} = \frac{mh}{mb} = \frac{mk}{mc} = \frac{ml}{md} = \frac{mn}{mf} = \frac{hn}{bf} = \frac{gh}{ab} = \frac{gn}{af}$ u. s. w.

Anmerkung. Durch Combination wird bewiesen: wenn die Anzahl der Ecken eines Vielecks $= n$, so ist die Anzahl der Linien, d. h. der Seiten und Diagonallinien zusammen $= \frac{n(n-1)}{1.2}$, die Anzahl der Diagonallinien $\frac{n(n-3)}{1.2}$, der Dreiecke $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, der Vierecke $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ u. s. w. Die Anzahl der Durchschnittspuncte der Seiten und Diagonallinien $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$, oder dreimal so gross, als die Anzahl der Vierecke.

70.



In ähnlichen ebenen Vielecken sind die Umfänge der gleichnamigen Seiten und Diagonallinien proportionirt.

Die in der Ecke f angelegten ähnlichen Vielecke seyen $abcdf$, $ghklf$. Man mache $bm = bc$, ziehe fm, welche die gh in n schneidet, so ist $kg \mathrel{\overset{\frown}{=}} ca$, $gn \mathrel{\overset{\frown}{=}} am$, also (II. 49.) $nk \mathrel{\overset{\frown}{=}} mc$, also $hn = hk$. Man nehme auf der verlängerten bc die $co = cd$, ziehe fo, welche die verlängerte hk in p schneidet, so folgt ebenso, dass $kp = kl$. Man mache $bq = bo$, ziehe fq, welche die verlängerte gh in r schneidet, so folgt ebenso $hr = hp$. Dieses Verfahren setzt man bis zur letzten Seite der Vielecke fort. Wenn au der Umfang des Vielecks $abcdf$ ist, und fu gezogen wird, welche die gh in v schneidet, so folgt auf die angezeigte Art, dass gv der Umfang des Vielecks $ghklf$ ist. Also (II. 53.) $\frac{gv}{au} = \frac{fg}{fa} = \frac{gh}{ab}$ u. s. w.

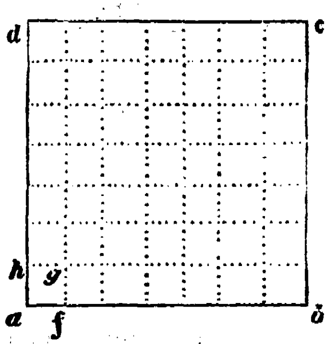
Arithmetischer Beweis. Das Verhältniss der gleichnamigen Seiten oder Diagonallinien sey durch die Zahl A ausgedrückt (II. 50.), so ist $ab = A . gh$, $bc = A . hk$, $cd = A . kl$, $df = A . fl$, $fa = A . fg$, also durch Addition $ab + bc + cd + df + fa = A . (gh + hk + kl + lf + fg)$ also $\frac{ab + bc + cd + df + fa}{gh + hk + kl + lf + fg} = A = \frac{ab}{gh} = \frac{bc}{hk}$ u. s. f.

Dritter Cursus.

Flächeninhalt gradliniger Figuren, einfache Eigenschaften des Kreises.

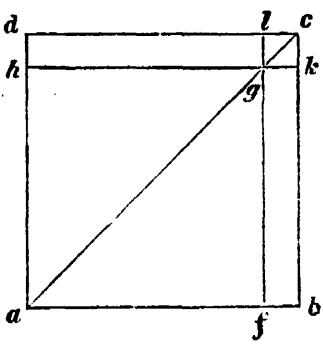
1.

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist das Product der Seite mit sich selbst.



Den Inhalt einer Figur giebt man durch die Anzahl der in derselben enthaltenen gleichen Quadrate an, deren Seite das Maass ist, mit welchem die Linien der Figur ausgemessen werden. Diejenigen Figuren, welche durch rechte Winkel begrenzt werden, wie das Quadrat und Rechteck, können unmittelbar durch Quadrate ausgefüllt werden. Die übrigen Figuren müssen durch geometrische Sätze in rechtwinklige Figuren verwandelt werden.

Wenn man die Seiten eines Quadrats durch das Maass eintheilt, und durch die Theilpuncte Parallellinien mit den Seiten zieht, so erhält man soviel Quadrate des Maasses wie $afgh$ neben und über einander, soviel mal das Maass in der Seite enthalten ist. Diese Zahl multiplicirt man mit sich selbst.



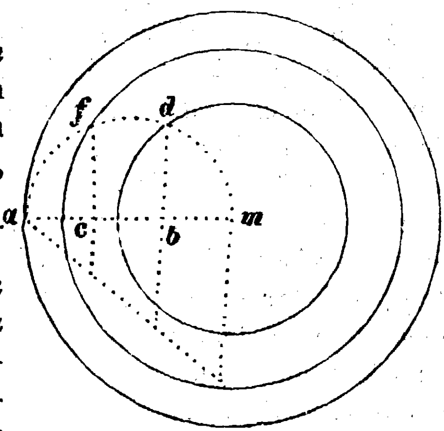
Wenn die Seite des Quadrats in der Linie af das Maass A mal, und in dem Stück $bf = B$ einen Theil des Maasses enthält, so ziehe man $fl \parallel bc$, und durch den Punct g, wo fl die Diagonallinie ac schneidet, $hk \parallel ab$, so ist (II. 33.) $hgld = bfgk$, also $abcd = afgh + 2\,bfgk + gklc = af^2 + 2\,af.bf + bf^2$ oder $(A+B)^2 = A^2 + 2A.B + B^2$.

Da ein Faden 6 Fuss, eine Ruthe 12 Fuss, eine Saschen 7 Fuss, ein Fuss 12 Zoll, eine Arschin 28 Zoll oder 16 Werschok, ein Faden 72 Zoll, eine Saschen 84 Zoll, eine Meile 7 Werst, eine Werst 500 Saschen oder 1500 Arschin oder falls wie die Quadrate der Halbmesser ma, mf, oder der Sehnen ad, fk verhalten (III. 64.), so müssen sich auch die Kreissegmente $abcd$, $fghk$, welche gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechen, wie die Quadrate der Halbmesser ma, mf, oder der Sehnen ad, fk verhalten.

Derselbe Satz muss nun auch für die ganzen Kreise gültig seyn. Demnach verhalten sich die Umfänge der Kreise wie ihre Halbmesser oder Durchmesser, oder wie ihre, gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechenden Sehnen; und die Flächen der Kreise wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser, oder ihrer, gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechenden Sehnen.

54.

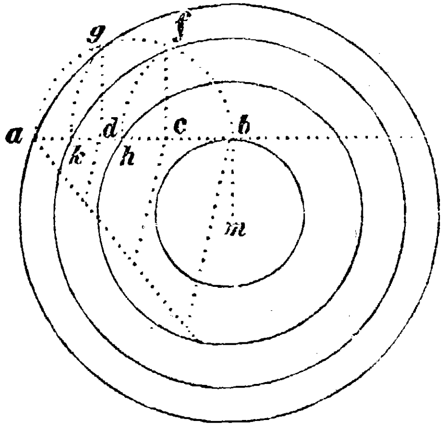
Einen Kreis durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.



Es sey der Kreis in n gleiche Theile zu theilen. Man theile seinen Halbmesser ma in gleiche Theile in b, c u. s. w., so dass $\frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u. s. w., beschreibe über ma einen Halbkreis, errichte auf ma in den Theilungspuncten senkrechte Linien, welche den Halbkreis in d, f schneiden, so ist (III. 56. 58.) $\frac{md^2}{ma^2} = \frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mf^2}{ma^2} = \frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u. s. w. Man beschreibe mit den Halbmessern md, mf u. s. w. concentrische Kreise, so ist (V. 53.) $\frac{\text{Kreis } md}{\text{Kreis } ma} = \frac{md^2}{ma^2} = \frac{1}{n}$, $\frac{\text{Kreis } mf}{\text{Kreis } ma} = \frac{mf^2}{ma^2} = \frac{2}{n}$ u. s. w.

55.

Einen Kreisring durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.



Die zwischen zwei concentrischen Kreisen, z. B. zwischen den Kreisen ma, mb enthaltene Fläche heisst ein Kreisring. Man ziehe von einem beliebigen Puncte a des äussern Kreises an den innern Kreis die Berührende ab. Soll der Kreisring in n gleiche Theile getheilt werden, so theile man ab in c, d u. s. w. in n gleiche Theile, errichte in den Theilungspuncten auf ab senkrechte Linien, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in f, g u. s. w. schneiden, mache $bh = bf$, $bk = bg$ u. s. w., beschreibe concentrische Kreise mit den Halbmessern mh, mk u. s. w., so leisten diese das Verlangte. Denn $mh^2 - mb^2 = bh^2 = bf^2$, $mk^2 - mb^2 = bk^2 = bg^2$, $ma^2 - mb^2 = ab^2$, also $\frac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{bf^2}{ab^2} = \frac{bc}{ab} = \frac{1}{n}$, $\frac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{bg^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab} = \frac{2}{n}$. Aber (V. 53.) $\frac{\text{Kreis } ma}{\text{Kreis } mb} = \frac{ma^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mh}{\text{Kreis } mb} = \frac{mh^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mk}{\text{Kreis } mb} = \frac{mk^2}{mb^2}$, also $\frac{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{ma^2 - mb^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mh - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{mh^2 - mb^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mk - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{mk^2 - mb^2}{mb^2}$, also

$$\frac{\text{Kreis } mh - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb} = \frac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\text{Kreis } mk - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb} = \frac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{2}{n} \text{ u. s. w.}$$

3500 Fuss hat, so ist ein □Faden = 36 □Fuss, □Saschen = 49 □Fuss, □Ruthe = 144 □Fuss, □Fuss = 144 □Zoll, □Arschin = 784 □Zoll = 256 □Werschok, □Faden = 5184 □Zoll, □Saschen = 7056 □Zoll, □Meile = 49 □Werst, □Werst = 250000 □Saschen = 12'250000 □Fuss.

Beispiele.

1) Die Seite eines Quadrats sey 203 Fuss 9 Zoll, wie gross ist der Inhalt?

Man multiplicirt 203 mit sich selbst = A^2, man multiplicirt 203 mit 2 mal 9, und dividirt mit 12, um □Fuss zu haben. Den Rest multiplicirt man mit 12, um □Zoll zu haben. Dann multiplicirt man 9 mit sich selbst = B^2.

	□Fuss	□Zoll
A^2	41209	—
$2A.B$	304	72
B^2		81
	41514	9

2) Die Seite eines Quadrats sey 15 Saschen 6 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

	□Saschen	□Fuss
A^2	225	—
$2A.B$	25	35
B^2		36
	251	22

3) Die Seite eines Quadrats sey 9 Faden $3\frac{1}{2}$ Fuss, wie gross ist der Inhalt?

	□Faden	□Fuss
A^2	81	—
$2A.B$	10	18
B^2		$12\frac{1}{4}$
	91	$30\frac{1}{4}$

2.

Die Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt giebt die Seite des Quadrats. Die Seite des Quadrats mit $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ *multiplicirt, giebt die Diagonallinie; die Diagonallinie mit* $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707106781$ *multiplicirt, giebt die Seite des Quadrats.*

Der erste Theil des Satzes folgt aus III. 1. Der zweite und dritte Theil folgt aus II. 44.

Beispiele.

1) Der Inhalt eines Quadrats ist 45796 □Fuss, wie gross ist die Seite? $\sqrt{45796} = 214$ Fuss.

2) Der Inhalt eines Quadrats soll 95 □Saschen seyn, wie gross ist die Seite?

$$\sqrt{95} = 9{,}7468 \text{ Saschen} = 9^s\ 5'\ 2\tfrac{3}{4}''$$

3) die Seite eines Quadrats ist 214 Fuss, wie gross ist die Diagonallinie?

$$1{,}41421356 \times 214 = 302{,}6417 \text{ Fuss} = 302'\ 7'',7$$

4) Die Diagonallinie eines Quadrats sey 302 Fuss, wie gross ist die Seite?

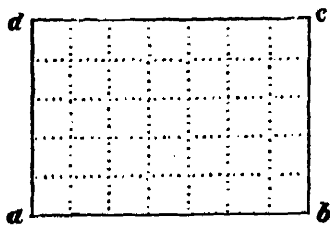
$$0{,}70710678 \times 302 = 213{,}546 \text{ Fuss} = 213'\ 6\tfrac{1}{2}''$$

5) Die Diagonallinie eines Quadrats sey 18 Fuss 7 Zoll, wie gross ist die Seite?

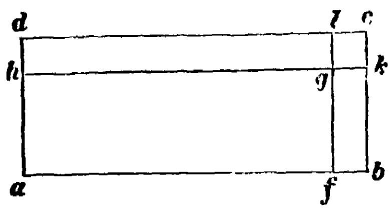
$$18'\ 7'' = 223''\quad 0{,}707106781 \times 223'' = 157'',68 = 13'\ 1\tfrac{2}{3}''$$

3.

Der Inhalt eines Rechtecks ist das Product der Grundlinie mit der Höhe, oder der Länge mit der Breite.



Die längere Seite ab heisst die Grundlinie oder Länge, die kürzere Seite bc oder ad heisst die Höhe oder Breite. Wenn man diese beiden Seiten durch das Maass eintheilt und durch die Theilpuncte Parallellinien zieht, so erhält man an jeder Seite so viel Quadrate neben oder über einander, so viel mal das Maass in dieser Seite enthalten ist. Diese Zahlen multiplicirt man also mit einander.



Wenn die Länge ab in af eine ganze Anzahl der Maasse $= A$ und einen Theil des Maasses $bf = B$; die Breite bc in bk eine ganze Anzahl der Maasse $= C$ und einen Theil des Maasses $ck = D$ enthält, so besteht das ganze Rechteck $abcd$ aus den Theilen $afgh = A.C$, $ghdl = A.D$, $bfgk = C.B$, $gkcl = B.D$.

Beispiele.

1) Eine Tafel sey 8 Fuss 9 Zoll lang, 7 Fuss 5 Zoll breit, wie gross ist der Inhalt?

Das Product von Fuss mit Zoll wird mit 12 dividirt, um □Fuss, und der Rest mit 12 multiplicirt, um □Zoll zu haben.

	□Fuss	□Zoll
A.C	56	—
A.D	3	48
C.B	5	36
B.D		45
	64	129

2) Eine Wand sey 45 Fuss 8 Zoll lang, 10 Fuss 7 Zoll hoch, wie gross ist der Inhalt?

	□Fuss	□Zoll
A.C	450	—
A.D	26	36
C.B	6	96
B.D		56
	483	44

3) Nach meiner Ausmessung 1836 enthielt eine Mauerfläche von 1 rheinl. □Faden 268 Ziegel. Hiernach muss 1 □Saschen 345 Ziegel enthalten, nach der Annahme bei Bauanschlägen aber 480 Ziegel. Eine Mauer, welche nach rheinl. Maass 45′ 8″ lang, 10′ 7″ hoch, nach russischem Maass 47′ $0\frac{1}{4}$″ lang, 10′ $10\frac{3}{4}$″ hoch ist, wie viel Ziegel enthält sie?

45′ 8″ = 7,6111
10′ 7″ = 1,7638
13,425 □Faden

13,425 □Faden
268
3598 Ziegel.

47′ $0\frac{1}{4}$″ = 6,7172
10′ $10\frac{3}{4}$ = 1,5565
10,455 □Saschen

10,455 □Saschen
345
3607 Ziegel.

10,455 □Saschen
480
Nach den Bauanschlägen 5018 Ziegel.

4.

Aus den Seiten eines Rechtecks die Diagonallinie zu finden.

Nach II. 45. zieht man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden anliegenden Seiten.

Beispiele.

1) Das Rechteck sey 8 Fuss 9 Zoll lang, 7 Fuss 5 Zoll breit, wie lang ist die Diagonallinie?

A^2 64
$2AB$ 12
B^2 81
A^2 49
$2AB$ 5.120
B^2 25

131.82

131 □Fuss 82 □Zoll

131,5694

QW. 11,469 Fuss
oder 11 Fuss 5,6 Zoll.

2) Ein Rechteck sey 45 Fuss 8 Zoll lang, 10 Fuss 7 Zoll hoch, wie lang ist die Diagonallinie?

A^2 2025
$2AB$ 60
B^2 64
A^2 100
$2AB$ 11.96
B^2 49

2197.65

2197 □Fuss 65 □Zoll

2197,4514

QW. 46,877
oder 46 Fuss 10,5 Zoll.

5.

Den Inhalt der Aecker und Wiesen nach Dessätinen, Loofstellen und Tonnstellen zu berechnen.

Die Dessätine ist 80 $\times$ 30 = 2400 □Saschen oder 560 $\times$ 210 = 117600 □Fuss.

Man dividirt also die Anzahl der □Sachen mit 2400, der Quotient giebt die Dessätinen, der Rest die Quadratsaschen.

Oder man multiplicirt die Anzahl der □Saschen mit 0,0004, und addirt $4\frac{1}{6}$ Procent hinzu.

Beispiel.

Wie viel Dessätinen enthält ein Feld von 529 Saschen Länge, 374 Saschen Breite?

529 Saschen
374

197846 □S.

82 D. 1046 □S.

197846
0,0004

79,1384
$4\frac{0}{0}$ 3,1655
$\frac{1}{6}\frac{0}{0}$ 0,1319

Dessätinen 82,4358

Die Aecker und Wiesen werden nach Ketten = 25 Ellen = 50 Fuss = 100 Quartier vermessen. Die beiden ersten Decimalstellen der Kette sind also Quartier.

Eine lief- kurländische Loofstelle ist = 16 □Ketten = 10000 □Ellen = 40000 □Fuss. Ein Kapp ist = 400 □Ellen

= 1600 □Fuss = 0,64 □Ketten, eine □Kette ist $1\frac{9}{16}$ Kapp, eine Kette ist $1\frac{1}{4}$ Kappseite.

Eine Loofstelle ist = 25 Kapp, eine Tonnstelle = 35 Kapp.

Eine ehstländische Loofstelle ist = 9 □Ketten = 5625 □Ellen = 22500 □Fuss = $14\frac{1}{16}$ Kapp. Eine Tonnstelle ist 3 Loofstellen = 27 □Ketten = 16875 □Ellen = 67500 □Fuss = $42\frac{3}{16}$ Kapp.

Auch sind nach obigen Bestimmungen

100 Dessätinen = 294 lief.-kurl. Loofstellen

900 » = 4704 ehstl. Loofstellen.

Man multiplicirt also die Anzahl der Dessätinen mit 3, und zieht vom Product 2 Procent ab, so hat man die entsprechende Anzahl der lief-kurländischen Loofstellen.

Man multiplicirt die Anzahl der Dessätinen mit 5, und addirt $22\frac{2}{3}$ Procent hinzu, so ergiebt sich die entsprechende Anzahl der ehstländischen Loofstellen.

Beispiele.

1) Eine Wiese sey 20 Ketten $7\frac{1}{2}$ Ellen lang, 5 Ketten 12 Ellen breit, wie viel lief-kurländische Loof- und Tonnstellen enthält sie?

$20 \cdot 7\frac{1}{2} = 20,30$ 111 mit 16...6.15,2440

$5 \cdot 12 = 5,48$ 2440 mit 4...6.15.610

□Ketten 111,2440   6 Loofst. 15 □K. 610 □Fuss.

Andre Art:

$20 \cdot 7\frac{1}{2} = 507,5$ mit 10000...6,95275

$5 \cdot 12 = 137$ 95275 mit 16...6.15,2440

□Ellen 69527,5   2440 mit 4...6.15.610.

Noch anders:

$20 \cdot 7\frac{1}{2} = 507,5$ Ellen = 25,375 Kappseiten

$5 \cdot 12 = 137$ » = 6,85 »

173,81875 Kapp.

mit 25 div.....6 Loofst. 23,8 Kapp.

mit 35 div.....4 Tonnst. 33,8 Kapp.

2) Wie viel ehstländische Loof- und Tonnstellen enthält dieselbe Wiese?

$20 \cdot 7\frac{1}{2} = 20,30$ mit 9...12 Loofst. 3,2440 □K.

$5 \cdot 12 = 5,48$ mit 27...4 Tonnst. 3,2440 »

111,2440

3) Wie viel Loofstellen enthält ein Feld von 720 Dessätinen 450 □Saschen?

	720.450
6	75
4	1875
	720,1875
3)	2160,5625
2%	43,21125
	2117,35125
	lief-kurl. Loofst.

	720,1875
5)	3600,9375
20%	144,0375
2%	14,40375
$\frac{1}{3}$%	4,80125
	3764,18
	ehstl. Loofst.

6.

Ein gleichseitiges Dreieck zu berechnen.

Diese Berechnung beruht auf II. 47. Hiernach ist, wenn die Seite $= s$, die Höhe $= h$, der Flächeninhalt $= F$,

$$h = s \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}} = s \cdot 0{,}866025403$$
$$s = h \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}} = h \cdot 1{,}154700538$$
$$F = s^2 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{16}} = s \cdot 0{,}433012701$$
$$F = h^2 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}} = h^2 \cdot 0{,}577350269$$
$$h = \sqrt{F} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt{F} \cdot 1{,}316074012952$$
$$s = \sqrt{F} \cdot \sqrt[4]{5\tfrac{1}{3}} = \sqrt{F} \cdot 1{,}51967137130$$

Beispiele.

1) Die Seite sey 28 Zoll, wie gross ist die Höhe?

0,8660254
28
Höhe = 24,2487 Zoll.

2) Die Höhe sey $24\frac{1}{4}$ Zoll, wie gross ist die Seite?

1,1547
24,25
Seite = 28,0015 Zoll.

3) Die Seite sey 28 Zoll, wie gross ist der Inhalt?

0,4330127
$28 \times 28 =$ 784
339,48 □Zoll.

4) Die Höhe sey $24\frac{1}{4}$ Zoll, wie gross der Inhalt?

0,57735
$24\frac{1}{4} \times 24\frac{1}{4} =$ 588,0625
339,518 □Zoll.

5) Der Inhalt sey $339\frac{1}{2}$ □Zoll, wie gross die Höhe?

$$\begin{array}{rcl} & & 1,316074 \\ \sqrt{339,5} & = & 18,42552 \\ \hline \text{Höhe} & = & 24,249 \text{ Zoll.} \end{array}$$

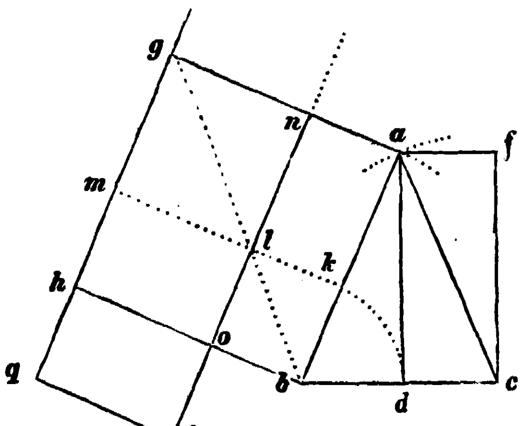
6) Der Inhalt sey 400 □Fuss, wie gross die Seite?

$$\begin{array}{rcl} & & 1,519671 \\ \sqrt{400} & = & 20 \quad \text{Fuss} \\ \hline \text{Seite} & = & 30,393 \text{ Fuss.} \end{array}$$

7) Der Inhalt sey 324□Faden, wie gross die Höhe und Seite?

$$\begin{array}{rcl} & & 1,316074 \\ \sqrt{324} & = & 18 \\ \hline \text{Höhe} & = & 23,689 \text{ Faden;} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & & 1,519671 \\ & & 18 \\ \hline \text{Seite} & = & 27,354 \text{ Faden.} \end{array}$$

7.



Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ist das Product der halben Grundlinie mit der Höhe. Die Höhe aber ist die Quadratwurzel aus dem Product von der Summe und dem Unterschied des Schenkels und der halben Grundlinie.

Da $ab = ac$, und ad senkrecht auf bc, so ist $bd = cd$. Beschreibt man also über cd das Rechteck $cdaf$, so ist $\triangle\ adb = cfa$, also $\triangle\ abc = cdaf$. Aber (III. 3.) $cdaf = cd \cdot ad$, also $\triangle\ abc = cd \cdot ad = bd \cdot ad = \frac{1}{2}\ bc \cdot ad$.

Man beschreibe über ab das Quadrat $abgh$, ziehe die Diagonallinie bg, mache $bk = bd$, ziehe $km \frown bh$, welche die bg in l schneidet, ziehe durch l die $np \frown ab$, mache $op = ol = bd$, $pq \overset{\frown}{=} ng$, so ist $bklo = bd^2$, $ab^2 - bd^2 = abgh - bklo = ngho + akln = ngho + hopq = ngqp = np \cdot ng$. Aber $np = ab + bd$, $ng = ak = ab - bd$, und (II. 45.) $ad^2 = ab^2 - bd^2$, also $ad^2 = (ab + bd) \cdot (ab - bd)$, also $\triangle\ abc = \sqrt{(ab \cdot bd + bd^2) \cdot (ab \cdot bd - bd^2)}$.

Beispiele.

1) Die Grundlinie sey 40 Fuss, die Höhe 21 Fuss, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2}\cdot 40 = & 20 \\ & 21 \\ \hline & 420 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

2) Die Grundlinie sey 96 Fuss, die Höhe 55 Fuss, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2}\cdot 96 = & 48 \\ & 55 \\ \hline & 2640 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

3) Die Grundlinie sey 40 Fuss, die Seite 29 Fuss, was ist der Inhalt? $\frac{1}{2}\cdot 40 = 20$.

$$\begin{array}{rcrcr} 29 & & 580 & & 980 \\ 20 & & 400 & & 180 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5} 580 & & 980 & & 176400 \\ \cline{5-5} 400 & & 180 & & \text{QW} = 420 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

4) Die Grundlinie sey 96 Fuss, die Seite 73 Fuss, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{rcrcr} 48 & & 3504 & & 5808 \\ 73 & & 2304 & & 1200 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5} 3504 & & 5808 & & 6969600 \\ \cline{5-5} 2304 & & 1200 & & \text{QW} = 2640 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

5) Die Grundlinie sey 30 Zoll, die Seite 17 Zoll, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{rcrcr} 15 & & 255 & & 480 \\ 17 & & 225 & & 30 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5} 255 & & 480 & & 14400 \\ \cline{5-5} 225 & & 30 & & \text{QW} = 120 \ \square\text{Zoll.} \end{array}$$

6) Die Grundlinie sey 120 Fuss, die Höhe 24 Fuss, wie gross ist die *Dachlinie*, d. h. die Summe der beiden Schenkel?

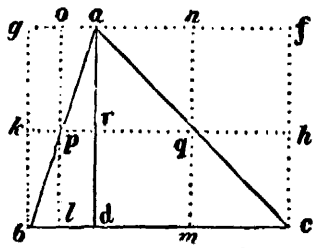
$$\begin{array}{rcrcr} 120 & & 48 & & 14400 \\ 120 & & 48 & & 2304 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5} 14400 & & 2304 & & 16704 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Dachlinie = 129,24 Fuss.

7) Bei derselben Grundlinie von 120 Fuss, aber den Höhen von 30 und 35 Fuss, wie viel betragen die Dachlinien?
134,16 und 138,91 Fuss.

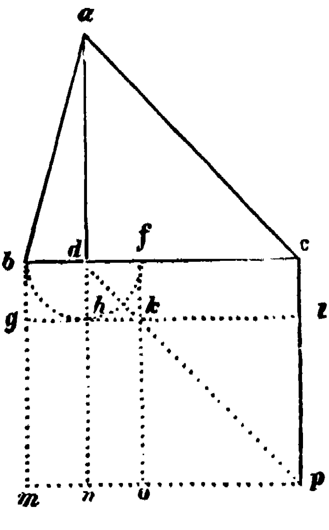
8) Bei der Grundlinie von 48 Fuss, und 16 und 48 Fuss Höhe, wie viel betragen die Dachlinien?
57,68 und 107,33 Fuss.

8.



Der Inhalt eines Dreiecks ist das halbe Product der Grundlinie mit der Höhe.

Es sey ad senkrecht auf bc, und das Rechteck $bcfg$ vollendet, so ist $\triangle\, abd = \frac{1}{2} bdag$, $\triangle\, acd = \frac{1}{2} adcf$, also $\triangle\, abc = \frac{1}{2} bcfg = \frac{1}{2} bc \cdot ad$. Theilt man ab, ac in die Hälfte in p, q, so ist (II. 36.) $pq \mathrel{\widehat{=}} bc$, $\triangle\, apr = bpk$, $\triangle\, aqr = cqh$, also $\triangle\, abc = bchk = bc \cdot dr$, $dr = \frac{1}{2} ad$, $\triangle\, bpl = apo$, $\triangle\, cqm = aqn$, also $\triangle\, abc = lmno = lm \cdot ad$, $lm = \frac{1}{2} bc$.



Wenn statt der Höhe ad die Seiten ab, ac gegeben sind, so findet man die Höhe auf folgende Art: Nach II. 45. ist $ac^2 = ad^2 + cd^2$, $ab^2 = ad^2 + bd^2$, also $ac^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2$. Macht man $df = bd$, so ist $cd^2 - bd^2 = cdnp - bdgh = cdnp - dfhk = hnpl + cfkl = hnpl + gmnh = gmpl = gl \cdot lp = bc \cdot cf$. Also $ac^2 - ab^2 = bc \cdot cf$. Da ab, ac, bc gegeben sind, so findet man $cf = \dfrac{ac^2 - ab^2}{bc}$.
Da $bc = cd + bd$, $cf = cd - bd$, so ist $cd = \dfrac{bc + cf}{2}$, und $bd = \dfrac{bc - cf}{2}$. Dann ist $ad^2 = ac^2 - cd^2$, oder $ad^2 = ab^2 - bd^2$.

Beispiele.

1) Die Grundlinie sey 66 Fuss, die Höhe 40 Fuss, was ist der Inhalt?

66
20
1320 □Fuss.

2) Die Grundlinie sey 28 Fuss, die Höhe 15 Fuss, was ist der Inhalt?

15
14
210 □Fuss.

3) Die Grundlinie sey 66, die Seiten 50 und 104 Fuss, was ist der Inhalt?

104	154	126	104	50
50	54	66	96	30
154	8316	192	200	80
54	div. 66	60	8	20
		96	1600	1600
		30	QW = 40	
			33	

Inhalt = 1320 □Fuss.

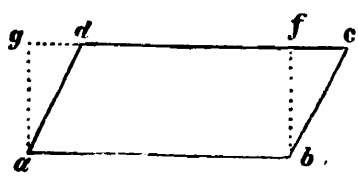
4) Die Grundlinie sey 44, die Seiten 17 und 39 Fuss, was ist der Inhalt?

39	56	28	39	17
17	22	44	36	8
56	1232	72	75	25
22	div. 44	16	3	9
		36	225	225
		8	QW = 15	
			22	

Inhalt = 330 □Fuss.

9.

Der Inhalt eines Parallelogramms ist das Product der Grundlinie mit der Höhe.



Es ist nämlich, wenn ag, bf senkrecht auf ab sind, $abcd = abfg = ab \cdot bf$. Wenn die Höhe nicht unmittelbar gegeben ist, so berechnet man sie, wie in III. 8. aus der Grundlinie ab, der Seite ad, oder bc, und der Diagonallinie bd oder ac.

Beispiele.

1) Die Grundlinie sey 14 Fuss, die Höhe 12 Fuss, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 14 \\ 12 \\ \hline \text{Inhalt} = 168 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

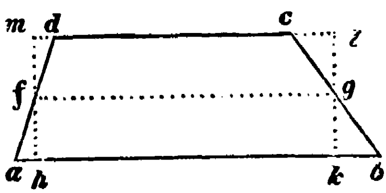
2) Die Grundlinie sey 28 Fuss 9 Zoll, die Höhe 15 Fuss 7 Zoll, was ist der Inhalt?

	□Fuss	□Zoll
A . B	420	
A . D	16	48
B . C	11	36
B . D		63
Inhalt =	448	3

3) Die Grundlinie sey 14, die Seite 13, die Diagonallinie 15 Fuss, was ist der Inhalt?

15	28	4	15	13
13	2	14	9	5
28	56	18	24	18
2	div. 14	10	6	8
		9	144	144
		5	QW = 12	
			14	
			Inhalt = 168 □Fuss.	

10.

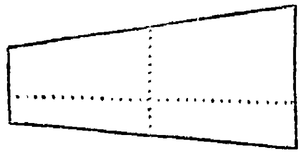


Der Inhalt eines Trapeziums ist das Product der Höhe mit der mittlern Transversallinie, oder der halben Summe der beiden Parallelseiten.

Es sey $ab \frown cd$, und es sey ad in f, bc in g halbirt, so ist (II. 36.) $fg \frown ab \frown cd$, $\triangle\, afh = dfm$, $\triangle\, bgk = cgl$, also $abcd = hklm = fg \cdot kl$. Aber $fg = cd + cl + dm$, $fg = ab - ah - bk$, also $2fg = ab + cd$, oder $fg = \frac{ab + cd}{2}$.

Beispiele.

1) Eine Wiese sey 20 Ketten 20 Fuss lang, an dem schmälern Ende 8 Ketten 9 Fuss, an dem breitern Ende 15 Ketten 32 Fuss, was ist der Inhalt?

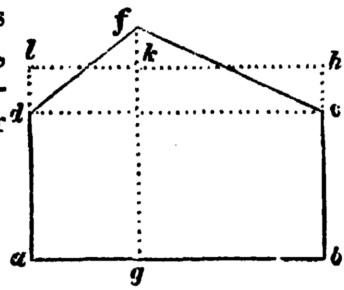


8,18	11,91
15,64	20,40
23,82	242,9640 □Ketten
11,91	oder Loofst. 15 . 2 □Ketten 2410 □Fuss.

2) Eine oben schräge gezogene Mauer sey 42 Fuss 7 Zoll lang, an dem niedrigern Ende 8 Fuss 9 Zoll hoch, an dem höhern Ende 11 Fuss $7\frac{1}{2}$ Zoll hoch, was ist der Inhalt?

		□Fuss	□Zoll
8 . 9	*A . C*..........	420	
11 . $7\frac{1}{2}$	*A . D*..........	7	126
10 . $2\frac{1}{4}$	*C . B*..........	5	120
	B . D..........		$15\frac{3}{4}$
	Inhalt =	433	$117\frac{3}{4}$.

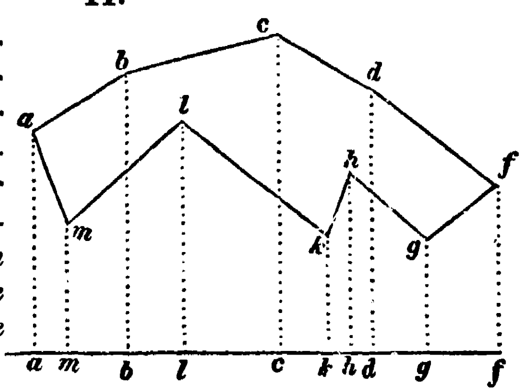
3) Eine Giebelwand sey 42 Fuss lang, an den Seitenlinien 35 Fuss hoch, die Höhe der Spitze über der Grundlinie sey 56 Fuss, wie gross ist der Inhalt?



ad = *bc* = 35 Fuss
fg = ...56
Mittel 45,5
ab = ...42
Inhalt = 1911 □Fuss.

11.

Der Inhalt einer unregelmässigen Figur ist gleich der Summe der vorwärtsgehenden Trapezien, weniger der Summe der zurückgehenden Trapezien, wenn man eine beliebige grade Linie zur Grundlinie wählt.



Man fällt von allen Winkelpuncten senkrechte Linien auf die Grundlinie, und berechnet zwischen den beiden äussersten Ecken *a*, *f* die Summe der vorwärtsgehenden Trapezien *aabb*, *bbcc*, *ccdd*, *ddff*, wovon man die Summe der zurückgehenden Trapezien *ffgg*, *gghh*, *hhkk*, *kkll*, *llmm*, *mmaa* abzieht.

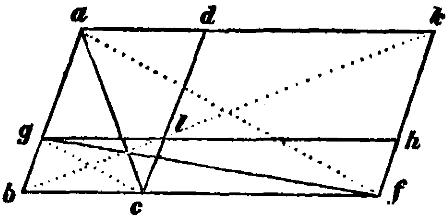
Vorwärtsgehend

Ecke	Höhe	Mittel	Breite	Product
1	15			
		$20\frac{1}{2}$	17	$348\frac{1}{2}$
2	26			
		$24\frac{1}{2}$	3	$73\frac{1}{2}$
3	23			
		$23\frac{1}{2}$	11	$258\frac{1}{2}$
4	24			
		22	5	110
5	40			
		$19\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{4}$
6	19			
		$18\frac{3}{4}$	2	$37\frac{1}{2}$
7	$18\frac{1}{2}$			
			$42\frac{1}{2}$	$915\frac{3}{4}$

Zurückgehend

Ecke	Höhe	Mittel	Breite	Product
7	$18\frac{1}{2}$			
		$11\frac{3}{4}$	7	$82\frac{1}{4}$
8	5			
		$6\frac{1}{2}$	10	65
9	8			
		6	13	78
10	4			
		$9\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$118\frac{3}{4}$
1	15			
			$42\frac{1}{2}$	344
				$915\frac{3}{4}$
			Inhalt =	$571\frac{3}{4}$

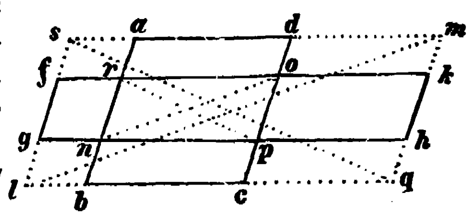
12.



Ein Dreieck oder Parallelogramm in ein andres von gleichem Inhalt und gegebener Grundlinie zu verwandeln.

Das Dreieck *abc* oder das Parallelogramm *abcd* sey in ein andres zu verwandeln, dessen Grundlinie *bf* seyn soll. Man ziehe *af*, und *cg* ⫽ *af*, so ist (II. 32.) △ *gbf* = *abc*, also auch *gbfh* = *abcd*. Oder man ziehe *fk* ⫽ *ab* bis an die verlängerte *ad*, verbinde *bk*, welche die *cd* in *l* schneidet, ziehe durch *l* die *gh* ⫽ *bf*, so ist (II. 33.) *gbhf* = *abcd*, also auch △ *gbf* = *abc*.

13.



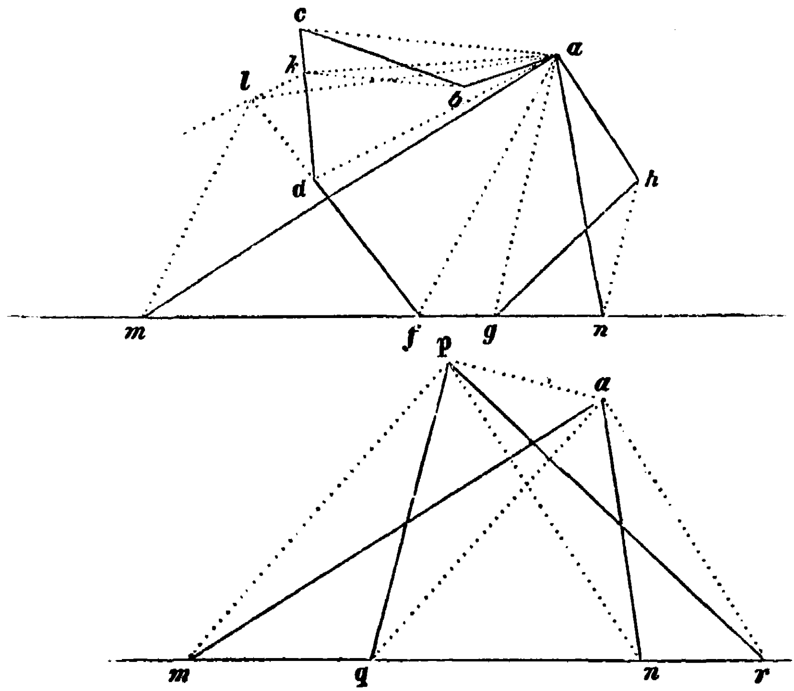
Ein Parallelogramm in ein andres von gleichem Inhalt zu verwandeln, dessen Grundlinie gegeben, und der gegebenen parallel ist.

Das Parallelogramm *abcd* sey in ein andres zu verwandeln, dessen Grundlinie *gh* gegeben und der *bc* parallel sey.

Man ziehe $gl \parallel ab$ bis an bc, und $hm \parallel ab$ bis an ad, verbinde lm, ziehe $no \parallel lm$ bis an cd, dann durch o die $fk \parallel gh$, so ist $fghk = abcd$. Denn wenn gh, cd einander in p, und bc, hk einander in q schneiden, so ist $\triangle\ npo \sim lqm$, also $np : op = lq : qm$, oder $bc : fg = gh : ab$, also (II. 56.) $abcd = fghk$.

Man kann auch $gs \parallel ab$ bis an da, und $hq \parallel ab$ bis an bc ziehen, qs verbinden, $pr \parallel qs$ bis an ab ziehen, durch r die $fk \parallel gh$ ziehen.

14.

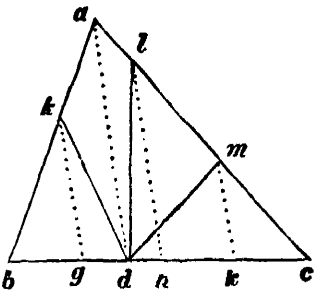


Ein ebenes unregelmässiges Vieleck in ein Dreieck von gleichem Inhalt zu verwandeln.

Man ziehe $bk \parallel ac$ bis an cd, so ist $akc = abc$, also $acd - akc = acd - abc$, also $akd = abcd$. Man ziehe $kl \parallel ad$ bis an fd, so ist $ald = akd = abcd$, also $alf = abcdf$. Man ziehe $lm \parallel af$ bis an gf, so ist $amf = alf = abcdf$, also $amg = abcdfg$. Man ziehe $hn \parallel ag$ bis an fg, so ist $agn = agh$, also $\triangle\ amn = abcdfgh$. Soll zuletzt das $\triangle\ amn$ in ein andres verwandelt werden, dessen Spitze in p ist, so ziehe $aq \parallel pm$, $ar \parallel pn$, so ist $amq = apq$, also $amn = apqn$, $pna = pnr$, also $pqr = apqn$, also $amn = pqr$.

15.

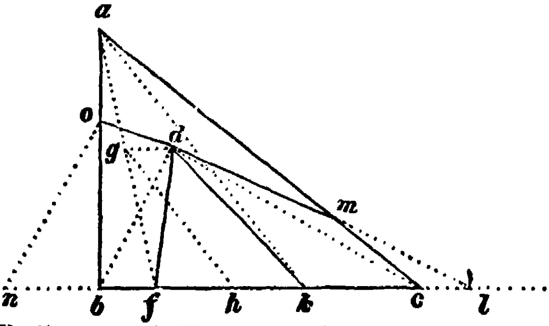
Ein Dreieck aus einem Puncte der Grundlinie in gleiche Theile zu theilen.



Das Dreieck abc sey aus d zu theilen, z. B. in 4 gleiche Theile. Man theile bc in 4 gleiche Theile in g, h, k, ziehe gk, hl, km mit da parallel, und dann dk, dl, dm, so theilen diese das $\triangle\, abc$ auf die verlangte Art. Denn $\triangle\, kbd = abg$, $akdl = agh$, $\triangle\, ldm = ahk$, $\triangle\, mdc = akc$.

16.

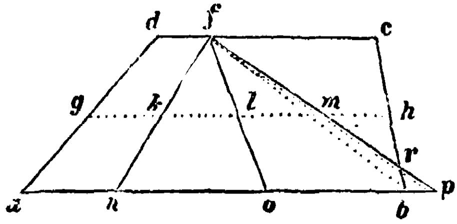
Ein Dreieck aus einem innern Puncte in gleiche Theile zu theilen, so dass die erste Theilungslinie eine vorgeschriebene Richtung hat.



Es sey z. B. abc in 4 gleiche Theile zu theilen, so dass df die erste Linie sey. Man verbinde af, ziehe $dg \parallel bc$ bis an af. Man nehme $fh = \frac{1}{4} bc$, verbinde gh, ziehe $ak \parallel gh$, verbinde dk, so ist $\triangle\, dfk = gfk = afh = \frac{1}{4} abc$. Man nehme $kl = fk$. Fällt l innerhalb des Dreiecks abc, so ist dl die Theilungslinie. Fällt l ausserhalb, so verbinde man dc, ziehe $lm \parallel dc$ bis an ac, so ist $\triangle\, dcm = dcl$, also $dkcm = dkl = dfk = \frac{1}{4} abc$. Man nehme $fn = fk$, und wenn n ausserhalb bc liegt, so verbinde man db und ziehe $no \parallel db$ bis an ab, so ist $\triangle\, dnb = dob$, also $dobf = dnf = dfk = \frac{1}{4} abc$.

17.

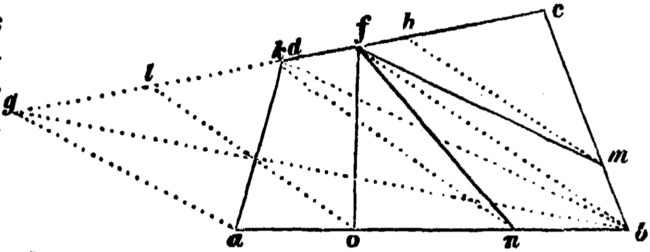
Ein Parallelogramm oder Trapez in gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien von Puncten ausgehen, die in einer der Parallelseiten liegen.



Z. B. *abcd* soll in 4 gleiche Theile getheilt werden, und die Linien sollen von *f* ausgehen. Man ziehe die mittlere Transversallinie *gh*, welche die Seiten *bc*, *da* halbirt, und theile diese in 4 gleiche Theile in *k*, *l*, *m*, ziehe *fkn*, *flo*, *fmp*, so ist $fdan = fno = fop = \frac{1}{4} abcd$. Fällt *p* ausserhalb der Figur, so verbindet man *fb*, zieht $pr \frown fb$, und dann die Theilungslinie *fr*, so ist $\triangle\, fbr = fbp$, also $fobr = fop = \frac{1}{4} abcd$.

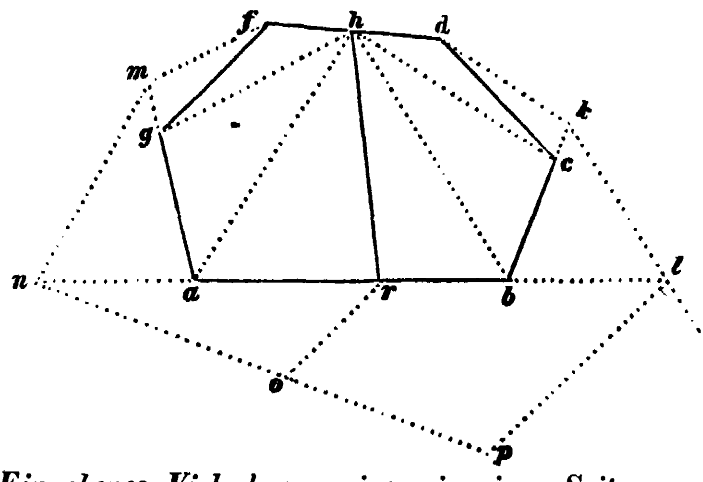
18.

Ein ebenes Viereck aus einem in einer Seite gegebenen Puncte in gleiche Theile zu theilen.



Das Viereck *abcd* sey aus *f* in 4 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe $ag \frown bd$, so ist $\triangle\, bcg = abcd$. Man theile also *cg* in 4 gleiche Theile in *h*, *k*, *l*, und ziehe *hm*, *kn*, *lo* mit *bf* parallel, so ist $\triangle\, cfm = bch = \frac{1}{4} bcg = \frac{1}{4} abcd$, $bcfn = bck = \frac{2}{4} bcg = \frac{2}{4} abcd$, $bcfo = bcl = \frac{3}{4} bcg = \frac{3}{4} abcd$.

19.

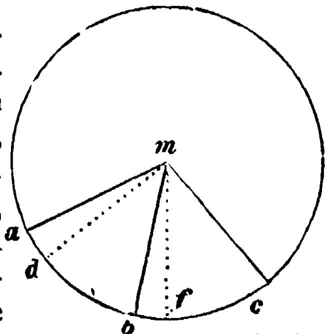


Ein ebenes Vieleck aus einem in einer Seite gegebenen Puncte nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Es sey das Vieleck *abcdfg* aus *h* so zu theilen, dass sich die Theile wie die gegebenen Linien *no*, *op* verhalten.

Man ziehe $dk \parallel hc$ bis an bc, so ist $hbcd = hbk$. Man ziehe $kl \parallel hb$ bis an ab, so ist $hrbcd = hrl$. Man ziehe $fm \parallel hg$ bis an ag, so ist $hagf = ham$. Man ziehe $mn \parallel ha$ bis an ba, so ist $hragf = hrn$. Um also den Punct r zu bestimmen, wohin die Theilungslinie gezogen werden muss, ziehe man $or \parallel pl$, so ist $\frac{hragf}{hrbcd} = \frac{hrn}{hrl} = \frac{rn}{rl} = \frac{no}{op}$.

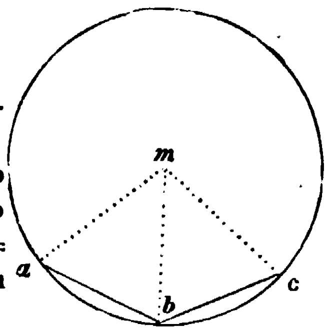
20.



In einem Kreise gehören zu gleichen Mittelpunctswinkeln gleiche Bögen.

Es sey $\angle\, amb = bmc$, so kann man den $\angle\, bmc$ so auf amb legen, dass bm auf am, cm auf bm kommt. Zieht man zwei Halbmesser md, mf, so dass $\angle\, amd = bmf$, so wird dann auch fm auf dm fallen. Da dieses für alle zwischenliegende Puncte gilt, so decken die Bögen bc, ab einander, und sind also einander gleich.

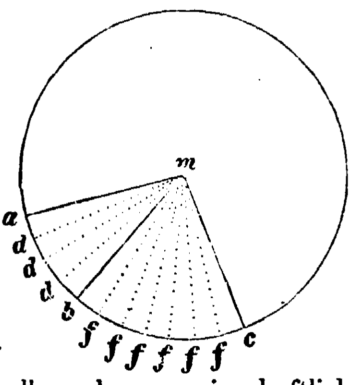
21.



In einem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.

Wenn die Sehnen $ab = bc$, so decken die $\triangle\, amb$, bmc einander, also sind die Mittelpunctswinkel $amb = bmc$, also (III. 20.) sind die Bögen $ab = bc$.

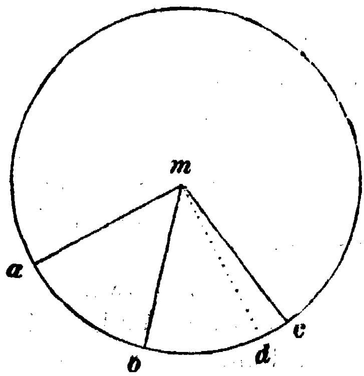
22.



In einem Kreise verhalten sich die Bögen wie die Mittelpunctswinkel.

Denn wenn die Mittelpunctswinkel amb, bmc ein rationales Verhältniss zu einander haben, so giebt es einen kleinern Winkel $dmd = fmf$, welcher sowohl in amb als in bmc eine ganze Anzahl Male enthalten ist. Also sind auch (III. 20.) die Bögen ad, dd, bd, bf, ff, cf einander gleich. Also ist jeder derselben das gemeinschaftliche

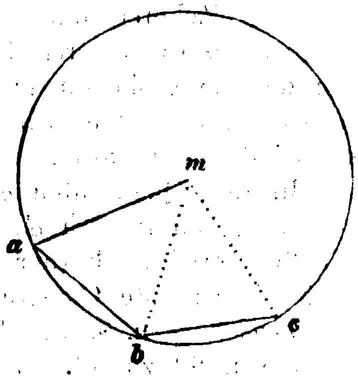
Maass der Bögen ab, bc. Dieses Bogenmaass ist so viel mal in den Bögen ab, bc enthalten, als das Winkelmaass in den Winkeln amb, bmc, also ist Bogen ab : Bogen bc = $\angle amb : \angle bmc$.



23.

In einem Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Mittelpuncts-winkel.

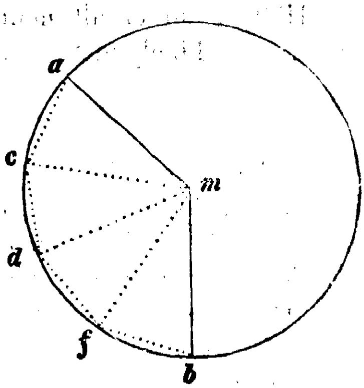
Es sey Bogen $ab = bc$. Wäre nun $\angle amb$ nicht $= bmc$, so sey $\angle amb = bmd$, also (III. 20.) Bogen $ab = bd$, also Bogen $bd = bc$, was unmöglich ist. Also muss $\angle amb = bmc$ seyn.



24.

In einem Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Sehnen.

Es sey Bogen $ab = bc$, so ist (III. 23.) $\angle amb = bmc$, also Sehne $ab = bc$.

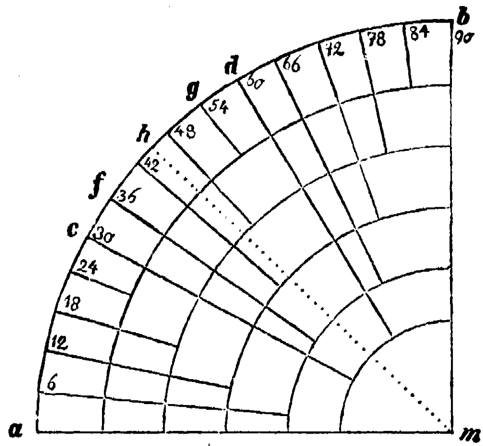


25.

Um einen Winkel in gleiche Theile zu theilen, theilt man den entsprechenden Bogen in gleiche Theile.

Es sey z. B. der $\angle amb$ in 4 gleiche Theile zu theilen, so beschreibt man aus der Winkelspitze m als Mittelpunct mit einem beliebigen Halbmesser ma einen Kreisbogen zwischen den Winkelseiten, und theilt denselben in 4 gleiche Theile, d. h. man sucht, entweder geometrisch oder durch Versuche, eine Sehne ac, welche sich in den Bogen ab in c, d, f, b 4 mal eintragen lässt. Dann sind auch die $\angle amc$, cmd, dmf, fmb einander gleich.

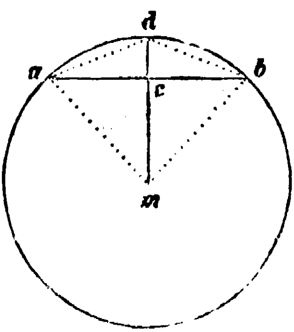
Der 90ste Theil eines rechten Winkels heisst ein Grad, und ist das Maass aller übrigen Winkel. Uneigentlich nennt man auch wohl denjenigen Theil des Kreisumfangs, welcher einem Grad entspricht, ebenfalls einen Grad. Hiernach hat der Viertelkreis oder Quadrant 90°, der Halbkreis 180°, der ganze Kreis 360°, zwei Nebenwinkel so



wie die drei Winkel eines Dreiecks machen 180°, die um einen Punct herum liegenden Winkel 360°. Der Grad wird weiter in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, die Sekunde in Zehntel und Hundertel getheilt. Da der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° hat, so heisst diese Eintheilung die Sexagesimaltheilung. Ein Winkelmaassstab, auf welchem der rechte Winkel in 90°, der Halbkreis in 180° getheilt ist, heisst ein Transporteur.

In den Quadranten ab trägt man den Halbmesser von b nach c, von a nach d, wodurch man die Puncte von 30° und 60° erhält. Ferner die Seite des Zehnecks, die sich durch eine leichte Construction finden lässt, von a nach f, von b nach g u. s. w. Hierdurch ergeben sich alle Theilpuncte von 6° zu 6°. Theilt man den Quadranten bei h in die Hälfte, so erhält man den Theilpunct von 45°, und dadurch alle Theilpuncte von 3° zu 3°.

26.



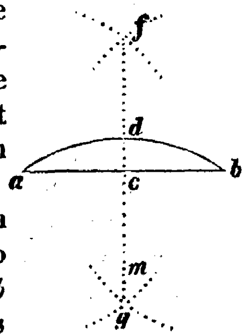
Eine aus dem Mittelpuncte des Kreises auf eine Sehne gefällte senkrechte Linie theilt sowohl die Sehne als den Bogen in die Hälfte.

Denn es sey c ein rechter Winkel, so ist (I. 36.) $\triangle\, mca = mcb$, also $ac = bc$ und $\angle\, amd = bmd$, also (III. 20.) Bogen $ad = bd$.

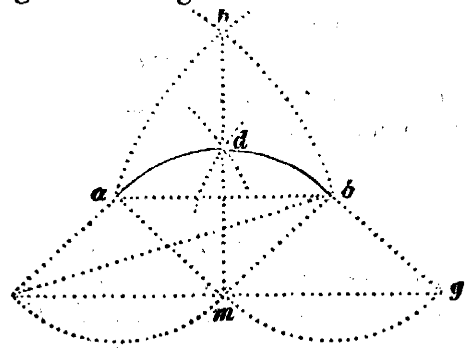
27.

Einen Kreisbogen in die Hälfte zu theilen.

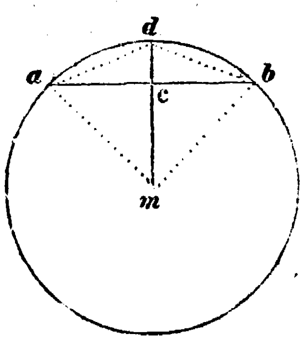
Man beschreibe über und unter die Sehne ab gleichschenklige Dreiecke abf, abg, verbinde fg, so theilt diese Linie die Sehne ab in c senkrecht in die Hälfte, und theilt also auch (III. 26.) den Bogen ab in d in die Hälfte.



Wenn man zu dieser Theilung bloss den Zirkel allein, ohne Lineal, anwenden will, so beschreibe man aus den Mittelpuncten a, b mit dem Halbmesser des gegebenen Bogens zwei Bögen, die einander in dem Mittelpuncte m des gegebenen Bogens schneiden, trage aus m die Sehnen $mf = mg = ab$ ein, so ist (I. 16.) fmg eine grade Linie, also (III. 8.) $fb^2 - bg^2 = fg \cdot fm = 2fm^2$, also $fb^2 - fm^2 = bg^2 + fm^2 = mb^2 + fm^2$. Man beschreibe also über die Grundlinie fg ein gleichschenkliges $\triangle\, fgh$, dessen Schenkel $fh = gh = fb$, so ist $mh^2 = mb^2 + fm^2$. Man beschreibe über die Grundlinie fg ein zweites gleichschenkliges Dreieck fdg, dessen Schenkel $fd = gd = mh$, so ist $fd^2 = fm^2 + md^2$, also $mh^2 = fm^2 + md^2$. Aber $mh^2 = fm^2 + mb^2$, also $md = mb$. Also liegt der Punct d sowohl in mh als im Bogen ab, und theilt also den Bogen ab in die Hälfte.



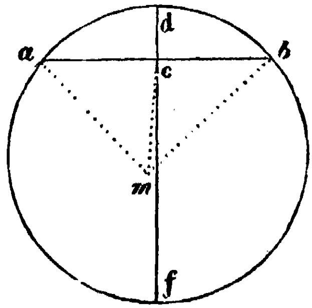
28.



Eine grade Linie, welche den Mittelpunct des Kreises mit der Mitte der Sehne oder des Bogens verbindet, ist auf der Sehne senkrecht.

Denn wenn $ac = bc$, so ist (I. 5.) $\triangle\, mca = mcb$, also $\angle\, mca = mcb = R$. Wenn $ad = bd$, so ist $\angle\, amd = bmd$, also $\angle\, amc = bmc$, also (I. 1.) $\triangle\, mca = mcb$, also $\angle\, mca = mcb = R$.

29.

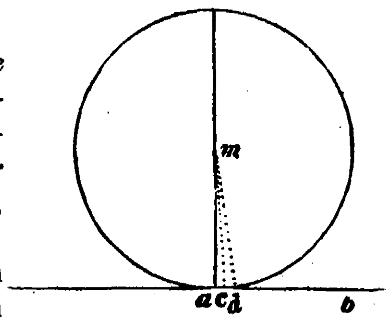


Eine grade Linie, welche in der Mitte der Sehne senkrecht auf dieselbe in der Ebene des Kreises errichtet wird, theilt den Bogen in die Hälfte und geht durch den Mittelpunct des Kreises.

Denn wenn $ac = bc$, $cd = cd$, $\angle\, acd = bcd = R$, so ist (I. 1.) $\triangle\, acd = bcd$, also $ad = bd$, also (III. 21.) Bogen $ad = bd$.

Wenn der Mittelpunct m nicht in der Senkrechten cf, sondern seitwärts läge, so wäre $ac = bc$, $ma = mb$, $mc = mc$, also $\triangle\, mca = mcb$, also (I. 5.) $\angle\, mca = mcb = R$, aber auch $\angle\, fca = R$, also $\angle\, mca = fca$, was unmöglich ist.

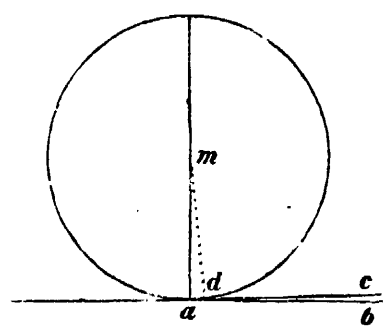
30.



Eine grade Linie, welche durch irgend einen Punct des Umfangs senkrecht auf den Halbmesser oder Durchmesser in der Ebene des Kreises gezogen wird, berührt den Kreis.

Eine grade Linie, welche in der Ebene des Kreises nur einen Punct mit demselben gemein hat, in allen übrigen Puncten aber ausserhalb des Kreises liegt, heisst eine Berührungslinie oder Tangente. Wenn nun $\angle\, mab = R$, so kann ab keinen zweiten Punct d mit dem Kreise gemein haben. Denn alsdann wäre ad eine Sehne des Kreises, welche sich in c halbiren liesse, also wäre (III. 28.) $\angle\, mca = mcb = R$, was unmöglich ist (I. 24.), weil $\angle\, mac = mab = R$.

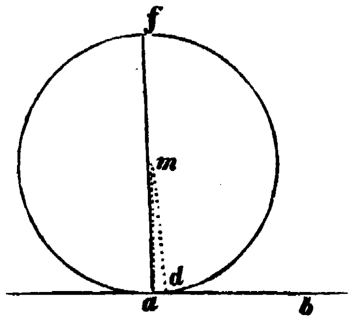
31.



In einem Puncte des Umfangs kann nur eine einzige Berührungslinie an den Kreis gezogen werden.

Es sey $\angle\, mab = R$, so ist (III. 30.) ab eine Berührungslinie in a. Wenn es nun möglich wäre, in der Ebene des Kreises noch eine zweite Berührungslinie ac aus a an den Kreis zu ziehen, so dass $\angle\, mac < mab$, also auch $\angle\, mac < R$ wäre, so könnte man aus m auf ac eine Senkrechte md fällen. Da $\angle\, mad < R$, $\angle\, mda = R$, so wäre (I. 26.) $md < ma$ d. h. ein Punct von ac läge innerhalb des Kreises, also wäre ac keine Berührungslinie. Würde $\angle\, mac > mab$ angenommen, so ergäbe sich auf der andern Seite von a derselbe Beweis.

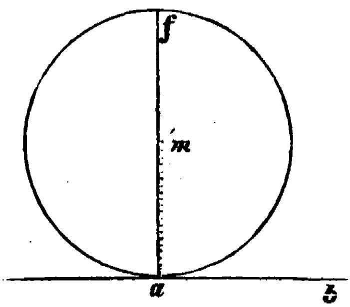
32.



Die Berührungslinie ist im Puncte der Berührung auf dem Halbmesser oder Durchmesser senkrecht.

Wenn ab den Kreis in a berührt, der $\angle\, fab = R$ wäre, und der Mittelpunct m nicht in af läge, so könnte man von m auf ab eine Senkrechte md fällen, dann wäre $\angle\, mad < mda$, also $md < ma$, also läge ein Punct von ab innerhalb des Kreises, also wäre ab keine Berührungslinie.

33.



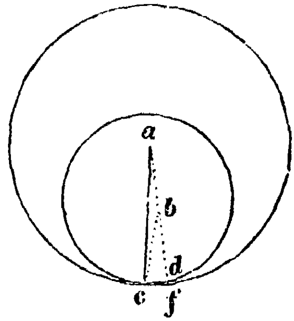
Der Mittelpunct des Kreises liegt in der graden Linie, welche auf eine Berührungslinie im Berührungspuncte, in der Ebene des Kreises senkrecht errichtet wird.

Die Linie ab berühre den Kreis in a, und fa sey senkrecht auf ab. Läge der Mittelpunct m nicht in fa, so würde doch (III. 32.) $\angle\, mab = R$ seyn. Es ist aber unmöglich in einer Ebene in einem Puncte auf eine grade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten (I. 17.), also liegt m in af.

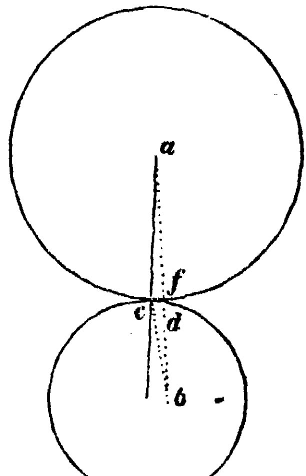
34.

Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegt der Berührungspunct in der graden Linie der Mittelpuncte.

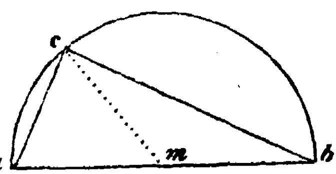
Zwei Kreise berühren einander, wenn sie in einer Ebene liegen, einen Punct des Umfangs mit einander gemein haben, und alle Puncte des kleinern Kreisumfangs innerhalb oder ausserhalb des grössern Kreisumfangs liegen. Jene Berührung



heisst die innere, diese die äussere. Es seyen *a*, *b* die Mittelpuncte des grössern und kleinern Kreises, *c* der Berührungspunct. Läge *b* nicht in der graden Linie *ac*, so würde die gehörig verlängerte grade Linie *ab* die Kreise *b*, *a* in *d*, *f* so schneiden, dass bei der innern Berührung $ad < af$, bei der äussern $ad > af$ wäre. Es ist aber (I. 27.) bei der innern $ab + bc > ac$, d. h. $ab + bd > af$, was unmöglich ist; bei der äussern $ac + bc > ab$, d. h. $af + bd > ab$, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich muss in beiden Fällen der Mittelpunct *b* in der graden Linie *ac* liegen.



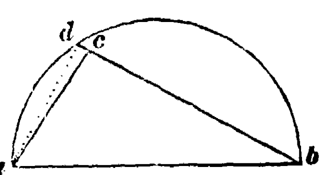
35.



Alle Umfangswinkel, welche im Halbkreise auf dem Durchmesser ruhen, sind rechte Winkel.

Umfangswinkel heissen diejenigen, deren Spitze im Umfange des Kreises liegen. Der Umfangswinkel *acb* ruht auf dem Durchmesser *ab*, die $\triangle$ *amc*, *bmc* sind gleichschenklig, also (II. 9.) $\angle amc = 2mcb$, $\angle bmc = 2mca$, aber $\angle amc + bmc = 2R$, also $\angle mcb + mca = R$, oder $\angle acb = R$.

36.



Wenn die Schenkel eines rechten Winkels auf einer graden Linie ruhen, so ist sie der Durchmesser eines Halbkreises, welcher durch die Spitze des rechten Winkels geht.

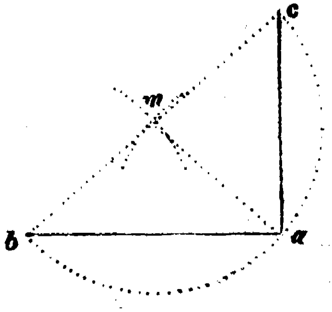
Es sey *acb* ein rechter Winkel, und über *ab* ein Halbkreis beschrieben. Würde nun *c* nicht im Umfange liegen, so würde *bc* den Umfang in *d* schneiden, und $\angle bca > bda$

seyn. Dies ist aber unmöglich, weil $\angle\, bca = R$, und nach (III. 35.) auch $\angle\, bda = R$. Also liegt die Spitze des rechten Winkels c im Halbkreise.

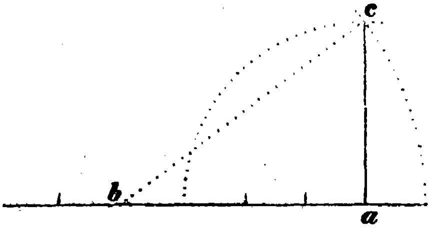
37.

Auf eine grade Linie einen rechten Winkel zu setzen.

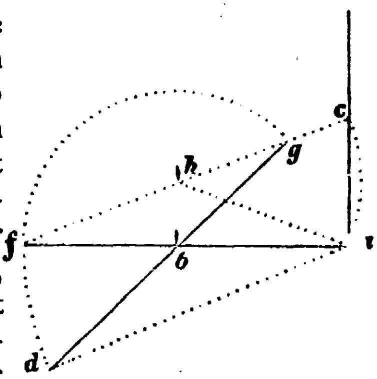
Man beschreibt über ab ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck abm, aus m mit dem Halbmesser $mb = ma$ beschreibt man einen Halbkreis, welcher durch a geht und von der verlängerten bm in c geschnitten wird, so ist (III. 35.) $\angle\, bac = R$.



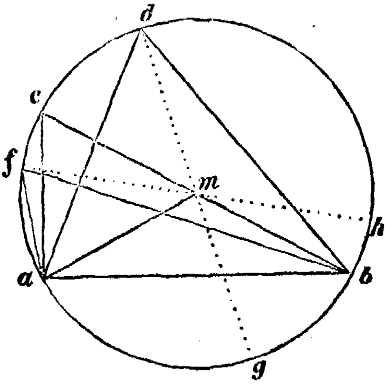
Oder man macht $ab =$ 4 Theilen, und beschreibt aus a mit dem Halbmesser $ac =$ 3 Theilen, aus b mit dem Halbmesser $bc = 5$ Theilen, Kreise, welche einander in c schneiden. Da nun $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, so ist $ab^2 + ac^2 = bc^2$, also (II. 46.) $\angle\, bac = R$.



Wenn aber der rechte Winkel auf dem freien Felde, wo keine Kreisdurchschnitte gemacht werden können, errichtet werden soll, so misst man auf der Grundlinie ein beliebiges Stück ab aus, steckt eine zweite Linie bd nach beliebiger Richtung ab, macht mit der Kette oder Schnur $bd = ab$, steckt die Linie ad ab, und misst sie aus. Den Unterschied der gemessenen Linien $ad - ab$ oder $ad - bd$ trägt man mit der Kette oder Schnur nach bf und bg, und steckt die Linie fg ab, worauf man $fh = ab$ aufträgt. Da $af = ad$, $fh = ab$, und $\angle\, hfa = bad$, so ist (I. 1.) $\triangle\, afh = dab$, also $ah = bd$, also $ah = fh$. Man trägt also fh auf hc, so ist (III. 35.) $\angle\, cab = R$.



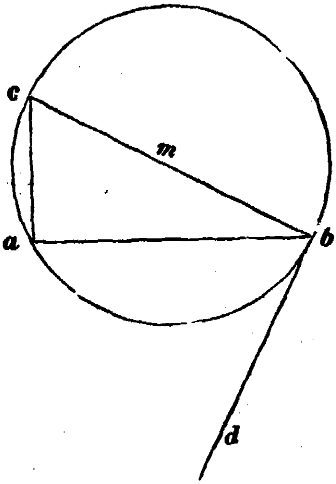
38.



Alle Umfangswinkel, welche im grössern Kreisabschnitte auf einer Sehne ruhen, sind dem halben Mittelpunctswinkel gleich, daher einander gleich.

Wenn der Mittelpunct m in bc liegt, so ist (II. 9.) $\angle acb = \frac{1}{2} amb$. Wenn m zwischen ad, bd liegt, so ist $\angle adg = \frac{1}{2} amg$, $\angle bdg = \frac{1}{2} bmg$, also $\angle adb = \frac{1}{2} amb$. Wenn m ausserhalb afb liegt, so ist $\angle afh = \frac{1}{2} amh$, $\angle bfh = \frac{1}{2} bmh$, also $\angle afb = \frac{1}{2} amb$. Also $\angle acb = adb = afb$. Da der ganze Bogen ab das Maass des Mittelpunctswinkels amb ist, so ist der halbe Bogen ab das Maass des Umfangswinkels.

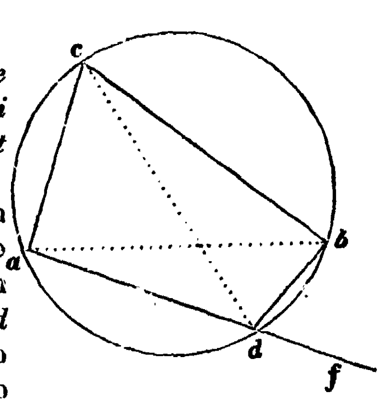
39.



Der Umfangswinkel ist gleich dem Winkel, welchen die Berührungslinie mit der Sehne bildet, auf welcher der Umfangswinkel ruht.

Man ziehe einen Durchmesser bc, so sind alle Umfangswinkel auf $ab = \angle bca$. Es sey bd eine Berührungslinie, so ist (III. 32.) $\angle cbd = R$. Aber auch (II. 10.) $\angle acb + abc = R$, also $\angle acb + abc = cbd$, also $\angle acb = abd$.

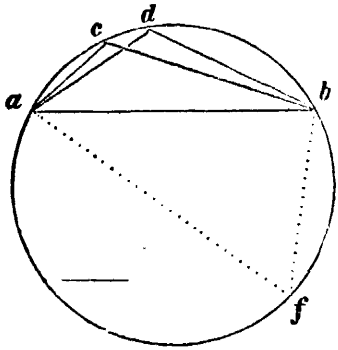
40.



Im Kreisviereck machen die beiden Gegenwinkel zusammen zwei rechte, oder der Aussenwinkel ist dem Gegenwinkel gleich.

Es sey acb der Winkel im grössern Abschnitt, so sind um so mehr acd, bcd Winkel im grössern Abschnitte, also (III. 38.) $\angle acd = abd$, $\angle bcd = bad$, also $\angle acb = abd + bad$, also

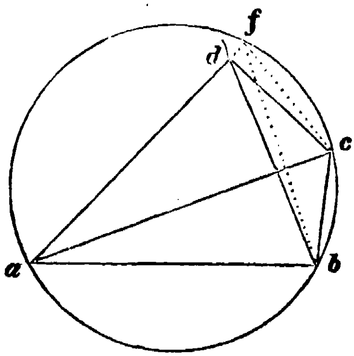
$\angle\, acb + adb = abd + bad + adb$, also (II. 7.) $\angle\, acb + adb = 2\,R$.



41.

Alle Umfangswinkel, welche im kleinern Kreisabschnitte auf einer Sehne ruhen, sind einander gleich.

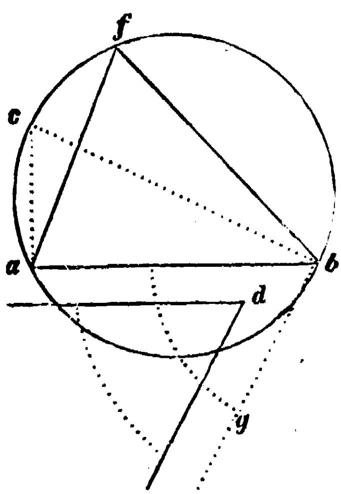
Denn (III. 40.) $\angle\, acb + afb = 2\,R$, $\angle\, adb + afb = 2\,R$, also $\angle\, acb = adb$.



42.

Wenn in einem Viereck die auf einer Seite nach einerlei Richtung liegenden Winkel gleich sind, oder die Gegenwinkel zusammen zwei rechte Winkel betragen, so ist das Viereck ein Kreisviereck.

Im Viereck $abcd$ sey $\angle\, acb = adb$, oder $\angle\, adc + abc = 2\,R$. Man beschreibe um das $\triangle\, abc$ einen Kreis (I. 21.). Wenn nun d nicht im Umfange dieses Kreises läge, und ad den Umfang in f schnitte, so würde (III. 38. 41.) $\angle\, afb = acb$, und (III. 40.) $\angle\, afc + abc = 2\,R$ seyn, also würde $\angle\, adb = afb$ und $\angle\, adc = afc$ seyn, was unmöglich ist, weil (I. 22.) $\angle\, adb > afb$, $\angle\, adc > afc$ ist.

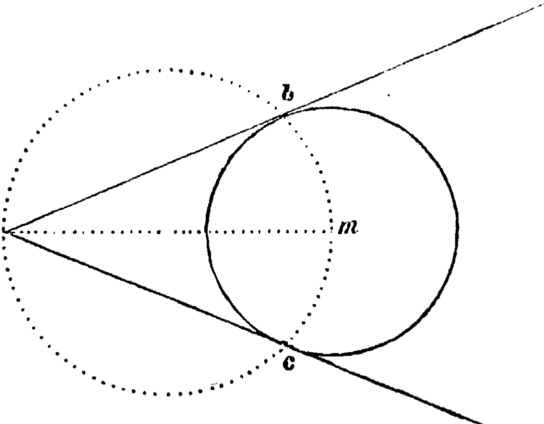


43.

Ueber eine grade Linie einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel in sich fasst.

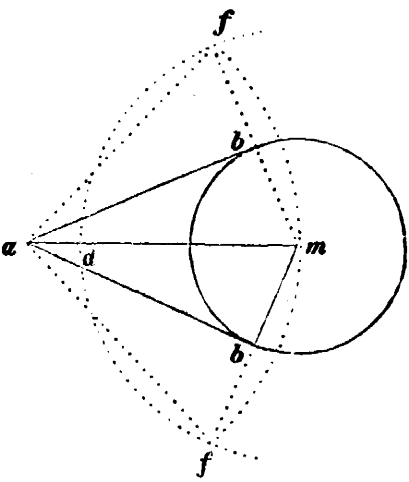
Die gegebene grade Linie sey ab, der gegebene Winkel sey d. Man setze (I. 8.) an ab den $\angle\, abg = d$, errichte in b auf bg, in a auf ab senkrechte Linien, welche einander in c schneiden, beschreibe über bc als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der verlangte. Denn wenn f ein beliebiger Punct des Umfangs ist, so ist (III. 38. 41.) $\angle\, afb = acb$. Aber (III. 35.) $\angle\, bac = R$. Da nun auch $\angle\, cbg = R$, so ist $\angle\, acb = abg$, also $\angle\, afb = abg = d$.

44.



Aus einem gegebenen Puncte an einen gegebenen Kreis die beiden Berührungslinien zu ziehen.

Der gegebene Punct sey a, der Mittelpunct des Kreises sey m. Man beschreibe über am als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in b, c schneidet, und ziehe ab, ac, so berühren sie den Kreis m. Denn (III. 35.) $\angle\, abm = acm = R$, also (III. 30.) sind ab, ac Berührungslinien.

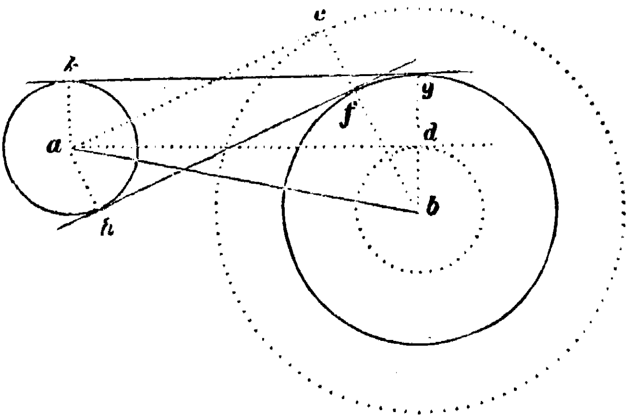


Oder man nehme auf ma die $md = 2\,mb$, beschreibe über ma ein $\triangle\, maf$, so dass $af = ma$, $mf = md = 2\,mb$, verbinde mf, welche den Kreis in b schneidet, so ist (I. 5.) $\triangle\, abf = abm$, also $\angle\, abm = R$, also (III. 30.) ab eine Berührende.

45.

An zwei Kreise, welche in einer Ebene liegen, die beiden gemeinschaftlichen Berührungslinien zu ziehen.

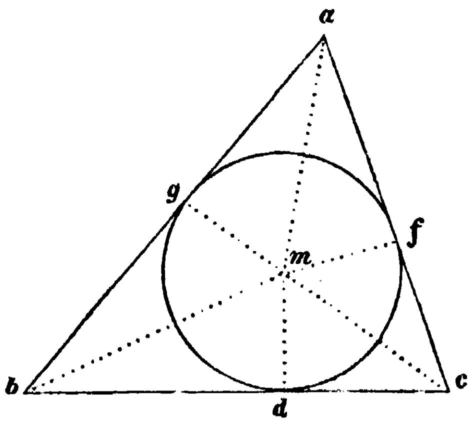
Die Mittelpuncte der gegebenen Kreise seyen a, b, ihre Halbmesser A, B. Man beschreibe aus b mit den Halbmessern $bc = B + A$, $bd = B - A$ concentrische Kreise, ziehe aus a an diese concentrischen Kreise die Berührungslinien (III. 44.) ac, ad, so ist (III. 32.) $\angle\, acb = adb = R$. Man verbinde bc, bd, welche den gegebenen Kreis in f, g schneiden, ziehe $fh \parallel ac$, $gk \parallel ad$, fälle aus a auf fh,



gk die Senkrechten ah, ak, so ist (II. 18.) $ah = cf$, $ak = dg$; aber $cf = dg = A$, also $ah = ak = A$, also liegen die Puncte h, k im Umfange des Kreises a, also sind, wegen der rechten Winkel f, g, h, k die Linien fh, gk (III. 30.) gemeinschaftliche Berührungslinien beider Kreise.

46.

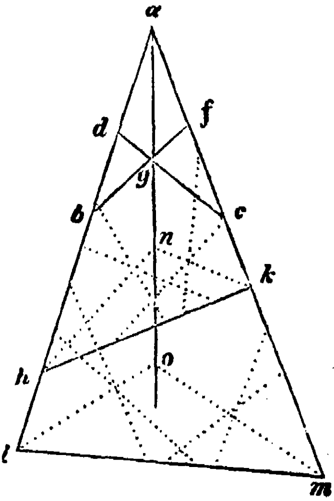
In ein Dreieck einen Berührungskreis zu beschreiben.



In dem gegebenen Dreieck abc theile man zwei Winkel a, b in die Hälfte (I. 10.) durch grade Linien am, bm, welche einander in m schneiden, so ist m der Mittelpunct des gesuchten Kreises. Denn wenn man aus m auf die Seiten bc, ca, ab die senkrechten Linien md, mf, mg fället, so ist $ma = ma$, $\angle\, mag = maf$, $\angle\, g = f = R$, also (I. 23.) $mg = mf$. Ferner $mb = mb$, $\angle\, mbd = mbg$, $\angle\, d = g = R$, also (I. 23.) $md = mg$. Also sind md, mf, mg Halbmesser eines Kreises, und wegen der rechten Winkel d, f, g wird dieser Kreis (III. 30.) von den Seiten bc, ca, ab berührt. Der dritte Winkel c wird durch die Linie mc ebenfalls in die Hälfte getheilt. Denn da $mc = mc$, $md = mf$, $\angle\, d = f = R$, so ist (I. 36.) $\triangle\, mcd = mcf$, also $\angle\, mcd = mcf$.

47.

Einen Winkel im freien Felde, wo keine Kreisdurchschnitte gemacht werden können, in die Hälfte zu theilen.

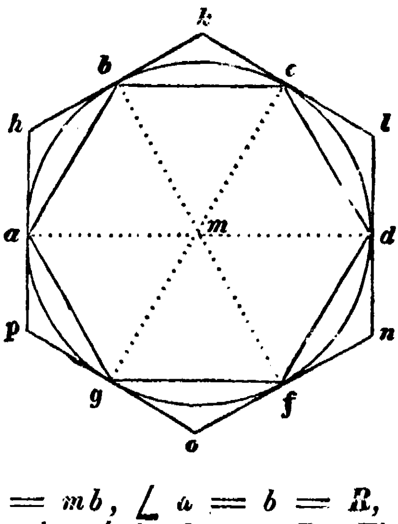


Wenn es möglich ist, die Spitze a des Winkels zu erreichen, so steckt man auf den Winkelseiten mit der Kette oder Schnur gleiche Stücke $ab = ac$, $ad = af$ ab, zieht die graden Linien bf, cd, welche einander in g schneiden, und zieht ag, welche den Winkel a in die Hälfte theilt. Denn da $ab = ac$, $af = ad$, $\angle a = a$, so ist (I. 1.) $\triangle abf = acd$, also $\angle b = c$, und $\angle d = f$, aber auch $bd = cf$, also (I. 2.) $\triangle bdg = cfg$, also $dg = fg$, $bg = cg$, also (I. 5.) $\triangle adg = afg$, $\triangle abg = acg$, also $\angle bag = cag$.

Wenn es nicht möglich ist, die Spitze a zu erreichen, so ziehe man zwischen den Winkelseiten zwei beliebige grade Linien hk, lm, theile auf die angezeigte Art die Winkel h, k und l, m in die Hälfte durch grade Linien, welche einander in n, o schneiden, so muss (III. 46.) sowohl an als ao den Winkel a in die Hälfte theilen, also muss die grade Linie on gehörig verlängert, durch den Punct a gehen, und den Winkel in die Hälfte theilen.

48.

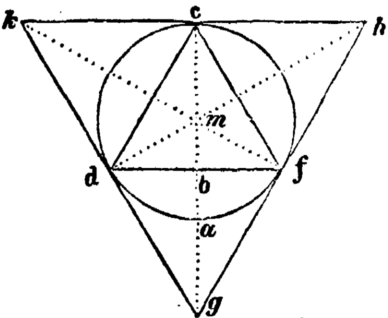
In und um einen Kreis ein regelmässiges Sechseck zu beschreiben.



Die Seite des eingeschriebenen Sechsecks ist dem Halbmesser gleich. Denn wenn man $ab = ma = mb$ macht, so ist $\angle amb = \frac{2}{3} R$, also $3 \cdot amb = 2R$, $6 \cdot amb = 4R$. In den Winkelpuncten des eingeschriebenen Sechsecks a, b, c u. s. w. errichtet man Senkrechte ph, hk, kl u. s. w., welche (III. 30.) den Kreis berühren. Da $mh = mh$, $ma = mb$, $\angle a = b = R$, so ist (I. 36.) $\triangle mah = mbh$, also $\angle bmh = \frac{1}{3} R$. Eben so beweiset man, dass $\angle bmk = \frac{1}{3} R$. Also $\triangle bmh = bmk$, also $ah = bh = bk$ u. s. w.

49.

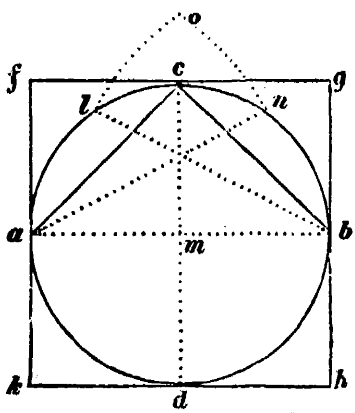
In und um einen Kreis ein regelmässiges Dreieck zu beschreiben.



Man zieht einen beliebigen Durchmesser ac, theilt den Halbmesser ma in b in die Hälfte, errichtet in b auf ma eine Senkrechte df, so ist sie die Seite des eingeschriebenen Dreiecks. Denn da $mb = ab$, $bd = bd$, $b = R$, so ist $\triangle\ abd = mbd$, also $ad = md = ma$, also $\angle\ bmd = \frac{2}{3} R$, eben so $\angle\ bmf = \frac{2}{3} R$, also $\angle\ cmd = cmf = \frac{4}{3} R = dmf$, also $cd = df = fc$. Errichtet man in c, d, f auf die Halbmesser mc, md, mf Senkrechte, so bilden sie das umschriebene Dreieck. Denn da $\angle\ bmd = \frac{2}{3} R$, so ist $\angle\ mdb = mfb = \frac{1}{3} R$, also $\angle\ bdg = bfg = \frac{2}{3} R$, also $dg = fg = df$ u. s. w.

50.

In und um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

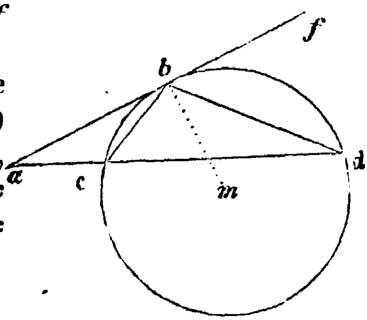


Man zieht zwei auf einander senkrechten Durchmesser ab, cd, so erhält man das eingeschriebene Quadrat $abcd$, und wenn man in den Ecken desselben senkrechte Linien auf die Durchmesser errichtet, so ergiebt sich das umschriebene Quadrat $fghk$. Um die Seite des eingeschriebenen Quadrats ohne Anwendung des Lineals zu erhalten, trägt man den Halbmesser in al, ln, nb, wodurch sich b ergiebt. Ueber ab beschreibt man mit der Oeffnung $ao = an$, $bo = bl$ ein gleichschenkliges Dreieck aob, wodurch sich der Punct o ergiebt. Dann ist $ac = mo$. Denn da $an^2 = bl^2 = 3\,ma^2$ (II. 47.), so ist $ao^2 = bo^2 = 3\,ma^2$. Da $ao = bo$, und $am = bm$, so ist (I. 5.) $\triangle\ amo = bmo$, also $\angle\ amo = R$, also $mo^2 = ao^2 - ma^2 = 2\,ma^2$. Also (II. 44.) $ac = mo$.

51.

Wenn aus einem Puncte an den Kreis eine Berührungslinie und eine Transversallinie gezogen wird, so ist *das Quadrat der Berührenden gleich dem Rechteck der Abschnitte auf der Transversallinie.*

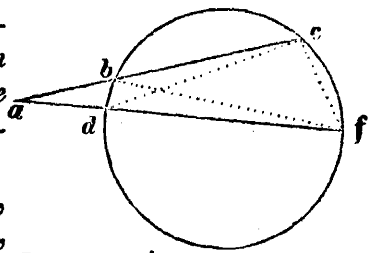
Die Berührende sey ab, die Transversallinie acd, so ist (III. 39.) $\angle\, abc = adb$, $\angle\, dbf = bcd$, also $\angle\, dba = bca$, also $\triangle\, abc \sim adb$, also (II. 59.) $ac : ab = ab : ad$, oder $ab^2 = ca \cdot ad$.



52.

Wenn aus einem äussern Puncte zwei Transversallinien an den Kreis gezogen werden, so sind die Rechtecke der Abschnitte auf denselben einander gleich.

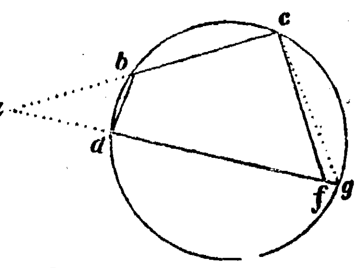
Denn (III. 38.) $\angle\, acd = afb$, $\angle\, cdf = cbf$, also $\angle\, cda = fba$, also $\triangle\, acd \sim afb$. Ferner (III. 40.) $\angle\, abd = afc$, $\angle\, adb = acf$, also $\triangle\, abd \sim afc$. Aus beiden folgt (II. 58. 59.) $ac : af = ad : ab$, also $ca \cdot ab = da \cdot af$.



53.

Wenn an dem Durchschnittspunct der Gegenseiten eines Vierecks die Rechtecke der Abschnitte einander gleich sind, so ist es ein Kreisviereck.

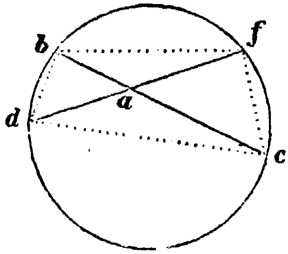
Es sey $ba \cdot ac = da \cdot af$. Man beschreibe um das $\triangle\, bcd$ einen Kreis. Wenn derselbe nicht durch f gehen, sondern die Seite df in g schneiden würde, so müsste (III. 52.) $ba \cdot ac = da \cdot ag$, also $da \cdot af = da \cdot ag$, also $af = ag$ seyn, was unmöglich ist. Also geht der Kreis auch durch den Punct f.



54.

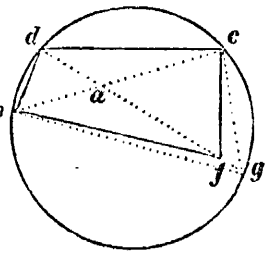
Wenn durch einen innern Punct zwei Transversallinien des Kreises gehen, so sind die Rechtecke der Abschnitte auf denselben einander gleich.

Denn (III. 38.) $\angle\, acd = afb$, $\angle\, cda = fba$, also $\triangle\, acd \sim afb$.



Ferner (III. 38.) $\angle\, abd = afc$, $\angle\, adb = acf$, also $\triangle\, abd \sim afc$. Aus beiden folgt (II. 58. 59.) $ac : af = ad : ab$, also $ca \cdot ab = da \cdot af$.

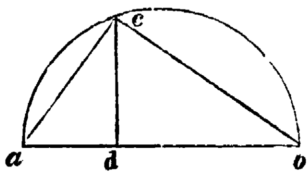
55.



Wenn an dem Durchschnittspuncte der Diagonallinien eines Vierecks die Rechtecke der Abschnitte einander gleich sind, so ist es ein Kreisviereck.

Es sey $ba \cdot ac = da \cdot af$. Man beschreibe um das $\triangle\, bcd$ einen Kreis. Wenn derselbe nicht durch f gehen, sondern die Diagonallinie df in g schneiden würde, so müsste (III. 54.) $ba \cdot ac = da \cdot ag$, also $da \cdot af = da \cdot ag$, also $af = ag$ seyn, was unmöglich ist. Also geht der Kreis auch durch den Punct f.

56.

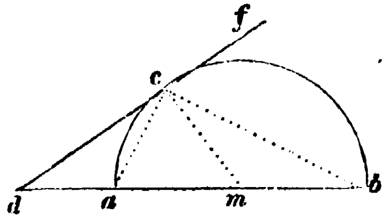


Wenn aus einem Puncte des Umfangs auf den Durchmesser oder aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse eine senkrechte Linie gefället wird, so ist sie die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers oder der Hypotenuse. Auch ist jede Sehne oder Kathete die mittlere Proportionallinie zwischen dem unter ihr liegenden Abschnitte und dem Durchmesser oder der Hypotenuse.

Denn da $\angle\, acd + bcd = R$, $\angle\, acd + cad = R$, $\angle\, bcd + cbd = R$, so ist $\angle\, acd = cbd$, $\angle\, bcd = cad$, also $\triangle\, acd \sim cbd$, $\triangle\, acd \sim abc$, $\triangle\, cbd \sim abc$ also $\frac{ad}{cd} = \frac{cd}{bd}$, $\frac{ad}{ac} = \frac{ac}{ab}$, $\frac{bd}{bc} = \frac{bc}{ab}$, oder $cd^2 = ad \cdot db$, $ac^2 = da \cdot ab$, $bc^2 = ab \cdot bd$.

Die beiden letzten Gleichungen enthalten auch den Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes (II. 45.), denn ihre Addition giebt $ac^2 + bc^2 = da \cdot ab + ab \cdot bd = ab^2$.

57.



Wenn aus einem äussern Puncte des Durchmessers eine Berührende an den Halbkreis gezogen *wird, so ist sie die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten des Durchmessers.*

Denn (III. 39.) $\angle\, dca = dbc$, $\angle\, bcf = bac$, also $\angle\, bcd = cad$, also $\triangle\, dca \sim dbc$, also $\frac{ad}{cd} = \frac{cd}{bd}$, oder $cd^2 = ad \cdot db$.

58.

Wenn eine Linie die mittlere Proportionallinie zwischen zwei andern ist, so verhält sich das Quadrat der kleinern zum Quadrat der mittlern, oder das Quadrat der mittlern zum Quadrat der grössern, wie die kleinere zur grössern.

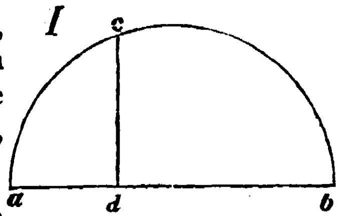
Denn wenn $\frac{A}{C} = \frac{C}{B}$ ist, so ist $C^2 = A \cdot B$, also $\frac{A^2}{C^2} = \frac{A^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B}$, und $\frac{C^2}{B^2} = \frac{A \cdot B}{B^2} = \frac{A}{B}$.

Daher ist auch (III. 56. 57.) $\frac{ad^2}{cd^2} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{cd^2}{bd^2} = \frac{ad}{bd}$ und (III. 56.) $\frac{ad^2}{ac^2} = \frac{ac^2}{ab^2} = \frac{ad}{ab}$, $\frac{bd^2}{bc^2} = \frac{bc^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab}$.

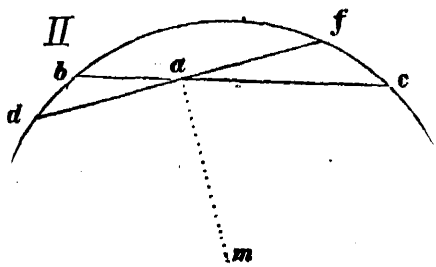
59.

Zwischen zwei Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, oder ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Die gegebenen Linien seyen die kleinere $= A$, die grössere $= B$, die gesuchte mittlere $= C$, so dass $A : C = C : B$, oder $C^2 = A \cdot B$.

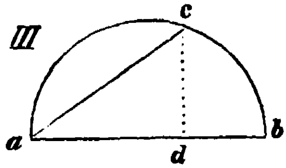


I. Mache $ad = A$, $bd = B$, beschreibe über $ab = A + B$ einen Halbkreis, errichte in d auf ab eine Senkrechte cd bis an den Halbkreis, so ist (III. 56.) $cd = C$.

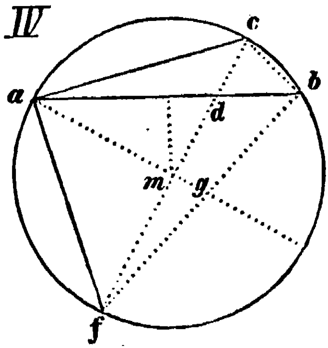


II. Mache $ab = A$, $ac = B$, beschreibe aus dem Mittelpunct m einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Puncte b, c geht, ziehe ma, und darauf df senkrecht, so ist (III. 54.) $da \cdot af = ba \cdot ac$ und (III. 26.) $da = af$, also $da = af = C$.

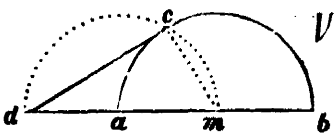
III. Mache $ad = A$, $ab = B$, beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in d eine Senkrechte dc auf ab bis an den Halbkreis, so ist (III. 56.) $ac = C$.



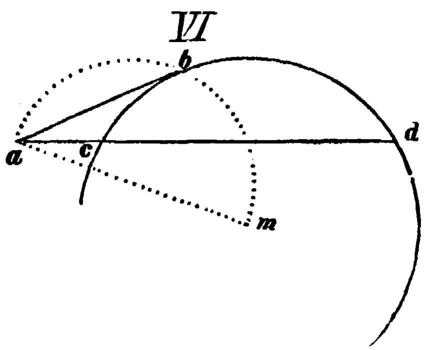
IV. Mache $ad = A$, $ab = B$, beschreibe aus dem Mittelpuncte m einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Puncte a, b geht, fälle aus d auf am die Senkrechte dg, welche den Kreis in c, f schneidet, so ist $ac = af = C$. Denn (III. 26.) $cg = fg$, $ac = af$, und (III. 38. 41.) $\angle abc = afc = acf$, $\angle abf = acf = afc$, also $\triangle acd \sim abc$, $\triangle afd \sim abf$, also $ac^2 = da \cdot ab$, und $af^2 = da \cdot ab$.



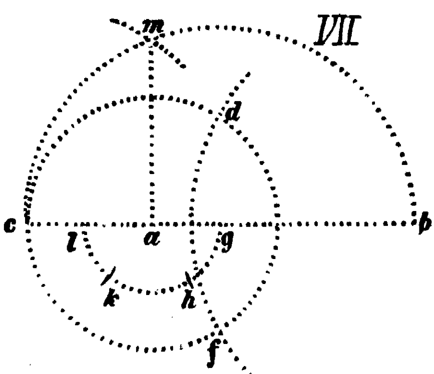
V. Mache $da = A$, $db = B$, beschreibe über ab einen Halbkreis, ziehe daran (III. 44.) die Berührende dc, so ist (III. 57.) $dc = C$.



VI. Mache $ac = A$, $ad = B$, beschreibe einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Puncte c, d geht, ziehe daran (III. 44.) die Berührende ab, so ist (III. 51.) $ab = C$.



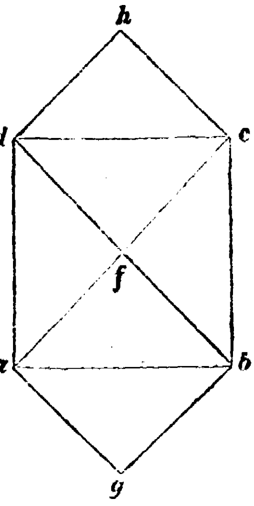
VII. Die mittlere Proportionallinie lässt sich ganz ohne Anwendung des Lineals bloss durch Kreisdurchschnitte auf folgende Art finden: Gegeben sind die Puncte a, b, so dass $ab = B$. Aus a beschreibt man einen Kreis mit dem Halbmesser $ac = A$. Aus b beschreibt man mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher den Kreis a in d, f schneidet. Man theilt den Bogen df in die Hälfte (III. 27.)



n c, so liegen die Puncte b, a, c in grader Linie. Man theilt die Entfernung bc in die Hälfte (II. 67.) in g, beschreibt aus a mit dem Halbmesser ag einen Halbkreis, und trägt in denselben den Halbmesser nach h, k, l, so ist (III. 48.) l in der graden Linie ac. Man beschreibt aus g mit dem Halbmesser $bg = \frac{1}{2} bc$ einen Halbkreis und aus l mit demselben Halbmesser einen Bogen, welcher jenen in m schneidet, so ist lmg ein gleichschenkliges Dreieck, also am senkrecht auf bc, also (III. 56.) $am^2 = ca \cdot ab$, $am = C$.

VIII. *Arithmetisch.* Man multiplicirt die Maasse der Linien A, B mit einander (III. 3.) und zieht aus dem Producte die Quadratwurzel, wodurch man die mittlere Proportionallinie C erhält. Z. B. die Grundlinie eines Rechtecks sey 78 Fuss $= B$, die Höhe 24 Fuss $= A$, wie gross ist die Seite C eines Quadrats von gleichem Inhalt?

$$\begin{aligned} B &= 78 \text{ Fuss} \\ A &= 24 \text{ »} \\ A \cdot B &= 1872 \ \square\text{Fuss} \\ \sqrt{A \cdot B} &= C = 43{,}26 \text{ Fuss.} \end{aligned}$$

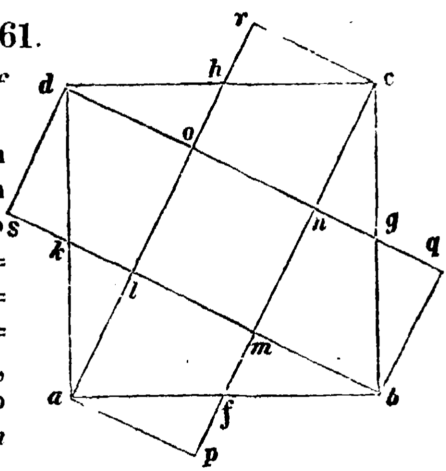


60.

Ein Quadrat in zwei gleiche Quadrate zu theilen.

In dem gegebenen Quadrat $abcd$ ziehe man die Diagonallinien ac, bd, welche einander in f schneiden, beschreibe über af, cf die Quadrate $afbg$, $cfdh$, so ist (II. 43.) $afbg = cfdh = abd = bcd$.

61.

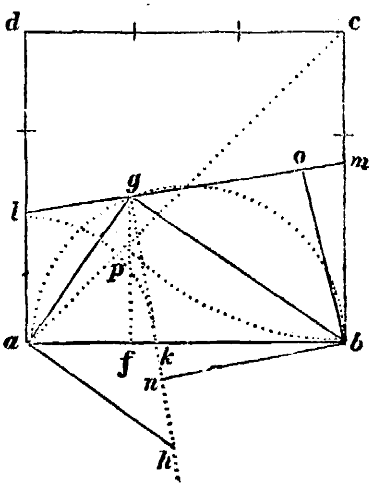


Ein Quadrat in fünf gleiche Quadrate zu theilen.

Die Seiten des gegebenen Quadrats $abcd$ theile man in die Hälfte in f, g, h, k, so sind die $\triangle\, abk = bcf = cdg = dah$, also $\angle\, bka = dha$; aber $\angle\, dah + dha = R$, also $\angle\, dah + bka = R$, oder $\angle\, kal + akl = R$, also $\angle\, l = R$. Eben so $m = n = o = R$. Da $af = \frac{1}{2} ab$, so ist $lm = \frac{1}{2}bl$, eben so $mn = \frac{1}{2}cm$, aber $bl = cm$, also $lm = mn$, also $lmno$ ein Quadrat. Beschreibt man über lm, mn u. s. w. die Quadrate $almp$, $bmnq$ u. s. w., so ist $\triangle\ afp = bfm$, also $\triangle\ abl = almp$, $\triangle\ bcm = bmnq$ u. s. w.

62.

Ein Quadrat in drei gleiche Quadrate zu theilen.

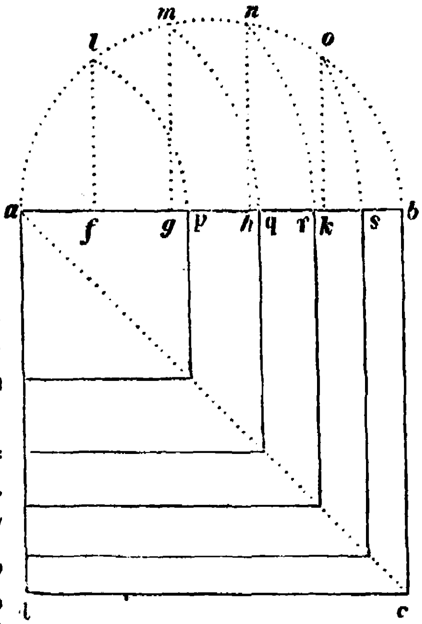


Man theile die Seite des gegebenen Quadrats $abcd$ in 3 gleiche Theile, so dass $af = \frac{1}{3}ab$, errichte in f auf ab eine Senkrechte, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in g schneidet, so ist (III. 58.) $ag^2 = \frac{1}{3}ab^2$, $bg^2 = \frac{2}{3}ab^2$. Man errichte auf ag in a die Senkrechte $ah = ag$, ziehe gh, welche die ab in k schneidet, so ist $\angle\ agh = ahg = \frac{1}{2}R$. Man errichte auf gh in g eine Senkrechte lm, so ist $\angle\ agl = bgm = ahg = \frac{1}{2}R$, und da auch $\angle\ kah = lag$, so ist $\triangle\ kah = lag$, also $al = ak$. Man macht also aus dem Vierecke $algk$ das halbe Quadrat gah. Man fälle bn, bo auf gh, lm senkrecht, so ist $\triangle\ bgn = bgo$, also $bn = bo$, und da auch $\angle\ kbn = mbo$, so ist $\triangle\ kbn = mbo$, also $bm = bk$, $cm = ak = al$. Man macht also aus dem Viereck $bkgm$, das Quadrat $bngo$. Da $bf = 2af$, so ist $bg^2 = 2ag^2$, also $\triangle\ gah = gnb = gob$. Das Viereck $cmld$ ist dem Viereck $almb$ gleich, und man kann also $cmld$ eben so in drei gleiche halbe Quadrate theilen wie $almb$.

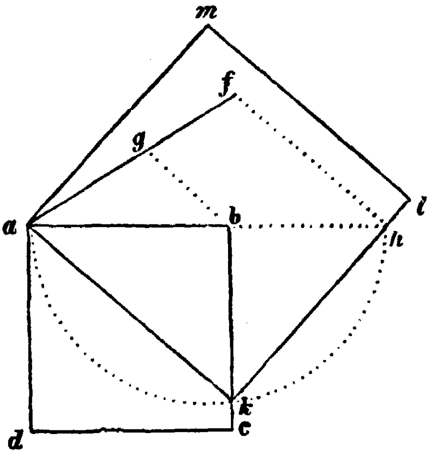
Man kann auch unmittelbar die Puncte k, l, m finden, indem man auf der Diagonallinie ac den Abschnitt $cp = cb$ macht, und $ak = al = cm = ap$ nimmt. Denn da $\triangle\ akh \sim bkg$, so ist $\frac{ak}{bk} = \frac{ah}{bg} = \frac{ag}{bg} = \frac{bc}{ac}$, also $ak \cdot ac = bk \cdot bc$. Addirt man zu beiden $ak \cdot bc$, so ist $ak \cdot (ac + bc) = ab \cdot bc = ab^2$. Aber (III. 7. 8.) $ab^2 = ac^2 - bc^2 = (ac + bc) \cdot (ac - bc)$, also $ak = ac - bc$.

63.

Quadrate zu bilden, welche zu einem gegebenen Quadrat ein gegebenes Verhältniss haben.



Z. B. die zu bestimmenden Quadrate sollen $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ des gegebenen Quadrats $abcd$ seyn. Man theilt ab in 5 gleiche Theile in f, g, h, k, errichtet in diesen Puncten Senkrechte auf ab, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in l, m, n, o schneiden, so ist (III. 56.) $al^2 = af \cdot ab = \frac{1}{5}ab^2$, $am^2 = ag \cdot ab = \frac{2}{5}ab^2$, $an^2 = ah \cdot ab = \frac{3}{5}ab^2$, $ao^2 = ak \cdot ab = \frac{4}{5}ab^2$. Man macht also $ap = al$, $aq = am$, $ar = an$, $as = ao$, und beschreibt über ap, aq, ar, as Quadrate, deren Ecken in der Diagonallinie ac liegen.



Wenn sich das gesuchte Quadrat zu dem gegebenen $abcd$ wie $af : ag$ verhalten soll, so lege man agf in beliebiger Richtung an ab, verbinde gb, ziehe $fh \,\#\, gb$, beschreibe über ah einen Halbkreis, welcher die Seite bc in k schneidet, so ist ak die Seite des gesuchten Quadrats $aklm$. Denn (III. 58.) $\frac{ab^2}{ak^2} = \frac{ab}{ah} = \frac{ag}{af}$.

Arithmetisch. Man multiplicire die Seite des gegebenen Quadrats mit der Quadratwurzel aus der Verhältnisszahl.

Beispiele.

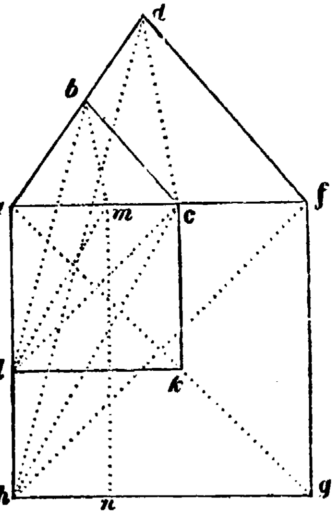
1) Ein Quadrat zu bestimmen, welches $\frac{4}{5}$ eines Quadrats von 450 Fuss Seite sey.

$$\sqrt{\tfrac{4}{5}} = 0{,}8944271$$
$$450$$
$$\text{Seite} = 402{,}49 \text{ Fuss.}$$

2) Ein Quadrat zu bestimmen, welches das $3\frac{1}{2}$fache eines Quadrats von 450 Fuss Seite sey.

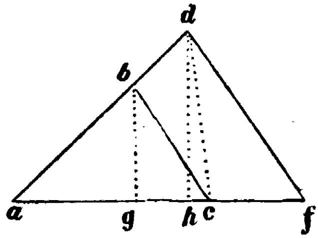
$$\sqrt{3\tfrac{1}{2}} = 1{,}8708287$$
$$\underline{\qquad\qquad 450}$$
$$\text{Seite} = \quad 841{,}87 \text{ Fuss.}$$

64.



Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Es sey $\triangle\, bac \sim daf$, so ist $bc \overset{\frown}{=} df$. Beschreibt man über ac, af die Quadrate $ackl$, $afgh$, so ist $cl \overset{\frown}{=} fh$, also (II. 49.) $bl \overset{\frown}{=} dh$. Man ziehe $bm \overset{\frown}{=} dc$, so ist (II. 49.) auch $ml \overset{\frown}{=} ch$, also (II. 55.) $amnh = ackl$. Aber (II. 32.) $\triangle\, bac = dam$. Also $\triangle\, bac : daf = dam : daf = am : af = amnh : afgh = ackl : afgh = ac^2 : af^2$.



Arithmetisch. Man fället die Höhen bg, dh, so ist $\frac{ac}{af} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{ab}{ad} = \frac{bg}{dh}$, also (II. 57.) $\frac{ac}{af} = \frac{bg}{dh}$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Verhältniss von $\frac{ac}{af} = \frac{\frac{1}{2}ac}{\frac{1}{2}af}$, und bemerkt man, dass (III. 8.) $\frac{1}{2}ac \cdot bg = \triangle\, bac$, $\frac{1}{2}af \cdot dh = \triangle\, daf$, so ist $\frac{ac^2}{af^2} = \frac{\triangle\, bac}{\triangle\, daf}$.

Oder man zieht cd, so ist (II. 52.) $\frac{\triangle\, bac}{\triangle\, dac} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, also (II. 57.) $\frac{\triangle\, bac}{\triangle\, dac} = \frac{ac}{af}$. Aber auch (II. 52.) $\frac{\triangle\, dac}{\triangle\, daf} = \frac{ac}{af}$. Multiplicirt man beide Verhältnisse, so ist $\frac{\triangle\, bac}{\triangle\, daf} = \frac{ac^2}{af^2}$.

Beispiel. bc = 145 Ketten 22 Fuss = 145,44, ca = 198 Ketten 39 Fuss = 198,78.

bc	2,16268	$a = 36^0 11\frac{12}{27}'$
ca	2,29838	$= 36^0 11',44.$
$tg\ a$	9,86430	
$36^0 11'$	9,86418	
$1' = diff.$ 27	12	

19.

Um in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Kathete und Hypotenuse die andre Kathete trigonometrisch zu bestimmen, sucht man zuerst aus ihnen den Winkel (VI. 17.), *dann aus der Kathete und dem Winkel die andre Kathete* (VI. 16.), *oder aus der Hypotenuse und dem Winkel die andre Kathete* (VI. 14.).

Nämlich $\frac{ca}{ab} = cos\ a$, $ca \cdot tg\ a = bc$, $ab \cdot sin\ a = bc$.

Zur Probe ist $bc^2 = ab^2 - ca^2 = (ab - ca)(ab + ca)$.

Beispiel. ca = 3 Werst 358 Saschen = 3,716, ab = 4 Werst 426 Saschen = 4,852.

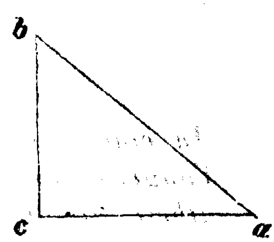
ca	0,57008	$a = 40^0 0',9$
ab	0,68592	$bc = 3,1198$
$cos\ a$	9,88416	= 3 Werst 59,9 Saschen
$tg\ a$	9,92404	
$sin\ a$	9,80820	
bc	0,49412	

Probe.

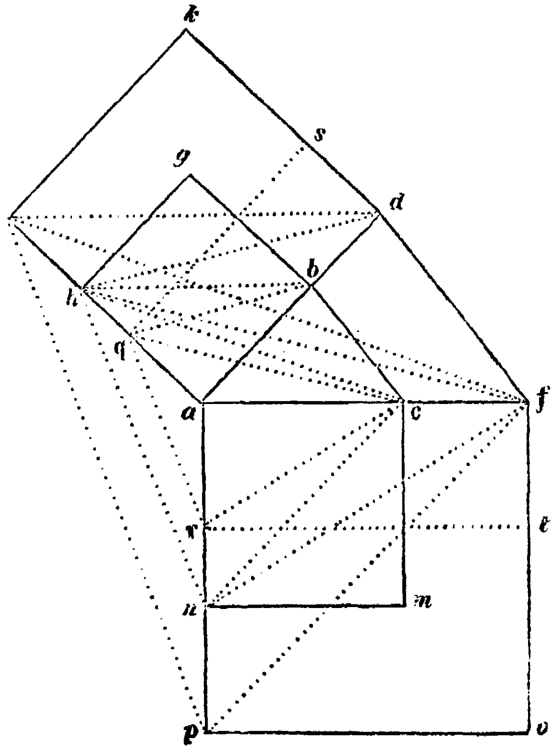
ab	4,853
ca	3,716
$ab - ca$	1,136
$ab + ca$	8,568
	0,05538
	0,93288
bc^2	0,98826
bc	0,49413

20.

Um in einem rechtwinkligen Dreiecke aus den beiden Katheten die Hypotenuse trigonometrisch zu bestimmen, sucht man zuerst aus ihnen den Winkel (VI. 18.), *dann aus der einen oder andern und dem Winkel die Hypotenuse* (VI. 15.).



Nämlich $\frac{bc}{ca} = tg\ a$, $ab = \frac{bc}{sin\ a} = \frac{ca}{cos\ a}$. Zur Probe ist $ab^2 = bc^2 + ca^2$.



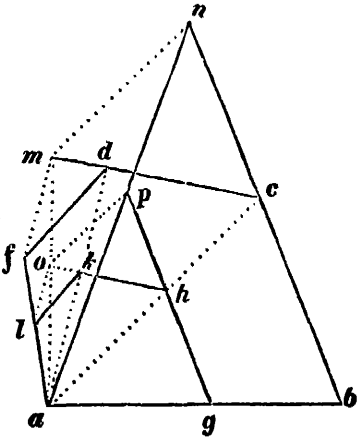
Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, so ist (II. 56.) $bc \parallel df$. Man beschreibe über ab, ad die Quadrate $abgh$, $adkl$, so ist $bh \parallel df$. Aus beiden folgt (II. 49.) $ch \parallel fl$. Man beschreibe über ac, af die Quadrate $acmn$, $afop$, so ist $cn \parallel fp$. Aus beiden folgt (II. 49.) $hn \parallel lp$. Man ziehe $bq \parallel dh$. Da auch $bc \parallel df$, so folgt (II. 49.) $cq \parallel fh$. Man ziehe $cr \parallel fn$. Aus beiden folgt (II. 49.) $qr \parallel hn$. Da auch $hn \parallel lp$, so ist (II. 5.) $qr \parallel lp$. Also (II. 53.) $\frac{aq}{al} = \frac{ar}{ap}$. Aber (II. 52.) $\frac{aq}{al} = \frac{adsq}{adkl}$, $\frac{ar}{ap} = \frac{aftr}{afop}$, also (II. 57.) $\frac{adsq}{adkl} = \frac{aftr}{afop}$. Da $bq \parallel dh$, und $cr \parallel fn$, so ist (II. 55.) $adsq = abgh$, und $aftr = acmn$. Also ist $\frac{abgh}{adkl} = \frac{acmn}{afop}$, oder $\frac{ab^2}{ad^2} = \frac{ac^2}{af^2}$.

67.

Die Flächen ähnlicher ebener Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Die Vielecke $aghkl$, $abcdf$ sind einander ähnlich, also (II. 70.) $gh \parallel bc$, $hk \parallel cd$, $kl \parallel df$ u. s. w. und ahc, akd, alf u. s. w. grade Linien. Ziehe $fm \parallel ad$ bis an cd, $mn \parallel ac$ bis an bc, so ist (III. 14.) $abcdf = \triangle\, abn$. Ziehe $lo \parallel fm$ bis an am. Da $hl \parallel cf$, so ist (II. 49.) $ho \parallel cm$, und da auch $hk \parallel cm$, so liegt

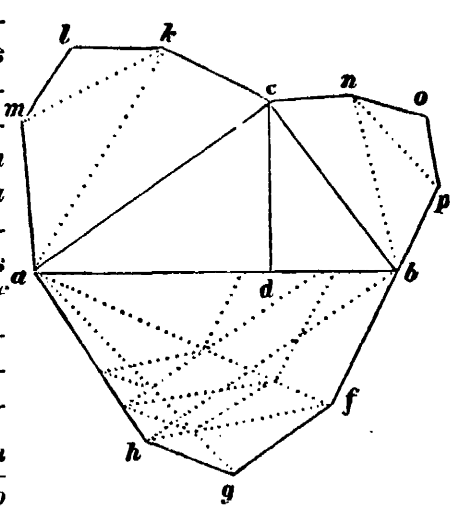
o in hk. Ziehe $op \,\widehat{=}\, mn$ bis an an. Da $gl \,\widehat{=}\, bf$, $lo \,\widehat{=}\, fm$, so ist (II. 49.) $go \,\widehat{=}\, bm$. Da auch $op \,\widehat{=}\, mn$, so ist (II. 49.) $gp \,\widehat{=}\, bn$. Da auch $gh \,\widehat{=}\, bn$, so liegt der Punct p in gh. Also ist (III. 14.) $aghkl = \triangle\, agp$, also $\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{\triangle\, agp}{\triangle\, abn}$. Aber $\triangle\, agp \sim abn$, also (II. 64.) $\frac{\triangle\, agp}{\triangle\, abn} = \frac{ag^2}{ab^2}$, also (II. 57.) $\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{ag^2}{ab^2}$.



Arithmetisch. (III. 64.) $\frac{\triangle\, akl}{\triangle\, adf} = \frac{ak^2}{ad^2}$, $\frac{\triangle\, ahk}{\triangle\, acd} = \frac{ah^2}{ac^2}$, $\frac{\triangle\, agh}{\triangle\, abc} = \frac{ag^2}{ab^2}$. Aber (II. 53.) $\frac{ak}{ad} = \frac{ah}{ac} = \frac{ag}{ab}$, also (III. 66.) $\frac{ak^2}{ad^2} = \frac{ah^2}{ac^2} = \frac{ag^2}{ab^2}$. Bezeichnet man diese einander gleichen Verhältnisse durch A, so ist $\triangle\, akl = A \cdot adf$, $\triangle\, ahk = A \cdot acd$, $\triangle\, agb = A \cdot abc$, also durch Addition $aghkl = A \cdot abcdf$, oder $\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{ag^2}{ab^2}$.

68.

Wenn auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche ebene Vielecke beschrieben werden, so verhalten sich die Figuren auf den Katheten zu einander und zu der Figur auf der Hypotenuse, wie sich die durch das Loth des rechten Winkels auf der Hypotenuse gebildeten entsprechenden Abschnitte zu einander und zu der ganzen Hypotenuse verhalten.

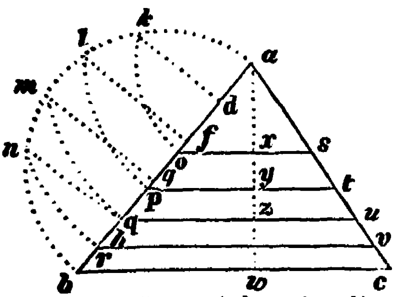


Denn (III. 67.) $\frac{acklm}{bcnop}$

$= \frac{ac^2}{bc^2}, \frac{acklm}{abfgh} = \frac{ac^2}{ab^2}, \frac{bcnop}{abfgh} = \frac{bc^2}{ab^2}$. Aber (III. 58.) $\frac{ac^2}{bc^2} = \frac{ad}{bd}, \frac{ac^2}{ab^2} = \frac{ad}{ab}, \frac{bc^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab}$, also (II. 57.) $\frac{acklm}{bcnop} = \frac{ad}{bd}, \frac{acklm}{abfgh} = \frac{ad}{ab}, \frac{bcnop}{abfgh} = \frac{bd}{ab}$. Also ist auch $acklm + bcnop = abfgh$.

69.

Ein Dreieck durch grade Linien, welche mit einer Seite parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.



Das △ abc sey z. B. durch grade Linien, welche mit bc parallel sind, in 5 gleiche Theile zu theilen. Man theile eine der anliegenden Seiten, z. B. ab in eben soviel, also in 5 gleiche Theile in d, f, g, h, errichte in diesen Theilungspuncten auf ab senkrechte Linien, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in k, l, m, n schneiden. Man trage die Sehnen ak, al, am, an auf ab auf, nach ao, ap, aq, ar, ziehe os, pt, qu, rv mit bc parallel, so sind sie die verlangten Theilungslinien. Denn da die Dreiecke, welche sie in a bilden, dem △ abc ähnlich sind, so ist (III. 64.) $\frac{\triangle\, aos}{\triangle\, abc} = \frac{ao^2}{ab^2} = \frac{ak^2}{ab^2}, \frac{\triangle\, apt}{\triangle\, abc} = \frac{ap^2}{ab^2} = \frac{al^2}{ab^2}, \frac{\triangle\, aqu}{\triangle\, abc} = \frac{aq^2}{ab^2} = \frac{am^2}{ab^2}, \frac{\triangle\, arv}{\triangle\, abc} = \frac{ar^2}{ab^2} = \frac{an^2}{ab^2}$. Aber (III. 58.) $\frac{ak^2}{ab^2} = \frac{ad}{ab} = \frac{1}{5}, \frac{al^2}{ab^2} = \frac{af}{ab} = \frac{2}{5}, \frac{am^2}{ab^2} = \frac{ag}{ab} = \frac{3}{5}$, also (II. 57.) $\frac{\triangle\, aos}{\triangle\, abc} = \frac{1}{5}, \frac{\triangle\, apt}{\triangle\, abc} = \frac{2}{5}, \frac{\triangle\, aqu}{\triangle\, abc} = \frac{3}{5}, \frac{\triangle\, arv}{\triangle\, abc} = \frac{4}{5}$.

Arithmetisch. Des △ abc Grundlinie sey $bc = 450$ Fuss, Höhe $aw = 375$ Fuss, und es sey in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe die Quadratwurzeln aus den Brüchen $\frac{1}{5}$. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, nämlich:

$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}4472136$ $\quad$ $\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6324555$

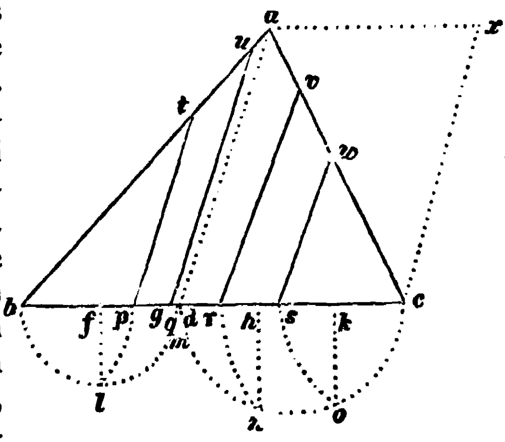
$\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7745966$ $\quad$ $\sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}8944271$

Mit diesen Quadratwurzeln multiplicirt man die Grundlinie und Höhe, und erhält dadurch die Parallellinien *os, pt* u. s. w. und die Abstände *ax, ay* u. s. w. Um die Probe zu machen, multiplicirt man die Unterschiede der Abstände mit dem Mittel der Parallellinien, die Producte müssen einander gleich seyn, hier = 16875 □Fuss.

Parallellinien.	Abstände.	Unterschied der Abstände.	Mittel der Parallellinien.	Product.
201,2461	167,7051	167,7051	100,6230	16875
284,6050	237,1708	69,4657	242,9255	16875
348,5685	290,4737	53,3029	316,5867	16875
402,4922	335,4102	44,9365	375,5303	16875
450,	375,	39,5898	426,2461	16875

70.

Ein Dreieck durch grade Linien, welche einer gegebenen Linie parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.



Durch die Spitze des $\triangle$ *abc* sey eine gegebene grade Linie *ad* gezogen. Durch Linien, welche derselben parallel sind, soll das Dreieck z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden. Man theile die Grundlinie *bc* in 5 gleiche Theile in *f, g, h, k,* und errichte in diesen Theilungspuncten auf *bc* senkrechte Linien, welche die über die Abschnitte *bd, cd* beschriebenen Halbkreise in *l, m, n, o* schneiden. Man trage die Sehnen *bl, bm* des einen Halbkreises nach *bp, bq,* und die Sehnen *cn, co* des andern Halbkreises nach *cr, cs,* ziehe aus *p, q, r, s* Parallellinien mit *ad,* so sind sie die gesuchten Theilungslinien. Denn $\frac{\triangle\, bpt}{\triangle\, bda} = \frac{bp^2}{bd^2}$ $= \frac{bl^2}{bd^2} = \frac{bf}{bd}, \frac{\triangle\, bda}{\triangle\, bca} = \frac{bd}{bc},$ also $\frac{\triangle\, bpt}{\triangle\, bca} = \frac{bf}{bc} = \frac{1}{5}.$ Eben so wird der Beweis für die übrigen Dreiecke geführt.

Arithmetisch. Des $\triangle$ *abc* Grundlinie *bc* sey = 450 Fuss, die gegebene Linie *ad* = 375 Fuss, die Abschnitte

$bd = 140$ Fuss, $cd = 310$ Fuss. Der 5te Theil von bc ist 90 Fuss. Also kommt auf bd ein Abschnitt $bf = 90$, auf cd drei Abschnitte, $ck = 90$, $ch = 180$, $cg = 270$ Fuss. Man zieht nun die Quadratwurzeln aus den Verhältnisszahlen dieser Abschnitte zu ihren respectiven Durchmessern, nämlich

$$\sqrt{\frac{bf}{bd}} = \sqrt{\frac{90}{140}} = 0{,}8017837$$

$$\sqrt{\frac{ck}{cd}} = \sqrt{\frac{90}{310}} = 0{,}5388159$$

$$\sqrt{\frac{ch}{cd}} = \sqrt{\frac{180}{310}} = 0{,}7620007$$

$$\sqrt{\frac{cg}{cd}} = \sqrt{\frac{270}{310}} = 0{,}9332564$$

Mit diesen Quadratwurzeln multiplicirt man die Abschnitte bd, cd, und die Linie ad, wodurch man die Linien bp, pt; cs, sw u. s. w. erhält. Wenn man mit ad eine Linie $cx \simeq = ad$ zieht, so ist $\triangle\, abc = xbc$, also muss sich verhalten (III. 65.) $\frac{\triangle\, bpt}{\triangle\, xbc} = \frac{bp \cdot pt}{bc \cdot cx}$, oder $\frac{\triangle\, bpt}{\triangle\, abc} = \frac{bp \cdot pt}{bc \cdot ad}$. Eben so $\frac{\triangle\, csw}{\triangle\, abc} = \frac{cs \cdot sw}{bc \cdot ad}$ u. s. w.

Hier ist $bc \cdot ad = 450 \cdot 375 = 168750$

0,8017837	0,5388159	0,7620007	0,9332564
140	310	310	310
375	375	375	375
112,2497	167,0329	236,2202	289,3095
300,6689	202,0560	285,7503	349,9712
33750	33750	67500	101250

71.

Ein Trapezium, oder eine ebene trapezoidische Figur, deren Diagonallinien in einen Punct zusammentreffen, durch grade Linien, die den beiden parallelen Seiten parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.

Wenn ab, cd die parallelen Seiten sind, und ad, bc in f zusammentreffen, so beschreibe man über die grössere Parallelseite ab einen Halbkreis, trage in denselben die kleinere Parallelseite $cd = bg = bh$, fälle aus h auf ab die senk-

II.

b	$58^0 59',3$
c	$115^0 42',2$
a	$5^0 18',5$
	180^0

II.

ca	3,54728
$\sin c$	9,95475
$\sin b$	9,93301
ab	3,56902
$\sin a$	8,96621
$\sin c$	9,95475
bc	2,58048
$\sin b$	9,93301
$\sin a$	8,96621
ca	3,54728

Probe.

bc	2,58048	
$\cos b$	9,71199	
	2,29247	...196,1
ca	3,54728	
$\cos a$	9,99814	
	3,54542	..3510,9
$ab =$		3707

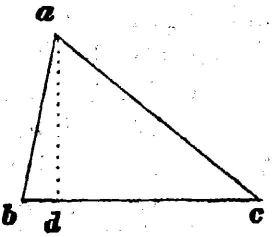
I.

$bc = 3439,1$
$= 491$ Saschen 2,1 Fuss.

II.

$bc = 380,6$
$= 54$ Saschen 2,6 Fuss.

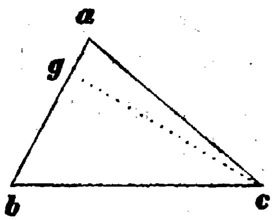
27.



Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product des Sinus eines Winkels und seiner beiden Nebenseiten.

Nach III. 8. ist der Inhalt $F = \frac{1}{2} bc \cdot ad$; aber (VI. 14.) $ad = ab \cdot \sin b = ca \cdot \sin c$, also
$F = \frac{1}{2} ab \cdot bc \cdot \sin b = \frac{1}{2} bc \cdot ca \cdot \sin c = \frac{1}{2} ca \cdot ab \sin a$.

28.



In einem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Product dieser Seiten und des Cosinus ihres Zwischenwinkels.

Nach VI. 23. 24. sind die Grundgleichungen

$$bc \cdot \sin b = ca \cdot \sin a$$
$$bc \cdot \cos b = ab - ca \cdot \cos a.$$

Aber (VI. 2.) $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

Wenn man also die obigen Gleichungen ins Quadrat erhebt und die Quadrate addirt, so ergiebt sich:

$$bc^2 = ca^2 + ab^2 - 2ca \cdot ab \cdot \cos a,$$
$$ca^2 = ab^2 + bc^2 - 2ab \cdot bc \cdot \cos b,$$
$$ab^2 = bc^2 + ca^2 - 2bc \cdot ca \cdot \cos c.$$

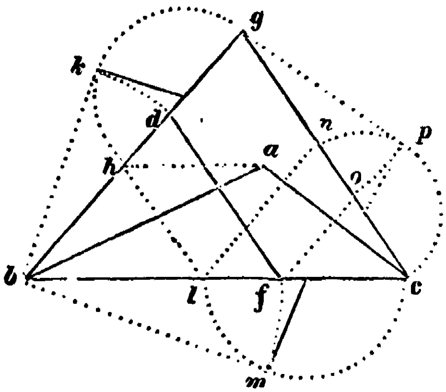
Wenn der Winkel stumpf ist, so ist (VI. 5.) dessen Cosinus negativ, und das dritte Glied muss daher addirt werden.

Die Producte der mittlern Transversallinien mit den Höhen geben für alle drei Trapezien (III. 10.) den Inhalt 53125.

72.

Ein Dreieck zu machen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich sey, und einen gegebenen Inhalt habe.

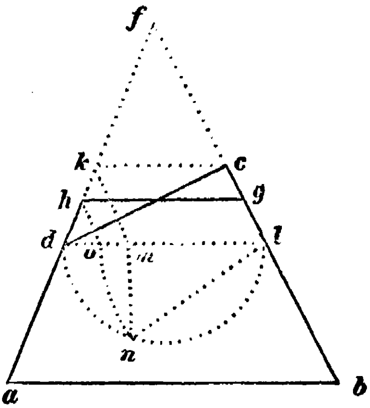
Es sey ein Dreieck dbf zu machen, welches dem $\triangle\, gbc$ ähnlich, und dem $\triangle\, abc$ an Inhalt gleich sey. Man ziehe $ah \parallel bc$, und bestimme (III. 59.) zwischen bg, bh die mittlere Proportionallinie bd, ziehe $df \parallel gc$, so ist $\triangle\, dbf = abc$. Denn $\frac{\triangle\, dbf}{\triangle\, gbc} = \frac{bd^2}{bg^2} = \frac{bh}{bg} = \frac{\triangle\, hbc}{\triangle\, gbc} = \frac{\triangle\, abc}{\triangle\, gbc}$, also $\triangle\, dbf = abc$. Oder man ziehe $hl \parallel gc$, und bestimme zwischen bl, bc die mittlere Proportionallinie bf, ziehe $fd \parallel cg$. Denn $\frac{\triangle\, dbf}{\triangle\, gbc} = \frac{bf^2}{bc^2} = \frac{bl}{bc} = \frac{\triangle\, gbl}{\triangle\, gbc} = \frac{\triangle\, hbc}{\triangle\, gbc} = \frac{\triangle\, abc}{\triangle\, gbc}$, also $\triangle\, dbf = abc$. Oder man ziehe $ln \parallel bg$, bestimme zwischen gn, gc die mittlere Proportionallinie go, ziehe $of \parallel gb$, $fd \parallel cg$. Denn $\frac{\triangle\, dbf}{\triangle\, gbc} = \frac{df^2}{gc^2} = \frac{go^2}{gc^2} = \frac{gn}{gc} = \frac{\triangle\, gbn}{\triangle\, gbc} = \frac{\triangle\, gl}{\triangle\, gbc} = \frac{\triangle\, hbc}{\triangle\, glc} = \frac{\triangle\, abc}{\triangle\, gbc}$, also $\triangle\, dbf = abc$.



Arithmetisch. Es sey $bc = 450$, $bh = 250$, und es soll seyn $\frac{bd}{bf} = \frac{bg}{bc} = \frac{5}{4}$. Demnach ist $bg = \frac{5}{4} bc = 562{,}5$, $bd^2 = 250 \cdot 562{,}5 = 140625$, $bl = \frac{4}{5} bh = 200$, $bf^2 = 450 \cdot 200 = 90000$. Also ist $bd = 375$, $bf = 300$. Die Probe geschieht nach (III. 45), nämlich $bd \cdot bf = 112500$, und $bh \cdot bc = 112500$, also $bd \cdot bf = bh \cdot bc$.

73.

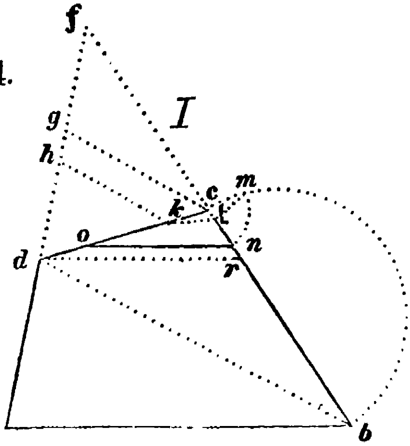
Ein unregelmässiges ebenes Viereck in ein Trapezium von gleichem Inhalt und gleicher Grundlinie zu verwandeln.

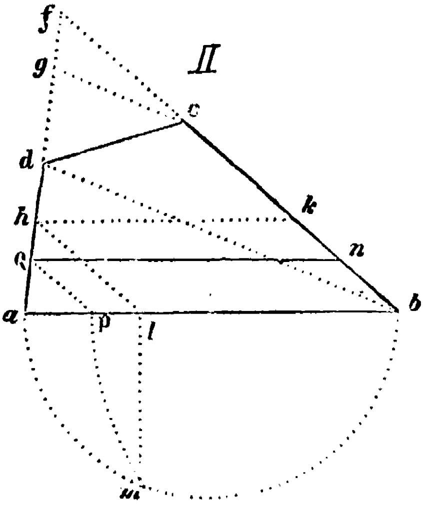


Es sey das Viereck $abcd$ in ein Trapezium $abgh$ zu verwandeln. Man ziehe $ck \parallel dl \parallel ab$, und $km \parallel bc$, so dass $lm = ck$ sey. Man bestimme zwischen lm, ld (III. 59.) die mittlere Proportionallinie lo, ziehe $oh \parallel bc$, $hg \parallel ab$, so ist $gh = lo$, und $abgh = abcd$. Denn $\frac{\triangle fgh}{\triangle fld} = \frac{gh^2}{ld^2} = \frac{lo^2}{ld^2} = \frac{lm}{ld} = \frac{ck}{ld} = \frac{fc}{fl} = \frac{\triangle fdc}{\triangle fld}$, also $\triangle fgh = fdc$. Zieht man beide vom $\triangle fab$ ab, so ist $abgh = abcd$.

74.

Von einem unregelmässigen ebenen Viereck durch eine mit der Grundlinie parallele Transversallinie ein gegebenes Stück abzuschneiden.





Vom Viereck $abcd$ soll durch die Linie $no \parallel ab$ ein Stück abgeschnitten werden. Man ziehe $cg \parallel bd$, und nehme gh so, dass $\frac{gh}{ga}$ sich verhält, wie das abzuschneidende Stück zum ganzen Viereck. Wenn nun no die Seite cd schneiden wird (I.), so ziehe man $hk \parallel bd$, $kl \parallel ab$, bestimme zwischen cl, cb die mittlere Proportionallinie cn, ziehe $no \parallel ab$. Denn wenn man $dr \parallel ab$ zieht, so ist $\frac{\triangle cno}{\triangle crd} = \frac{cn^2}{cr^2}$

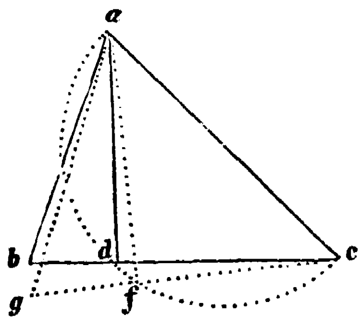
$= \frac{cl \cdot cb}{cr^2}$, $\frac{\triangle\ crd}{\triangle\ cbd} = \frac{cr}{cb} = \frac{cr^2}{cr \cdot cb}$, also $\frac{\triangle\ cno}{\triangle\ cbd} =$ $= \frac{cl \cdot cb}{cr \cdot cb} = \frac{cl}{cr} = \frac{ck}{cd} = \frac{gh}{gd}$. Aber $\triangle\ cbd = gbd$, $abcd = \triangle\ gab$, also $\frac{\triangle\ cbd}{abcd} = \frac{\triangle\ gbd}{\triangle\ gab} = \frac{gd}{ga}$, also $\frac{\triangle\ cno}{abcd} = \frac{gh}{ga}$. Wenn no die Seite da schneiden wird (II.), so ziehe man $hk \parallel ab$, $hl \parallel bc$, bestimme zwischen ab, bl die mittlere Proportionallinie bp, ziehe $po \parallel bc$, $on \parallel ab$. Denn $\frac{\triangle\ fno}{\triangle\ fba} = \frac{no^2}{ab^2} = \frac{bp^2}{ab^2} = \frac{bl}{ab} = \frac{hk}{ab} = \frac{fh}{fa} = \frac{\triangle\ fhb}{\triangle\ fba}$, also $\triangle\ fno = fhb$, also $cdno = cdhb = \triangle\ ghb$, also $\frac{cdno}{abcd} = \frac{ghb}{gab} = \frac{gh}{ga}$.

Vierter Cursus.

Elemente der Geometrie des Raums.

1.

Wenn die Grundlinie eines Dreiecks durch eine Diagonallinie aus der Spitze in zwei Abschnitte getheilt wird, deren Quadratunterschied gleich dem Quadratunterschied der über ihnen liegenden Seiten ist, so ist die Diagonallinie auf der Grundlinie senkrecht.



Es sey $cd^2 - bd^2 = ac^2 - ab^2$. Man beschreibe über ac einen Halbkreis, trage darin die Sehne $cf = cd$, und verlängere cf nach g, so dass $fg = db$, also $cg = cb$. Da $\angle f = R$, so ist $ac^2 - ag^2 = cf^2 - fg^2 = cd^2 - bd^2 = ac^2 - ab^2$, also $ag = ab$. Aber auch $cg = cb$, $ac = ac$, also $\triangle\ acg = acb$, also $\angle\ acf = acd$; aber auch $cf = cd$, $ac = ac$, also $\triangle\ afc = adc$, also $\angle\ adc = afc = R$.

2.

Wenn zwei Ebenen einander durchschneide , so liegen alle Puncte ihres Durchschnittes, welcher die Kante der Ebenen heisst, in einer graden Linie.

Denn sonst müsste es möglich seyn, dass drei Puncte, welche nicht in grader Linie liegen, in beiden Ebenen zugleich lägen. Da aber durch drei nicht in grader Linie liegende Puncte nur eine einzige Ebene gelegt werden kann (I. Erklärung der Ebene), so müsste diese Ebene mit den beiden als verschieden angenommenen Ebenen zusammenfallen, was unmöglich ist.

3.

Wenn drei in einer Ebene liegende grade Linien von einem Puncte ausgehen, und in diesem Puncte eine vierte

38.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der zweiten Art zu berechnen.

Man berechnet die dritte Seite nach VI. 28., und hieraus die beiden Winkel durch VI. 23.

Beispiel 1. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 72^0 4',21$.

$2 =$	0,3010300	bc^2	7,7770124	$a =$	$72^0\ 4',21$
ab	3,8640362	bc	3,8885062	$b =$	$43^0 51',7498$
ca	3,7508168	$sin\ a$	9,9783788	$c =$	$64^0\ 4',0407$
$cos\ a$	9,4883420	D	3,9101274		180^0
	7,4042250	ca	3,7508168		
	25364423	ab	3,8640362	$bc =$	7735,817
ab^2	53465344	$sin\ b$	9,8406894	$D =$	8130,69
ca^2	31741956	$sin\ c$	9,9539088		
bc^2	59842877				

Beispiel 2. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 107^0 55',79$.

$2 =$	0,3010300	bc^2	8,0436441	$a =$	$107^0 55',79$
ab	3,8640362	bc	4,0218220	$b =$	$30^0 38',9076$
ca	3,7508168	$sin\ a$	9,9783788	$c =$	$41^0 25',3033$
$cos\ a$	9,4883420	D	4,0434432		180^0
	7,4042250	ca	3,7508168		
	25364423	ab	3,8640362	$bc =$	10515,309
ab^2	53465344	$sin\ b$	9,7073736	$D =$	11052,06
ca^2	31741956	$sin\ c$	9,8205930		
bc^2	110571723				

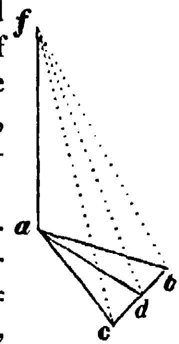
39.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der dritten Art zu berechnen.

Durch Anwendung der Sätze VI. 29. 30.

Man setzt $(ab + ca)\ sin\ \frac{1}{2}a = A$, $(ab - ca)\ cos\ \frac{1}{2}a = B$, $tg\ x = \frac{A}{B}$, dann ist $bc = \frac{A}{sin\ x}$ oder $bc = \frac{B}{cos\ x}$, und $b = x - \frac{1}{2}a$, $c = 2R - \frac{1}{2}a - x$.

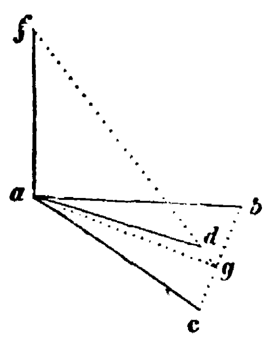
grade Linie auf zweien derselben senkrecht ist, so ist sie auch auf der dritten senkrecht.



Es seyen ab, ac, ad in einer Ebene, und $\angle fab = R$, $\angle fac = R$. Man nehme auf ad einen beliebigen Punct d an, und errichte in d auf ad in der Ebene bac eine Senkrechte, welche die graden Linien ab, ac in b, c schneidet, so ist $fb^2 = fa^2 + ab^2$, $fc^2 = fa^2 + ac^2$, also $fb^2 - fc^2 = ab^2 - ac^2$. Aber $\angle adb = adc = R$, also auch $ab^2 - ac^2 = bd^2 - cd^2$. Also $fb^2 - fc^2 = bd^2 - cd^2$, also (IV. 1.) $\angle fdb = fdc = R$, also $fb^2 = fd^2 + bd^2$, aber auch $fb^2 = fa^2 + ab^2$, also $fa^2 + ab^2 = fd^2 + bd^2$, also $fa^2 + ab^2 - bd^2 = fd^2$. Aber $ab^2 - bd^2 = ad^2$, also $fa^2 + ad^2 = fd^2$. Also (II. 46.) $\angle fad = R$.

4.

Wenn drei grade Linien von einem Puncte ausgehen, und eine vierte auf jeder von ihnen senkrecht ist, so liegen jene drei in einer Ebene.



Es sey $\angle fab = R$, $\angle fac = R$, $\angle fad = R$. Wenn nun ad nicht in der Ebene bac läge, so würden die Ebenen bac, fad einander in einer graden Linie ag schneiden (IV. 2.), welche nicht mit ad zusammen fiele. Dann aber würde (IV. 3.), weil $\angle fab = R$, $\angle fac = R$, auch $\angle fag = R$ seyn. Es ist aber $\angle fad = R$, die Winkel fad, fag liegen in einer Ebene, also müsste es möglich seyn, dass zwei rechte Winkel von verschiedener Grösse wären. Da dieses unmöglich ist (I. 7.), so fallen die Linien ad, ag zusammen, d. h. ad liegt in der Ebene bac.

5.

Wenn eine grade Linie eine Ebene durchschneidet, so schneidet sie sie nur in einem einzigen Puncte.

Denn wenn sie noch einen zweiten Punct mit der Ebene gemein haben könnte, so müsste sie (I. Erklärung der Ebene) ganz mit der Ebene zusammenfallen.

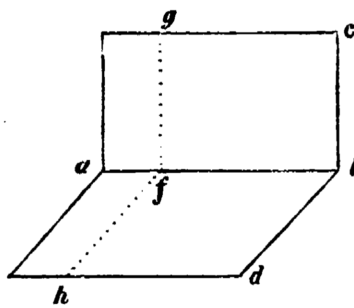
6.

Wenn eine grade Linie in dem Puncte, wo sie eine Ebene schneidet, auf allen Linien, welche durch diesen Punct in der Ebene gezogen werden können, senkrecht ist, so heisst sie senkrecht auf der Ebene.

Damit also eine grade Linie auf einer Ebene senkrecht sey, ist es hinreichend, wenn sie (IV. 3.) nur auf zwei graden Linien, welche aus ihrem Fusspunct in der Ebene gezogen werden, senkrecht ist.

7.

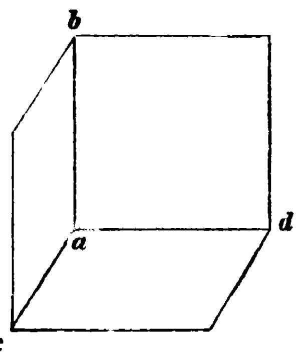
Zwei Ebenen heissen senkrecht aufeinander, wenn zwei grade Linien, welche in den Ebenen aus einem Puncte ihrer Kante auf die Kante senkrecht gezogen werden, aufeinander senkrecht sind.



Es seyen abc, abd die Ebenen, ab ihre Kante, f ein Punct der Kante, fg in der Ebene abc senkrecht auf ab; fh in der Ebene abd senkrecht auf ab. Wenn nun gfh ein rechter Winkel ist, so heisst die Ebene abc auf abd, oder die Ebene abd auf abc senkrecht.

8.

Wenn von einem Puncte drei aufeinander senkrechte grade Linien ausgehen, so sind auch ihre Ebenen aufeinander senkrecht.

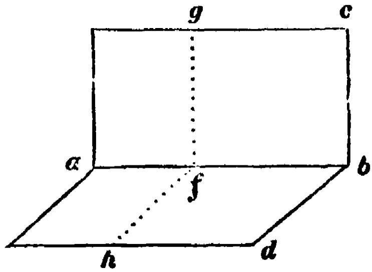


Es sey $\angle\, bac = bad = cad = R$. Da ab die Kante der Ebenen bac, bad ist, und in der Ebene bac die ac auf ab senkrecht, in der Ebene bad die ad auf ab senkrecht ist, so ist (IV. 7.) die Ebene bac auf bad senkrecht. Aus gleichem Grunde ist an der Kante ac die Ebene bac auf cad, und an der Kante ad die Ebene bad auf cad senkrecht.

9.

Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, und es wird aus einem Puncte ihrer Kante in der einen Ebene *eine Senkrechte auf die Kante gezogen, so ist sie auf der andern Ebene senkrecht.*

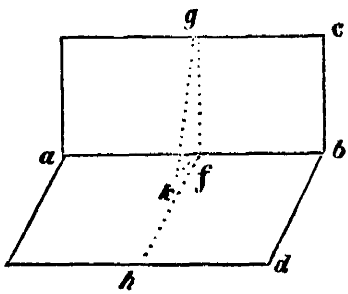
Die Ebenen abc, abd seyen aufeinander senkrecht, und es sey in der Ebene abc die fg senkrecht auf ab. Man ziehe in der Ebene abd die fh senkrecht auf ab. Da die Ebenen abc, abd aufeinander senkrecht sind, so ist (IV. 7.) $\angle\, gfh = R$; aber auch $\angle\, gfa = R$, also (IV. 3. 6.) gf senkrecht auf der Ebene abd.



10.

Wenn zwei Ebenen aufeinander senkrecht sind, und es wird aus einem Puncte der ersten Ebene eine senkrechte Linie auf die zweite gezogen, so liegt sie in der ersten Ebene.

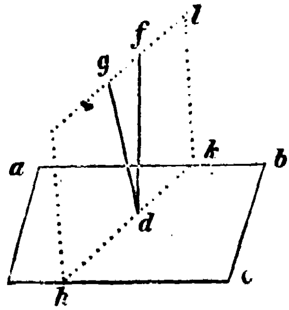
Die Ebenen abc, abd seyen aufeinander senkrecht, und es sey gk senkrecht auf der Ebene abd. Man fälle gf senkrecht auf die Kante ab, so ist gf (IV. 9.) senkrecht auf der Ebene abd. Wenn nun gf, gk nicht zusammenfielen, so liesse sich durch dieselben eine Ebene legen, welche (IV. 2.) die Ebene abd in einer graden Linie fk schneiden würde. Da sowohl gf als gk auf der Ebene abd senkrecht sind, so sind (IV. 6.) die Winkel $gfk = gkf = R$. Diess ist aber (I. 24.) unmöglich. Also fällt gk mit gf zusammen, d. h. gk liegt in der Ebene abc.



11.

In einem in einer Ebene befindlichen Punct kann nur eine einzige senkrechte Linie auf die Ebene errichtet werden.

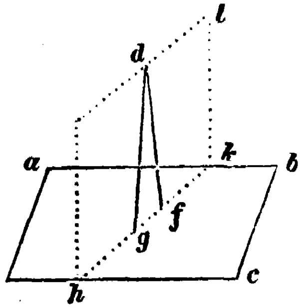
In der Ebene abc befinde sich der Punct d, und es sey in demselben die grade Linie df senkrecht auf der Ebene abc. Wenn es nun möglich wäre, in d noch eine zweite Linie dg auf der Ebene abc senkrecht zu ziehen, so liesse sich durch die beiden verschiedenen graden Linien df, dg eine Ebene hkl legen, welche die Ebene



abc in der graden Linie *hk* (IV. 2.) durchschnitte. Also müssten (IV. 6.) beide Winkel $\angle\, hdf = hdg = R$ seyn. Da es aber unmöglich ist (I. 17.), in einer Ebene auf eine grade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten, so müssen *df*, *dg* zusammenfallen.

12.

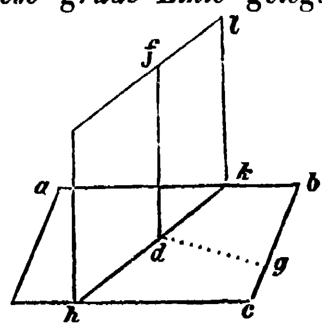
Von einem Puncte, welcher sich ausserhalb einer Ebene befindet, lässt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die Ebene fällen.



Ausserhalb der Ebene *abc* befinde sich der Punct *d*, und es sey von demselben die grade Linie *df* senkrecht auf die Ebene *abc* gezogen. Wenn es nun möglich wäre, von *d* noch eine zweite Linie *dg* senkrecht auf die Ebene *abc* zu ziehen, so liesse sich durch die beiden verschiedenen graden Linien *df*, *dg* eine Ebene *hkl* legen, welche die Ebene *abc* in der graden Linie *hk* durchschnitte. Also müssten (IV. 6.) beide $\angle\, hfg = hgf = R$ seyn. Da es aber unmöglich ist (I. 24.), von einem Puncte auf eine grade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu ziehen, so muss *dg* mit *df* zusammenfallen.

13.

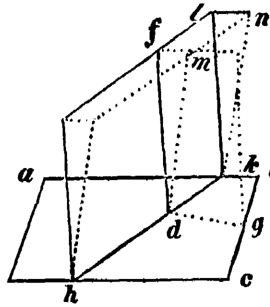
Wenn eine grade Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so ist jede Ebene, welche durch diese grade Linie gelegt wird, auf jener Ebene senkrecht.



Auf der Ebene *abc* sey die grade Linie *df* senkrecht. Durch *df* sey eine beliebige Ebene *hkl* gelegt, welche die Ebene *abc* in *hk* schneidet. In der Ebene *abc* ziehe man *dg* auf *hk* senkrecht. Da *fd* auf der Ebene *abc* senkrecht ist, so sind (IV. 6.) $\angle\, fdg = \angle\, fdh = R$. Aber auch $\angle\, gdh = R$. Also (IV. 7.) die Ebene *hkl* auf der Ebene *abc* senkrecht.

14.

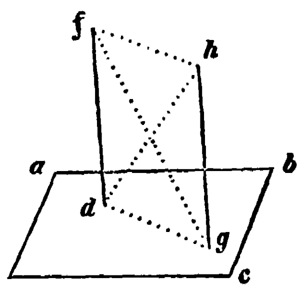
Durch eine grade Linie, welche in einer Ebene liegt, kann nur eine einzige Ebene auf jene Ebene senkrecht gelegt werden.



In der Ebene abc sey die grade Linie hk gezogen, und durch dieselbe eine Ebene hkl gelegt, welche auf der Ebene abc senkrecht sey. In der Ebene abc sey dg senkrecht auf hk, und in der Ebene hkl sey df senkrecht auf hk gezogen, so ist (IV. 7.) $\angle fdg = R$. Wenn es nun möglich wäre, durch hk noch eine zweite Ebene hkn auf die Ebene abc senkrecht zu legen, so sey in dieser Ebene hkn die grade Linie dm senkrecht auf hk gezogen. Dann muss auch (IV. 7.) $\angle mdg = R$ seyn. Da aber $\angle hdf = hdm = hdg = R$, so liegen (IV. 4.) die graden Linien df, dm, dg in einer Ebene. Es ist aber unmöglich (I. 17.), in einer Ebene auf eine grade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten. Also muss die Ebene hkn mit der Ebene hkl zusammenfallen.

15.

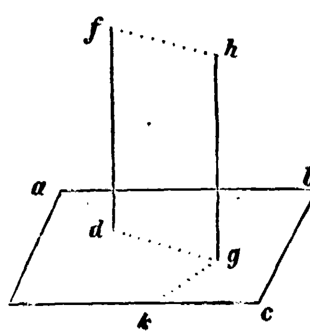
Wenn zwei grade Linien auf einer Ebene senkrecht sind, so sind sie parallel.



Es seyen die graden Linien df, gh auf der Ebene abc senkrecht. Also sind (IV. 13.) die Ebenen fdg, hdg auf der Ebene abc senkrecht. Da beide senkrechte Ebenen fdg, hdg durch dieselbe grade Linie dg gehen, so (IV. 14.) fallen sie zusammen. Also liegen die graden Linien df, gh in einer Ebene. Da beide auf der Ebene abc senkrecht sind, so (IV. 6.) ist $\angle fcg = hgd = R$. Also (II. 4.) ist $df \parallel gh$.

16.

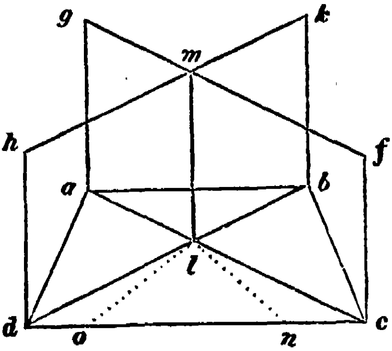
Wenn zwei grade Linien parallel sind, und eine von ihnen auf einer Ebene senkrecht ist, so ist auch die andre auf derselben Ebene senkrecht.



Es sey $df \parallel gh$, also $dfhg$ eine Ebene; auch sey df auf der Ebene abc senkrecht, also (IV. 6.) $\angle fdg = R$, und da $df \parallel gh$, so ist auch (II. 3.) $\angle dgh = R$. Man ziehe in der Ebene abc die gk senkrecht auf die Kante dg. Die Ebene $dfhg$ geht durch eine grade Linie df, welche auf der Ebene abc senkrecht ist, und ist also (IV. 13.) auf dieser Ebene abc senkrecht. Also (IV. 7.) $\angle hgk = R$. Aber auch $\angle dgh = R$. Also (IV. 6.) gh auf der Ebene abc senkrecht.

17.

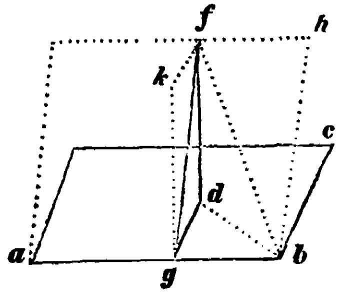
Wenn zwei einander schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht sind, so ist auch ihre Kante auf dieser dritten Ebene senkrecht.



Es seyen auf der Ebene $abcd$ die Ebenen $acfg$, $bdhk$ senkrecht, ihre Kante sey lm. In der Ebene $abcd$ ziehe man ln auf bd, und lo auf ac senkrecht. Da die Ebene $bdhk$ auf $abcd$ senkrecht ist, so ist (IV. 9.) ln auf der Ebene $bdhk$ senkrecht, also $\angle mln = R$. Da die Ebene $acfg$ auf $abcd$ senkrecht ist, so ist (IV. 9.) lo auf der Ebene $acfg$ senkrecht, also $\angle mlo = R$. Da $\angle mln = mlo = R$, so ist (IV. 3. 6.) lm auf der Ebene $abcd$ senkrecht.

18.

In einem Puncte, welcher sich in einer Ebene befindet, eine senkrechte Linie auf diese Ebene zu errichten.



In der Ebene abc sey der Punct d gegeben. Man nehme in der Ebene eine beliebige grade Linie ab an, und fälle auf dieselbe die Senkrechte dg. Man lege durch ab eine andere Ebene abh in beliebiger Richtung, und man errichte in dieser Ebene in g auf ab eine Senkrechte gf. Die graden Linien dg, fg bilden eine dritte Ebene. In dieser errichte man in d auf dg eine Senkrechte df, so ist sie senkrecht auf der ersten Ebene abc. Denn da $\angle dga = fga = R$, so ist ag senkrecht auf der Ebene dgf. Man ziehe $gk \frown df$, so ist gk in der Ebene dgf, und $\angle kgd = fdg = R$. Da $\angle dga = fga = R$, so ist auch (IV. 3.) $\angle kga = R$. Da $\angle kga$

Beispiel. $ab = 7312$, $bc = 7736$, $ca = 5634$.

ab	3,86404
bc	3,88852
ca	3,75082
	7,61486
	7,75256
	7,63934
A	3,80743
B	3,87628
C	3,81967

$ab - ca$	3,22479
bc	3,88852
$\cos x$	9,33627
$tg\ x$	0,65326
$\frac{1}{2}$	9,69897
$ab - ca$	3,22479
A	3,80743
$\sin \frac{1}{2}a$	9,76959

$\frac{1}{2}a = 36^0 2',12$

$bc - ab$	2,62737
ca	3,75082
$\cos x$	8,87665
$tg\ x$	1,12221
$\frac{1}{2}$	9,69897
$bc - ab$	2,62737
B	3,87628
$\sin \frac{1}{2}b$	9,57227

$\frac{1}{2}b = 21^0 55',84$

$bc - ca$	3,32263
ab	3,86404
$\cos x$	9,45859
$tg\ x$	0,52268
$\frac{1}{2}$	9,69897
$bc - ca$	3,32263
C	3,81967
$\sin \frac{1}{2}c$	9,72461

$\frac{1}{2}c = 32^0 2',0$

46.

Aus den drei Seiten des Dreiecks die Winkel nach der siebenten Art zu berechnen.

Man wendet VI. 32. an, und setzt $\frac{bc}{ab + ca} = \cos x$, dann ist $\cos \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \sin x \cdot \frac{ab + ca}{A}$, $\sqrt{ca \cdot ab} = A$.

Beispiel. $ab = 7312$, $bc = 7736$, $ca = 5634$.

ab	3,86404
bc	3,88852
ca	3,75082
	7,61486
	7,75256
	7,63934
A	3,80743
B	3,87628
C	3,81967

bc	3,88852
$ab + ca$	4,11213
$\cos x$	9,77639
$\sin x$	9,90407
$\frac{1}{2}$	9,69897
$ab + ca$	4,11213
A	3,80743
$\cos \frac{1}{2}a$	9,90774

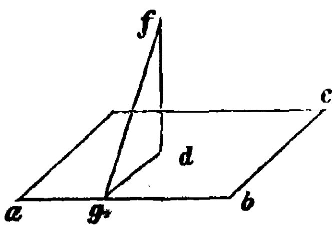
$\frac{1}{2}a = 36^0 2',3$

fbc die graden Linien fg auf ab, und fh auf bc senkrecht. In der Ebene abc errichte man in g auf ab, in h auf bc senkrechte Linien, welche einander in d schneiden. Man verbinde fd, so ist fd auf der Ebene abc senkrecht.

Denn man ziehe gk, hl senkrecht auf der Ebene abc (IV. 18.), so sind die Ebenen kgd, lhd (IV. 13.) senkrecht auf der Ebene abc. Da $\angle\, kga = fga = dga = R$ und $\angle\, lhb = fhb = dhb = R$, so liegen (IV. 4.) fg in der Ebene kgd, und fh in der Ebene lhd. Also liegt der Punct f in den Ebenen kgd, lhd. Aber auch der Punct d liegt in den Ebenen kgd, lhd. Also ist fd die Kante der Ebenen kgd, lhd. Diese Ebenen sind aber auf der Ebene abc senkrecht, also (IV. 17.) ist auch fd auf der Ebene abc senkrecht.

21.

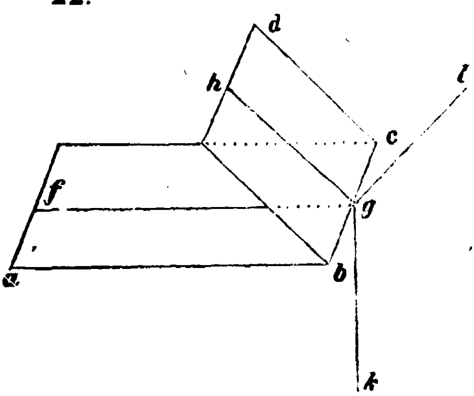
Der Neigungswinkel einer schiefen Linie gegen eine Ebene, ergänzt den Winkel, welchen die schiefe mit der senkrechten bildet, zu einem rechten Winkel.



Vom Puncte f sey (IV. 20.) nach einer Ebene abc eine senkrechte Linie fd, und eine schiefe Linie fg gezogen, die Durchschnittspuncte derselben auf der Ebene abc seyen d, g, so liegt dg in der Ebene abc, und der Winkel fgd heisst der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene abc. Da fd auf der Ebene abc senkrecht ist, so ist die Ebene des Neigungswinkels fgd (IV. 13.) senkrecht auf der Ebene abc, und (IV. 6.) $\angle\, fdg = R$, also $\angle\, fgd + dfg = R$.

22.

Die Ebene des Neigungswinkels oder Kantenwinkels zweier Ebenen ist auf der Kante dieser Ebenen senkrecht.

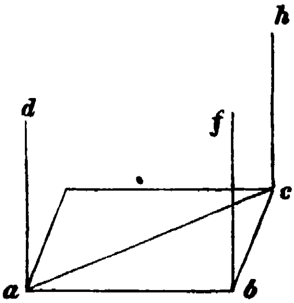


Die Kante der Ebenen abc, bcd ist die grade Linie bc. Durch einen beliebigen Punct g dieser Kante ziehe man in der Ebene abc die grade Linie

gf auf die Kante bc senkrecht, und in der Ebene bcd die grade Linie gh auf die Kante bc senkrecht, so heisst der $\angle fgh$ der Neigungswinkel oder Kantenwinkel der Ebenen abc, bcd. Da $\angle bgf = R$, und $\angle bgh = R$, so ist (IV. 3. 6.) die Kante bgc auf der Ebene fgh senkrecht. In dem Puncte g errichte man (IV. 18.) gk auf die Ebene abc senkrecht, und gl auf die Ebene bcd senkrecht, so ist (IV. 6.) $\angle bgk = bgl = R$, also liegen (IV. 4.) die Linien gk, gl in der Ebene fgh, und der Winkel kgl, den diese senkrechten Linien mit einander bilden, ergänzt den Kantenwinkel fgh zu zwei rechten Winkeln.

23.

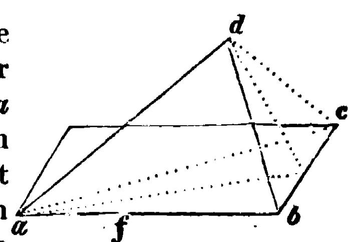
Zwei grade Linien, welche einer dritten nicht in ihrer Ebene liegenden graden Linie parallel sind, sind einander parallel.



Die Linie ad sey den Linien bf, ch parallel, und liege nicht in ihrer Ebene. Von einem beliebigen Puncte a der Linie ad fälle man auf bf die Senkrechte ab, auf ch die Senkrechte ac, so ist $\angle abf = ach = R$. Da $ad \parallel bf$, so ist auch $\angle dab = R$. Da $ad \parallel ch$, so ist auch $\angle dac = R$. Da $\angle dab = dac = R$, so ist (IV. 3. 6.) ad auf der Ebene abc senkrecht. Da $ad \parallel bf$, und $ad \parallel ch$, so sind auch (IV. 16.) bf, und ch auf der Ebene abc senkrecht, also (IV. 15.) $bf \parallel ch$.

24.

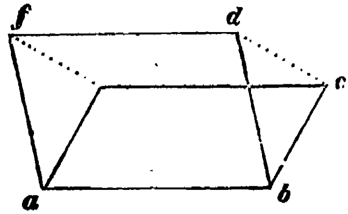
Die Kante zweier Ebenen geht durch den Punct, wo eine grade Linie, welche in der einen Ebene liegt, die andere Ebene schneidet.



Die grade Linie bf sey die Kante zweier Ebenen cbf, dbf, und in der Ebene dbf sey eine grade Linie da gezogen, welche die Ebene cbf in dem Puncte a schneidet. Der Punct a liegt also zugleich in der graden Linie da und in der Ebene cbf. Da die grade Linie da in der Ebene dbf liegt, so liegt der Punct a zugleich in der Ebene dbf und in der Ebene cbf, also liegt er in ihrer Kante bf.

25.

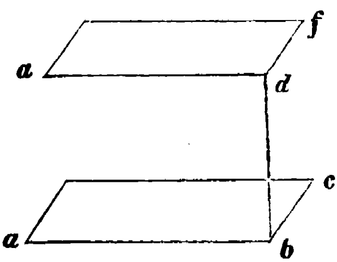
Wenn eine grade Linie einer andern graden Linie parallel ist, so ist sie der Ebene parallel, in welcher diese grade Linie liegt.



Die grade Linie df sey der graden Linie ab parallel, welche in der Ebene abc liegt. Die beiden graden Linien df, ab liegen also in einer Ebene dba, und die grade Linie ab ist die Kante der Ebenen cba, dba. Wenn nun df die Ebene abc schneiden könnte, so müsste dieser Durchschnittspunct (IV. 24.) in der Kante ab liegen. Diess ist aber unmöglich, da df ⋡ ab. Also schneidet df die Ebene abc nirgends. Wenn aber eine grade Linie, welche nicht in einer Ebene liegt, dieselbe gehörig verlängert nirgends schneidet, so heisst sie derselben parallel.

26.

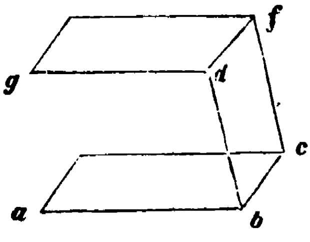
Wenn zwei Ebenen auf einer graden Linie senkrecht sind, so sind sie einander parallel.



Es sey die grade Linie bd auf den Ebenen abc, adf senkrecht. Wenn diese Ebenen einander in einer graden Linie schneiden würden, so sey a ein beliebiger Punct dieser graden Linie, welcher also in beiden Ebenen liegt. Man ziehe ab, ad, so liegt ab in der Ebene abc, und ad in der Ebene adf. Da bd auf beiden Ebenen senkrecht ist, so ist (IV. 3. 6.) $\angle\, abd = R$, $\angle\, adb = R$. Da es aber unmöglich ist, von einem Punct auf eine grade Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu ziehen, so können die beiden Ebenen abc, adf keinen Punct mit einander gemein haben. Solche Ebenen aber, welche gehörig erweitert, einander nirgends durchschneiden, heissen parallel.

27.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind die Kanten parallel.

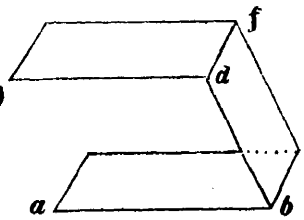


Die parallelen Ebenen abc, gdf werden von der Ebene $bcdf$ geschnitten. Die Kanten sind bc, df. Wären diese Kanten nicht parallel, so müssten sie, da sie in einer Ebene liegen, einen Punct mit einander gemein haben. Dieser Punct würde zugleich in bc und df, also zugleich in den Ebenen abc und gdf liegen. Also würden diese Ebenen einen Punct gemein haben, was der Voraussetzung, dass sie parallel sind, widerspricht. Also sind die Kanten $bc \frown df$.

28.

Wenn zwei Ebenen parallel sind, so sind die zwischen ihnen gezogenen Parallellinien einander gleich.

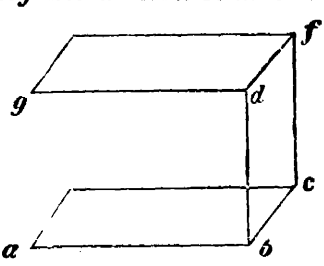
Die Ebenen abc, gdf seyen parallel, und es seyen zwischen ihnen die Parallellinien bd, cf gezogen. Diese Parallellinien liegen in einer Ebene, deren Kanten auf den Ebenen abc, gdf die graden Linien bc, df sind. Also (IV. 27.) $bc \frown df$. Aber auch $bd \frown cf$. Also $bcdf$ ein Parallelogramm. Also (II. 16.) $bd = cf$.



29.

Wenn eine grade Linie auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

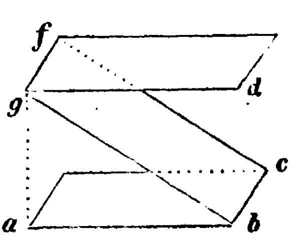
Die Ebenen abc, gdf seyen parallel, und es sey db auf der Ebene abc senkrecht. Man ziehe in der Ebene abc zwei beliebige Linien ab, bc, so ist (IV. 6.) $\angle\, dba = R$ und $\angle\, dbc = R$. Die Ebene gdf werde von den Ebenen dba, dbc in dg, df geschnitten, so ist (IV. 27.) $dg \frown ba$, $df \frown bc$. Also $\angle\, bdg = R$, und $\angle\, bdf = R$, also (IV. 3. 6.) bd senkrecht auf der Ebene gdf.



30.

Parallele Ebenen bilden an einer sie durchschneidenden Ebene gleiche Kantenwinkel.

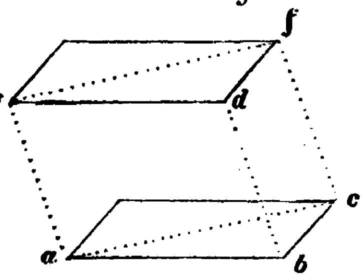
Die Ebenen abc, dgf werden von der Ebene $bcfg$ durchschnitten. Die Kanten sind bc, fg, also (IV. 27.) $bc \frown fg$. Von einem beliebigen Pun-



cte g der Kante fg fälle man (IV. 20.) die ga senkrecht auf die Ebene abc, und von a die ab senkrecht auf bc. Man verbinde gb, so ist (IV. 19.) auch gb senkrecht auf bc, also die Ebene gab (IV. 13.) senkrecht auf den Ebenen abc, $bcfg$ und (IV. 22.) $\angle\, gba$ der Kantenwinkel der Ebenen abc, $bcfg$. Da $bc \parallel fg$ und bc senkrecht auf der Ebene gab, so ist auch (IV. 16.) fg senkrecht auf der Ebene gab. Die Ebene gab durchschneide die Ebene fgd in der graden Linie gd, so ist (IV. 27.) $gd \parallel ab$. Da fg senkrecht auf der Ebene $dgab$ ist, so ist (IV. 6.) $\angle\, fgd = R$. Da $fg \parallel bc$, und $\angle\, gbc = R$, so ist auch $\angle\, fgb = R$. Da $\angle\, fgd = fgb = R$, so ist (IV. 22.) $\angle\, dgb$ der Kantenwinkel der Ebenen dgf, $bcfg$. Aber $gd \parallel ab$, also (II. 3.) $\angle\, gba = dgb$. Also bilden die parallelen Ebenen abc, dgf gleiche Kantenwinkel an der Ebene $bcfg$.

31.

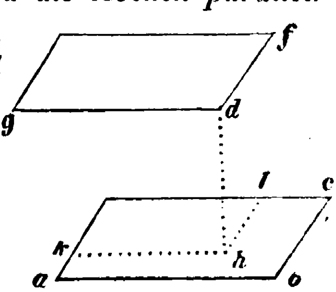
Wenn die Seiten zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel sind, so sind die Winkel gleich.



Die Winkel abc, gdf liegen in verschiedenen Ebenen, und es sey $gd \parallel ab$, $df \parallel bc$. Man mache von beliebiger Länge $gd = ab$, $df = bc$, so ist (II. 19.) $ga \parallel = db$, $fc \parallel = db$, also (IV. 23.) $ga \parallel = fc$, also (II. 19.) $gf \parallel = ac$, also (I. 5.) $\triangle\, gdf = abc$, also $\angle\, gdf = abc$.

32.

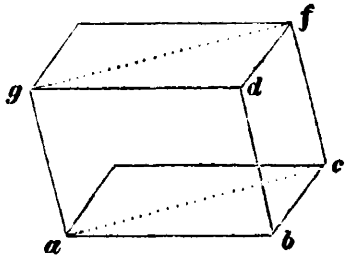
Wenn die Seiten zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel sind, so sind die Ebenen parallel.



Die Winkel abc, gdf liegen in verschiedenen Ebenen, und es sey $gd \parallel ab$, $df \parallel bc$. Man ziehe dh senkrecht (IV. 20.) auf die Ebene abc, und von h in der Ebene abc die $hk \parallel ab$, $hl \parallel bc$, so ist (IV. 23.) $hk \parallel gd$, $hl \parallel df$. Aber (IV. 6.) $\angle\, dhk = dhl = R$, also $\angle\, hdg = hdf = R$, also (IV. 3. 6.) dh senkrecht auf der Ebene gdf, also (IV. 26.) die Ebenen abc, gdf parallel.

33.

Wenn drei in verschiedenen Ebenen liegende grade Linien parallel und einander gleich sind, so sind die Ebenen, welche ihre Endpuncte verbinden, parallel.

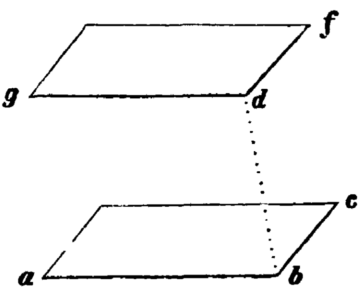


Es sey $ga \frown = db \frown = fc$, so ist (II. 19.) $gd \frown ab$, $df \frown bc$, also (IV. 32.) die Ebenen gdf, abc parallel.

34.

Durch einen gegebenen Punct eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel sey.

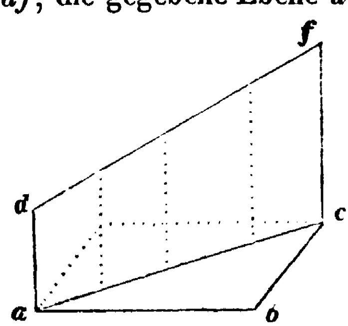
Der gegebene Punct sey d, die gegebene Ebene sey abc. Man ziehe in derselben zwei beliebige grade Linien ba, bc. In der Ebene dba ziehe man $dg \frown ba$, und in der Ebene dbc ziehe man $df \frown bc$, so ist (IV. 32.) die Ebene gdf der Ebene abc parallel.



35.

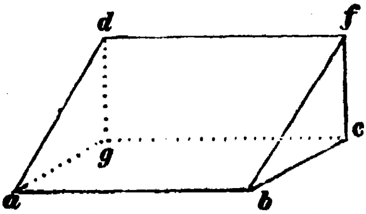
Durch eine gegebene grade Linie eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht sey.

Die gegebene grade Linie sey df, die gegebene Ebene abc. Man wähle in der graden Linie zwei beliebige Puncte d, f, fälle von denselben (IV. 20.) senkrechte Linien da, fc auf die Ebene abc, so sind sie (IV. 15.) parallel und liegen also in einer Ebene, welche durch die gegebene grade Linie geht, und welche (IV. 13.) auf der Ebene abc senkrecht ist.



36.

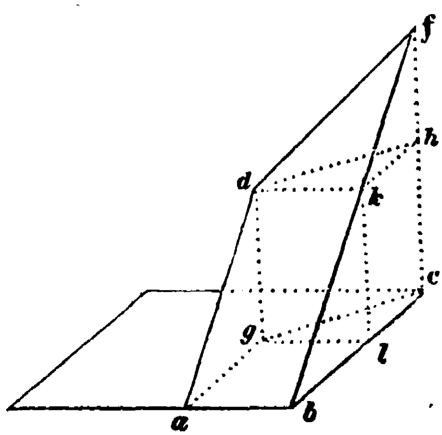
Durch eine grade Linie, welche einer gegebenen Ebene parallel ist, eine Ebene zu legen, welche mit jener Ebene einen gegebenen Kantenwinkel bildet.



Die gegebene grade Linie sey *df*, die gegebene Ebene *abc*. Man fälle von zwei beliebigen Puncten der graden Linie *df* senkrechte Linien *dg*, *fc* auf die Ebene *abc*, so ist (IV. 35.) die Ebene *dfcg* auf der Ebene *abc* senkrecht, und *cg* ihre gemeinschaftliche Kante. Es sey *cg* $\parallel$ *df*, so ist (IV. 25.) *df* der Ebene *abc* parallel. In der Ebene *abc* errichte man in *c* auf *cg* die senkrechte Linie *cb*, so ergiebt sich eine Ebene *fcb*. In dieser ziehe man die Linie *fb* so, dass sie mit *cb* einen Winkel bildet, welcher dem gegebenen Kantenwinkel gleich ist, so ergiebt sich eine Ebene *dfb*. In dieser ziehe man *ba* $\parallel$ *df*. Da auch *df* $\parallel$ *cg*, so ist (IV. 23.) *ba* $\parallel$ *cg*, also liegt *ba* in der Ebene *abc*, und ist also die Kante der Ebenen *abcg*, *abfd*. Da *fc* senkrecht auf der Ebene *abc*, so ist (IV. 6.) $\angle\, fcb = R$. Aber auch $\angle\, gcb = R$, also (IV. 3. 6.) *bc* auf der Ebene *dfcg* senkrecht. Aber $\angle\, dfc = R$, also (IV. 19.) $\angle\, dfb = R$. Aber *ba* $\parallel$ *df*, also $\angle\, abf = dfb = R$. Ferner *ba* $\parallel$ *cg*, also $\angle\, abc = gcb = R$. Also (IV. 22.) $\angle\, fbc$ der Kantenwinkel der Ebenen *abcg*, *abfd*.

37.

Durch eine grade Linie, welche einer gegebenen Ebene nicht parallel ist, eine Ebene zu legen, welche mit jener Ebene einen gegebenen Kantenwinkel bildet.

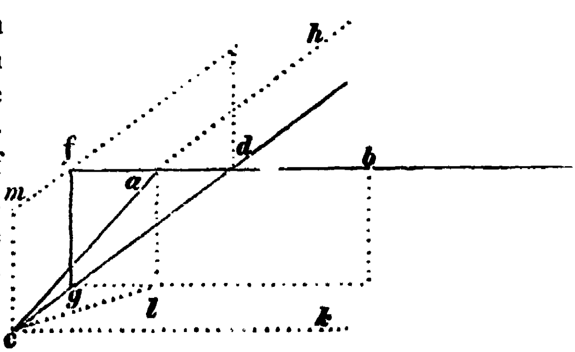


Die gegebene grade Linie sey *df*, die gegebene Ebene *abc*. Man fälle von zwei beliebigen Puncten der graden Linie *df* senkrechte Linien *dg*, *fc* auf die Ebene *abc*, so ist (IV. 35.) die Ebene *dfcg* auf der Ebene *abc* senkrecht, und *cg* ihre gemeinschaftliche Kante, welche der graden Linie *df* nicht parallel sey. Man ziehe *dh* $\parallel$ *cg* bis an *fc* in der Ebene *dfcg*. Man beschreibe ein rechtwinkliges Dreieck über die Kathete *fh*, in welchem der Gegenwinkel von *fh* dem gegebenen Kantenwinkel gleich sey, so erhält man die zweite

Kathete *hk* dieses Dreiecks. Da *dh* $\parallel$ *cg*, so ist auch (IV. 25.) *dk* der Ebene *abc* parallel. Man lege also (IV. 34.) durch *d* oder *h* eine Ebene der gegebenen Ebene *abc* parallel. In dieser Ebene beschreibe man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem *dh* die Hypotenuse, *dkh* der rechte Winkel, und die Kathete *hk* der zweiten Kathete des vorigen rechtwinkligen Dreiecks gleich sey. Man ziehe *fk*. Da *fh* auf der Ebene *abc* senkrecht ist, so ist (IV. 29.) *fh* auch auf der parallelen Ebene *dkh* senkrecht, und da $\angle\, dkh = R$, so ist (IV. 19.) $\angle\, dkf = R$, also (IV. 22.) $\angle\, fkh$ der Kantenwinkel der Ebenen *dkf*, *dkh*. Vermöge der Construction durch die Katheten *fh*, *hk*, ist aber $\angle\, fkh$ dem gegebenen Kantenwinkel gleich. Also bilden die Ebenen *dkf*, *dkh* einen Kantenwinkel, welcher dem gegebenen Winkel gleich ist. In der Ebene *dkf* verlängere man *fk* bis zur Ebene *abc* in *b*, ziehe in der Ebene *dkf* die *da* $\parallel$ *fb*, *ba* $\parallel$ *dk*, so liegt (IV. 27.) *ba* in der Ebene *abc*. Aber die Ebene *dkh* war der Ebene *abc* parallel gezogen, also (IV. 30.) bildet die Ebene *dfba* auch mit der gegebenen Ebene *abc* den gegebenen Kantenwinkel.

38.

Auf zwei nicht parallelen und nicht in einer Ebene liegenden graden Linien die Puncte ihres kürzesten Abstandes zu finden.

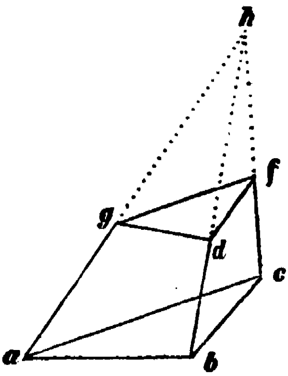


Die gegebenen graden Linien seyen *ab*, *cd*. Man nehme auf *ab* einen beliebigen Punct *a*, auf *cd* einen beliebigen Punct *c*. In der Ebene *acd* ziehe man *ah* $\parallel$ *cd*, in der Ebene *cab* ziehe man *ck* $\parallel$ *ab*, so sind (IV. 32.) die Ebenen *bah*, *kcd* parallel. Man lege (IV. 35.) durch die grade Linie *ab* eine Ebene *bal* senkrecht auf die Ebene *kcd*, und durch die grade Linie *cd* eine Ebene *dcm* senkrecht auf die Ebene *bah*, so ist sie auch (IV. 30.) senkrecht auf der Ebene *kcd*. Wenn nun die grade Linie *ab* die Ebene *dcm* in *f*, und die grade Linie *cd* die Ebene *bal* in *g* schneidet, so sind *f* in *ab*, und *g* in *cd* die Puncte des kürzesten Abstandes.

Denn da fg die Kante der Ebenen bal, dcm ist, und diese Ebenen auf der Ebene kcd senkrecht sind, so ist (IV. 17.) auch fg auf der Ebene kcd senkrecht. Aber al ist auf der Ebene kcd senkrecht, also (IV. 15.) $al \parallel fg$. Da $ab \parallel ck$ ist, so ist (IV. 25.) ab der Ebene kcd parallel. Da lg die Kante der Ebenen bal, kcd ist, und ab der Ebene kcd parallel ist, so ist (IV. 25.) auch $ab \parallel lg$, also (II. 16.) $al = fg$. Aber al auf der Ebene kcd senkrecht, also (IV. 6.) $\angle alc = R$, also $ac^2 = al^2 + cl^2$, $al = fg$, also $ac^2 = fg^2 + cl^2$, also fg kleiner als ac, d. h. der kürzeste Abstand.

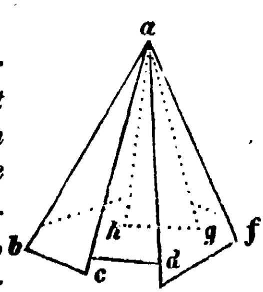
39.

Wenn drei Ebenen einander je zwei durchschneiden, so treffen ihre Kanten entweder in einen Punct zusammen, oder sie sind parallel.



Es sey cf die Kante der Ebenen $bcfd$, $acfg$, und ag die Kante der Ebenen $abdg$, $acfg$, so liegen beide Kanten cf, ag in der Ebene $acfg$. Wenn sie also nicht parallel sind, so treffen sie gehörig verlängert in einen Punct h zusammen. Da dieser Punct h in cf liegt, so liegt er in der Ebene $bcfd$; da er in ag liegt, so liegt er in der Ebene $abdg$; da der Punct h in beiden Ebenen $bcfd$, $abdg$ liegt, so liegt er in ihrer Kante bd. Dieser Punct h ist also der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kanten ag, bd, cf. Er ist auch (IV. 24.) der Durchschnitt jeder Kante mit der gegenüberliegenden Ebene, also von ag mit $bcfd$, von bd mit $acfg$, von cf mit $abdg$. Wenn also zwei Kanten z. B. ag, cf parallel sind, so muss auch die dritte Kante bd ihnen parallel seyn.

40.



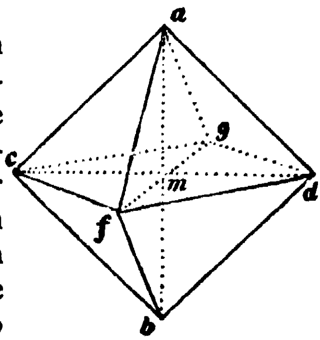
Eine Zusammenstellung von drei oder mehrern Ebenen, welche einen Punct mit einander gemein haben, in welchen auch ihre Kanten zusammentreffen, heisst eine Ecke oder ein körperlicher (solider) Winkel.

Z. B. die Ebenen bac, cad, daf, fag, gah, hab bilden in a eine Ecke.

Die Kanten *ba*, *ca*, *da*, *fa*, *ga*, *ha*, welche in der Ecke zusammentreffen, heissen *Endkanten*, und die Flächen, welche die Ecke bilden, heissen *Endflächen*. Nach der Anzahl der Endkanten oder Endflächen heisst die Ecke eine dreikantige, vierkantige, fünfkantige u. s. w. oder eine dreiflächige, vierflächige, fünfflächige u. s. w. Eine Ecke schliesst keinen Raum ein.

41.

Wenn ein Raum von allen Seiten durch Ebenen begrenzt oder eingeschlossen wird, so heisst er ein Körper, ein Vielflächner oder Polyeder.

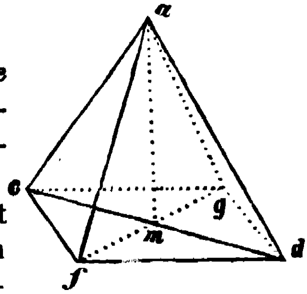


Wenn die Ebenen, welche den Körper begrenzen, um gewisse einander im Mittelpuncte durchschneidende grade Linien regelmässig und gleichförmig vertheilt sind, so heisst der Körper ein Krystall, und jene Linien heissen die Axen des Krystalls. Gehen die Axen durch zwei gegenüberstehende gleiche Ecken, wie *ab*, *cd*, *fg*, so heissen sie Eckenaxen. Gehen die Axen durch die Mittelpuncte gegenüberstehender und paralleler Endflächen oder Kanten, so heissen sie Flächenaxen oder Kantenaxen. Diejenigen Kanten und Flächen des Krystalls, welche in die Endpuncte einer Hauptaxe zusammentreffen, heissen Endkanten und Endflächen. Z. B. *ca*, *da*, *fa*, *ga*, und *cb*, *db*, *fb*, *gb* sind Endkanten. Ferner *caf*, *dag*, *cag*, *daf*, und *cbf*, *dbg*, *cbg*, *dbf* sind Endflächen, in Bezug auf die Hauptaxe *ab*.

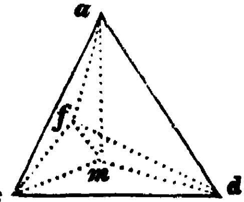
Diejenigen Kanten, welche in die Endpuncte der Nebenaxen zusammentreffen, heissen Seitenkanten, Randkanten oder Grundkanten. Solche Kanten sind z. B. *cf*, *dg*, *cg*, *df* in Bezug auf die Nebenaxen *cd*, *fg*.

42.

Wenn die Endflächen einer Ecke durch eine Ebene durchschnitten werden, so heisst der Körper eine Pyramide.

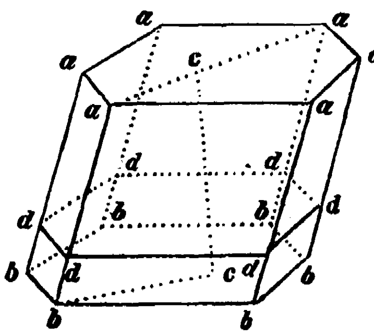


Die durchschneidende Ebene heisst die Grundfläche der Pyramide. Nach der Anzahl der Ecken an der Grundfläche heisst die Pyramide eine dreieckige, viereckige u. s. w. Die Ecke, welche der Grundfläche gegenüber liegt, heisst die Spitze, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie *am* heisst die Höhe der Pyramide. Eine dreieckige Pyramide wird von vier Flächen begrenzt, und heisst deshalb auch ein Vierflächner oder *Tetraëder*.



43.

Ein Körper, dessen Grundflächen parallel, und dessen Endkanten parallel sind, heisst ein Prisma.



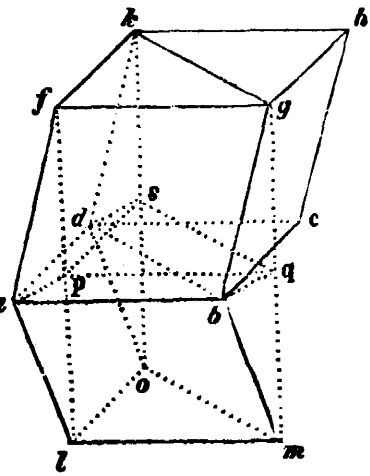
Die parallelen Grundflächen sind *aaa*... und *bbb*..., die parallelen Endkanten sind *ab*, *ab* u. s. w. Diese parallelen Endkanten sind (IV. 28.) alle einander gleich, $ab = ab$ u. s. w.; daher sind die Endflächen des Prisma *abab* Parallelogramme, und die gegenüberliegenden Randkanten einander gleich und parallel $aa \frown = bb$. Folglich sind die Grundflächen des Prisma congruent, $aaa\ldots = bbb\ldots$ Die von irgend einem Puncte *c* der einen Grundfläche auf die andre Grundfläche senkrecht gezogene grade Linie ist auch (IV. 29.) auf jener Grundfläche senkrecht und heisst die Höhe des Prisma. Alle Höhen sind (IV. 15.) parallel und (IV. 28.) einander gleich. Daher sind auch die parallelen Endkanten *ab*, *ab* unter gleichem Winkel gegen die Grundfläche geneigt (IV. 21. 31.). Wenn dieser Winkel ein spitzer oder stumpfer ist, so heisst das Prisma ein schiefes Prisma, wenn aber die Endkanten auf der Grundfläche senkrecht, also der Höhe gleich sind, so heisst es ein senkrechtes Prisma, oder eine *Säule*. Nach der Anzahl der Randkanten oder Endkanten heisst das Prisma ein dreiseitiges, vierseitiges, fünfseitiges u. s. w. In jedem der Grundfläche parallelen Querschnitt *ddd*... sind die Kanten des Querschnittes (IV. 27.) den Randkanten parallel und gleich $dd \frown = bb$, daher jeder parallele Querschnitt der Grundfläche congruent ist.

Wenn die Endkanten zwar parallel aber nicht einander gleich sind, so dass die Grundflächen zwei gegen einander geneigte Ebenen sind, so heisst der Körper ein prismatischer, oder ein schief abgestumpftes Prisma.

44.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heisst ein Parallelepipedum.

Ein Parallelepipedum *abcdfghk* wird also von sechs Parallelogrammen begrenzt, von denen je zwei gegenüberliegende congruent sind, nämlich *abcd* = *fghk*, *bchg* = *adkf*, *abgf* = *dchk*. Ein Parallelepipedum hat 12 Kanten, von denen je vier einander gleich und parallel sind. Wenn aber alle 12 Kanten einander gleich sind, so wird das Parallelepipedum von lauter Rhomben begrenzt, und heisst alsdann ein *Rhomboëder*.

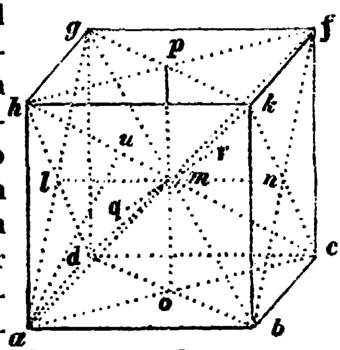


Wenn die Endkanten eines Parallelepipedums gegen die Grundfläche unter spitzen oder stumpfen Winkeln geneigt sind, so heisst es ein schiefes, sind sie aber senkrecht auf der Grundfläche, so heisst es ein senkrechtes Parallelepipedum.

Im schiefen Parallelepipedum sind je zwei gegenüberliegende Diagonallinien, wie *bd*, *gk*, parallel und einander gleich, und eine durch dieselbe gelegte Ebene *bdkg* theilt das Parallelepipedum in zwei dreiseitige Prisme' *abdfgk* und *bcdghk*, welche *symmetrische* Prismen heissen, weil sie zwar von congruenten Flächen begrenzt werden, sich aber nicht das eine in das andre hineinstellen lassen. Denn indem man das $\triangle$ *hkg* auf das congruente $\triangle$ *abd* (I. 5.) bringt, so fällt *h* auf *a*, *k* auf *b*, g auf *d*, und das $\triangle$ *cdb* kommt in die Lage *lmo*, so dass die von den Puncten *f*, *g*, *k* auf die Grundfläche *abcd* gefällten senkrechten Linien *fp*, *gq*, *ks* gehörig verlängert in die Puncte *l*, *m*, *o* treffen. Die beiden Prismen *abdfgk* und *hkgcdb* = *abdlmo* haben also auf den entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche *abd* gleiche Lage, Richtung und Grösse.

45.

Ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundflächen und Endflächen Quadrate sind, heisst ein Würfel, Cubus, Hexaëder, Sechsflächner (tessera, tessella).

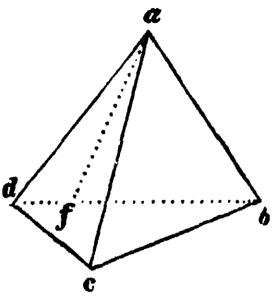


Alle 12 Kanten des Cubus sind einander gleich, und auf den Endflächen senkrecht (IV. 8.). Wenn man durch je zwei gegenüberliegende Kanten wie ah, fc eine Ebene legt, so durchschneidet sie die Hexaëderflächen $abcd$, $fghk$ in ihren Diagonallinien ac, fh senkrecht. Je zwei solcher Diagonalflächen $acfh$, $bdgk$ durchschneiden einander in einer graden Linie op, welche (IV. 17.) auf den Hexaëderflächen $abcd$, $fghk$ in ihren Mittelpuncten o, p senkrecht ist. Die sechs Diagonalflächen schneiden einander also in drei graden Linien op, ln, qr, welche einander in dem Mittelpuncte m des Cubus rechtwinklig durchschneiden und halbiren, und den Kanten des Cubus gleich sind. Sie sind Flächenaxen des Hexaëders, und heissen *Octaëderaxen.*

Die Diagonallinien, welche je zwei gegenüber liegende Ecken verbinden, af, bg, ch, dk, sind einander gleich und heissen *Hexaëderaxen.* Da $ch^2 = ah^2 + ac^2$, $ac^2 = ab^2 + bc^2$, und $ah = ab = bc$, so ist $ac^2 = 2ah^2$, $ch^2 = 3ah^2$. Fället man au senkrecht auf ch, so ist (III. 56. 58.) $\frac{cu}{hu} = \frac{ac^2}{ah^2} = \frac{2}{1}$, also $mu = \frac{1}{3}am$. Die Hexaëderaxe ist also gleich der Kante multiplicirt mit $\sqrt{3} = 1{,}732050807569$, und die Winkel, unter welchen sich die Hexaëderaxen durchschneiden, sind gleich dem Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathete $\frac{1}{3}$ der Hypotenuse, also $= 70^\circ 31',7267$.

46.

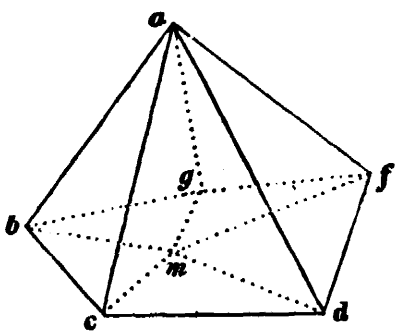
In jeder dreiflächigen Ecke beträgt die Summe der beiden kleinern gradlinigen Winkel mehr als der dritte.



Es seyen bac, cad die beiden kleinern, bad der grössere Winkel. In der Ebene des letztern mache man $\angle\, baf = bac$, $af = ac$, ziehe bfd und verbinde cd, so ist (I. 1.) $\triangle\, baf = bac$, also $bf = bc$. Aber (I. 27.) $bc + cd >$ als bd, also $bc + cd > bc + fd$, also $cd > fd$. Aber $ad = ad$, $af = ac$, also (I. 28.) $\angle\, cad > fad$, also $\angle\, bac + cad > bac + fad$. Aber $\angle\, bac = baf$, also $\angle\, bac + cad > bad$.

47.

In jeder drei- oder mehrflächigen Ecke beträgt die Summe der von den Endkanten gebildeten gradlinigen Winkel weniger als die Summe von vier rechten Winkeln.



Man durchschneide die Ecke a durch eine Grundfläche $bcdfg$ in beliebiger Richtung, und nehme in derselben einen beliebigen Punct m an. Die Anzahl der Endkanten oder Endflächen, oder der Dreiecke um den Punct m sey $= N$, so ist die Summe aller gradlinigen Winkel in den Endflächen $= N \cdot 2R$, und die Summe der Winkel in den Dreiecken, welche um den Punct m herum liegen, ebenfalls $= N \cdot 2R$. Die erste Summe besteht aus den Winkeln an a, $= A$, und aus den Winkeln in den Endflächen an den Randkanten $= B$. Die zweite Summe besteht aus den Winkeln am Umfange der Grundfläche $= G$, und aus den Winkeln um den Punct m, $= 4R$, also ist $A + B = N \cdot 2R$, und $G + 4R = N \cdot 2R$, also $A + B = G + 4R$. Aber (IV. 46.) $B > G$, also $A < 4R$.

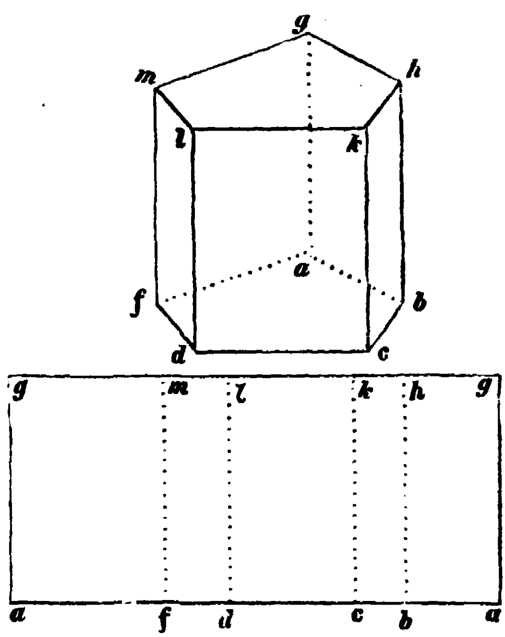
48.

In jeder drei - oder mehrflächigen Ecke beträgt die Summe der innern Kantenwinkel mehr als die Summe der innern Umfangswinkel eines ebenen gradlinigen Vielecks von soviel Seiten als die Ecke Endflächen hat.

Man errichte auf jeder Endfläche in dem Eckpunct eine senkrechte Linie nach Aussen zu, so macht der gradlinige Winkel zweier nächsten Lothe mit dem innern Kantenwinkel der Endflächen (IV. 22.) zusammen $2R$. Es sey also die Summe der gradlinigen Winkel der Lothe $= A$, die Summe der innern Kantenwinkel der Endflächen $= C$, so ist $A + C = N \cdot 2R$. Aber (IV. 47.) $A < 4R$, also $C > N \cdot 2R - 4R$. Es ist aber (II. 11.) $N \cdot 2R - 4R$ die Summe der innern Umfangswinkel eines ebenen gradlinigen Vielecks von N Seiten.

49.

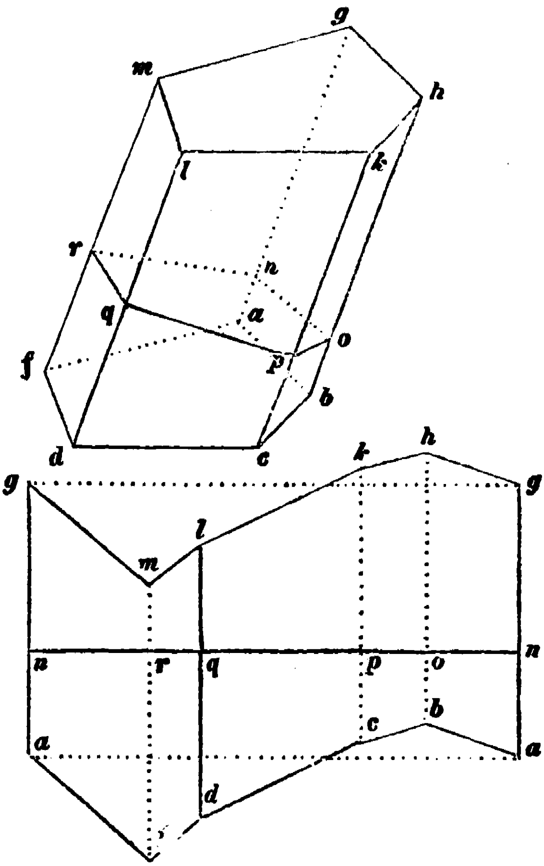
Die Seitenfläche d. h. die Summe aller Endflächen einer Säule ist gleich dem Product des Umfangs mit der Höhe.



Denn die Endflächen sind (IV. 43.) Rechtecke, deren Höhe gleich der Höhe der Säule, deren Grundlinien die Randkanten ab, bc, cd u. s. w. der Säule sind. Trägt man also die Randkanten auf eine grade Linie auf, und errichtet man in den Theilungspuncten senkrechte Linien, welche der Höhe der Säule gleich sind, so sind die einzelnen Rechtecke den Endflächen der Säule gleich, und das ganze Rechteck hat den Umfang der Säule zur Grundlinie.

50.

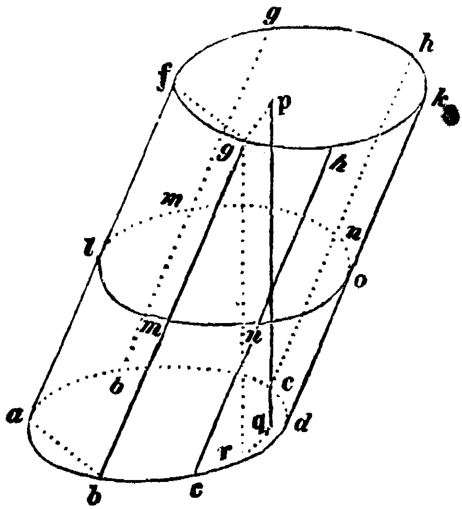
Die Seitenfläche d. h. die Summe aller Endflächen eines schiefen Prisma ist gleich dem Product des Umfangs des senkrechten Querschnitts mit der Endkante des Prisma.



In der Endkante ag nehme man einen beliebigen Punct n an, und errichte in demselben auf ag in den Ebenen $aghb$, $agmf$ die senkrechten Linien no, nr, so ist (IV. 3. 6.) die Endkante ag auf der Ebene rno senkrecht. Wenn diese Ebene, gehörig erweitert, die übrigen Endkanten in o, p, q, r durchschneidet, so sind sie (IV. 16.) auf dieser Ebene senkrecht, und die Winkel noh, poh, opk, kpq u.s.w. sind rechte Winkel. Man trage also die Randkanten dieses senkrechten Querschnitts no, op u.s.w. auf eine grade Linie, errichte in den Theilungspuncten senkrechte Linien, und nehme auf denselben die Abschnitte na, ng; ob, oh u. s. w. gleich den entsprechenden Abschnitten auf den Endkanten des Prisma, so sind die entstehenden Parallelogramme $abhg$, $bckh$ u. s. w. gleich den entsprechenden Endflächen des Prisma. Da alle Parallelogramme von gleicher Höhe und Grundlinie gleichen Inhalt haben, so ist die Summe aller Endflächen gleich dem Rechteck $agga$, d. h. gleich dem Product des Umfangs nn des senkrechten Querschnitts $nopqrn$ mit der Endkante des Prisma ag.

51.

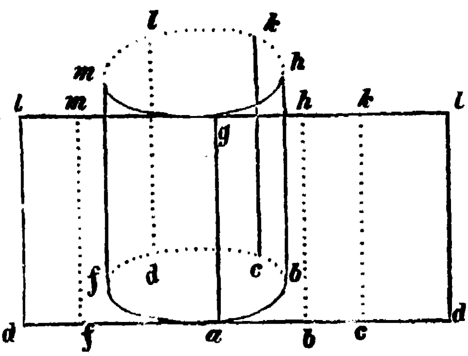
Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein Kreis oder eine andre krumme Linie ist.



Die beiden parallelen Grundflächen des Cylinders sind also (IV. 43.) congruente krumme Linien. Die von irgend einem Puncte p der obern Grundfläche auf die untere Grundfläche gefällte senkrechte Linie pq ist auch auf der obern Grundfläche (IV. 29.) senkrecht, und heisst die *Höhe* des Cylinders. Alle Höhen pq, gr u. s. w. sind (IV. 15.) parallel und (IV. 28.) einander gleich. Die grade Linie af, bg, ch, dk, welche je zwei entsprechende Puncte der beiden Grundflächen verbindet, liegt ganz in der Seitenfläche des Cylinders und heisst die *Seitenlinie.* Alle Seitenlinien sind (IV. 43.) parallel und einander gleich, die durch je zwei Seitenlinien af, bg gelegte Ebene durchschneidet die Seitenfläche des Cylinders in einem Parallelogramm. Jede andere Ebene, welche die Seitenlinie in einem Puncte durchschneidet, muss auch alle andern Seitenlinien durchschneiden. Diese Durchschnittspuncte bilden auf der Seitenfläche des Cylinders eine *krumme Linie.* Wenn die schneidende Ebene den Grundflächen parallel ist, so bildet der Querschnitt auf der Seitenfläche eine krumme Linie $lmno$, welche den Grundflächen congruent ist (IV. 43.).

52.

Die Seitenfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte des Umfangs der Grundfläche mit der Höhe.

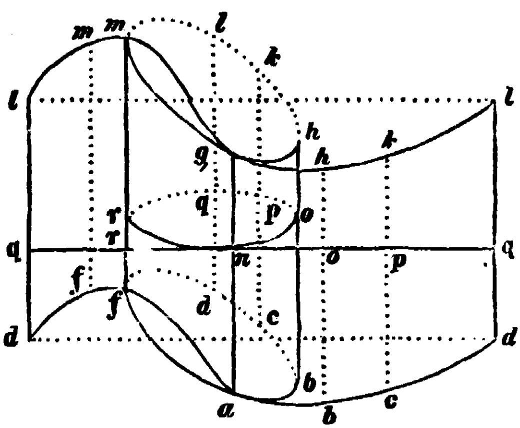


Wenn man in der Ebene der Grundfläche $abcdf$ in einem Puncte a eine grade Linie dad zieht, welche die krumme Linie berührt, d. h.

nur diesen Punct a mit ihr gemein hat, in allen übrigen Puncten aber ausserhalb derselben liegt, so wird eine durch diese Berührungslinie ad und die Seitenlinie ag gelegte Ebene die krumme Seitenfläche des Cylinders in der Linie ag berühren. Da alle Seitenlinien des Cylinders parallele grade Linien sind, so wird sich die Seitenfläche des Cylinders bei der Umdrehung desselben auf dieser Ebene abwickeln und bei einer ganzen Umdrehung des Cylinders wird die durch die Abwickelung auf der Ebene erzeugte Figur der ganzen Seitenfläche des Cylinders gleich seyn. Bei einem senkrechten Cylinder sind alle Seitenlinien auf der Grundfläche senkrecht. Zieht man also in der Berührungsebene die graden Linien dad, lgl senkrecht auf ag, so fallen bei der Abwickelung des Cylinders die Puncte der krummen Linien der beiden Grundflächen in die Grundlinien dieses Rechtecks, und die Länge der Grundlinien dd, ll, ist also dem Umfange der krummen Linien der Grundflächen gleich.

53.

Die Seitenfläche eines schiefen Cylinders ist gleich dem Producte des Umfangs des senkrechten Querschnitts mit der Seitenlinie.

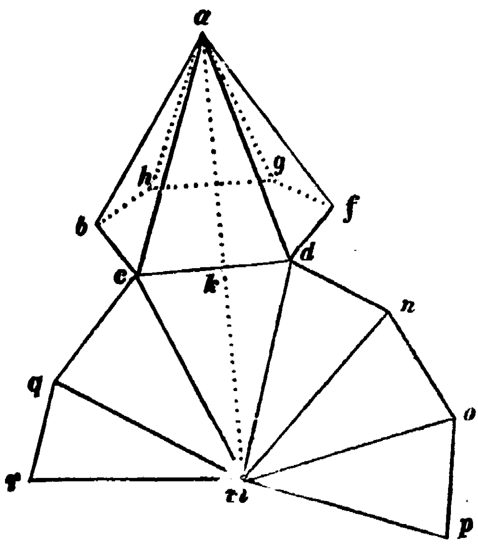


Durch einen beliebigen Punct n der Seitenlinie ag des schiefen Cylinders, lege man eine auf diese Seitenlinie senkrechte Ebene, welche die Seitenfläche des Cylinders in einer krummen Linie $nopqr$ durchschneidet. In dieser Ebene ziehe man an die krumme Linie eine berührende grade Linie qnq, und lege durch diese berührende Linie und die Seitenlinie ag eine Ebene, so berührt dieselbe die Seitenfläche des Cylinders in der Linie ag. Bei der Umdrehung des Cylinders wickeln sich die Puncte des senkrechten Querschnitts $nopqr$ in der graden auf ag senkrechten Linie qnq ab, die Puncte der congruenten schiefen Grundflächen $abcdf$, $ghklm$ aber wickeln sich auf der Berührungsebene $ddll$ in congruenten krummen Linien ab, so dass die Abwickelung der untern Grundfläche $abcdf$ gegen die untere

Grundlinie *dd* des Rechtecks dieselbe Lage und Entfernung hat, wie die Abwickelung der obern Grundfläche *ghklm* gegen die obere Grundlinie *ll*. Folglich ist die auf der Berührungsebene bei der Abwickelung des Cylinders erzeugte, zwischen den graden Linien *dl*, *dl* und den krummen Linien *dcbufd*, *lkhgml* enthaltene, der Seitenfläche des schiefen Cylinders gleiche Figur, an Inhalt dem Rechteck *dlld* gleich, dessen Grundlinie $dd = qq = ll$ dem Umfange des senkrechten Querschnitts und dessen Höhe der Seitenlinie des Cylinders gleich ist.

54.

Die Seitenfläche, d. h. die Summe aller Endflächen einer regelmässigen Pyramide, ist gleich dem halben Product des Umfangs der Grundfläche mit der Höhe der Endfläche.

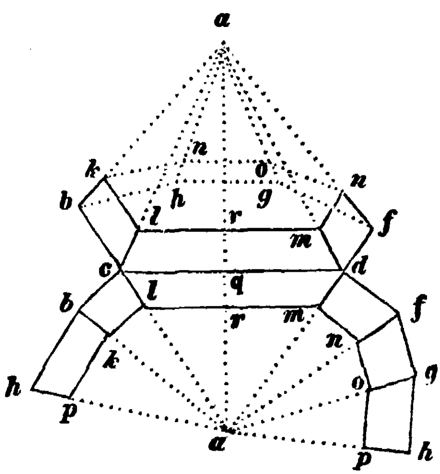


Wenn man auf einer Ebene Dreiecke *mcd*, *mdn*, *mno* u. s. w. nebeneinander setzt, welche den Endflächen der Pyramide *acd*, *adf*, *afg* u. s. w. gegenseitig congruent sind, so werden diese Dreiecke von den Endflächen der Pyramide bei der Abwickelung derselben gedeckt werden. Die Linie *rqcdnop* ist also der Umfang der Grundfläche *hbcdfgh*, und der Inhalt der Figur *rqcdnop* der Seitenfläche der Pyramide gleich. Bei einer regelmässigen Pyramide ist die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck, und die Endkanten *ab*, *ac*, *ad* u. s. w. sind alle einander gleich. Also sind in der abgewickelten Figur alle Dreiecke *mrq*, *mqc*, *mcd* u. s. w. gleiche gleichschenklige Dreiecke, deren Höhe *mk* gleich der Höhe *ak* der Endfläche ist. Aber (III. 8.) $\triangle\ acd = \frac{1}{2} cd \cdot ak$ oder $\triangle\ mcd = \frac{1}{2} cd \cdot mk$. Also ist auch die Seitenfläche der regelmässigen Pyramide gleich dem Product der halben Umfangslinie *bcdfgh* oder *rqcdnop* mit der Höhe *ak* oder *mk*.

55.

Die Seitenfläche einer abgestumpften regelmässigen Pyramide ist gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien mit der Höhe der Endfläche.

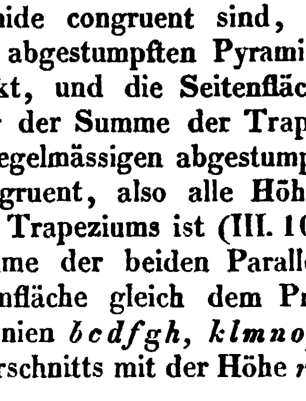
Eine abgestumpfte Pyramide heisst der Körper, welcher zwischen der Grundfläche einer Pyramide und einem ihr parallelen Querschnitt enthalten ist. Die Endflächen *bklc*, *clmd* u. s. w. sind also Trapezien, und die Endkanten *bk*, *cl*, *dm* u. s. w. treffen gehörig verlängert in einen Punct *a* zusammen. Die in der Ebene der Endfläche *cdml*, zwischen den Randkanten *cd*, *lm* gezogene senkrechte Linie *rq* ist die Höhe der Endfläche.



Wenn auf einer Ebene Trapezien neben einander beschrieben werden, welche den Endflächen der abgestumpften Pyramide congruent sind, so werden sie bei der Abwickelung der abgestumpften Pyramide von den Endflächen derselben gedeckt, und die Seitenfläche der abgestumpften Pyramide ist daher der Summe der Trapezien in der Ebene gleich. Bei einer regelmässigen abgestumpften Pyramide sind alle Trapezien congruent, also alle Höhen einander gleich. Aber der Inhalt eines Trapeziums ist (III. 10.) gleich dem Product der halben Summe der beiden Parallelseiten mit der Höhe. Also die Seitenfläche gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien *bcdfgh*, *klmnop*, oder der Umfangslinie des mittlern Querschnitts mit der Höhe *rq*.

56.

In ähnlichen Pyramiden sind die gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Höhen proportionirt, die Endflächen, Grundflächen, Seitenflächen und Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Höhen.



Wenn eine Pyramide, deren Spitze a, deren Grundfläche $bcdfg$ ist, durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so entsteht eine neue Pyramide, deren Spitze a, deren Grundfläche der Querschnitt $hklmn$ ist. Diese beiden Pyramiden heissen einander ähnlich, weil alle Kanten und Flächen der einen, unter denselben Winkeln gegen einander geneigt sind, wie die gleichnamigen der andern (IV. 27. 30.) und daher die einzelnen Flächen der einen den gleichnamigen der andern Pyramide ähnlich sind. Z. B.
$hk \,\widehat{=}\, bc$, $nh \,\widehat{=}\, gb$, $kn \,\widehat{=}\, cg$, $\triangle\, ahk \sim abc$, $\triangle\, ahn \sim abg$, $\triangle\, akn \sim acg$ u. s. w. Daher ist denn auch (II. 59.) $\frac{ah}{ab} = \frac{hk}{bc} = \frac{ak}{ac} = \frac{nk}{cg} = \frac{an}{ag} = \frac{nm}{gf}$ u. s. w. $= A$.

Da $hk = A \cdot bc$, $kl = A \cdot cd$, $lm = A \cdot df$, $mn = A \cdot fg$, $nh = A \cdot gb$, so ist $hk + kl + lm + mn + nh = A \cdot (bc + cd + df + fg + gb)$ d. h. die Umfänge der Grundflächen verhalten sich wie die gleichnamigen Seiten.

Nach III. 64. ist $\frac{\triangle\, ahk}{\triangle\, abc} = A^2$, $\frac{\triangle\, akl}{\triangle\, acd} = A^2$ u. s. w., also $ahk + akl + alm + amn + anh = A^2\,(abc + acd + adf + afg + agb)$, d. h. die Seitenflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten.

Nach III. 67. ist $\frac{hklmn}{bcdfg} = A^2$, d. h. die Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten. Die Summe der Seitenfläche und Grundfläche macht die ganze Oberfläche der Pyramide, also verhalten sich auch die Oberflächen wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten.

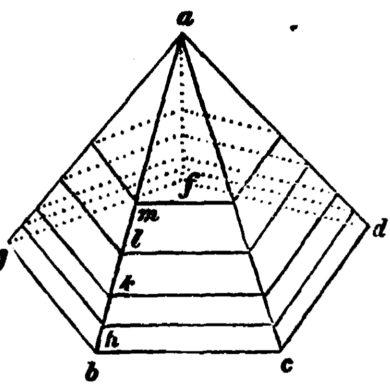
57.

An ähnlichen von Ebenen begrenzten Körpern sind die gleichnamigen Kanten und Diagonallinien proportionirt, die Endflächen und Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Kanten und Diagonallinien.

Nimmt man innerhalb oder ausserhalb eines von Ebenen begrenzten Körpers einen beliebigen Punct an, von welchem man nach allen Eckpuncten grade Linien zieht, so erhält man Pyramiden, die diesen Punct zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen die Endflächen des Körpers sind. Zieht man eine Ebene, welche einer der Endflächen parallel ist, und von den graden Linien, welche nach den Eckpuncten dieser Endfläche gezogen sind, durchschnitten wird, so erhält man eine neue Pyramide, welche denselben angenommenen Punct zur Spitze hat, und deren Grundfläche der mit der ersten Endfläche parallele Querschnitt ist. Diese Pyramide ist der ersten Pyramide (IV. 56.) ähnlich. Durch die verschiedenen Randkanten des parallelen Querschnitts legt man Ebenen, welche den Endflächen, die der ersten Endfläche angrenzen, parallel sind. Hierdurch erhält man um die erste Pyramide herum eine Reihe von Pyramiden, die den gleichnamigen Pyramiden des angenommenen Körpers ähnlich sind, und fährt so fort. Auf diese Weise erhält man einen zweiten Körper, welcher aus Pyramiden besteht, die den gleichnamigen Pyramiden des ersten Körpers ähnlich und auf ähnliche Art zusammengestellt sind. Diese beiden Körper sind also einander ähnlich, und da der vorige Satz für die einzelnen Pyramiden, aus denen sie bestehen, wahr ist, so gilt er auch für die ganzen einander ähnlichen Körper.

58.

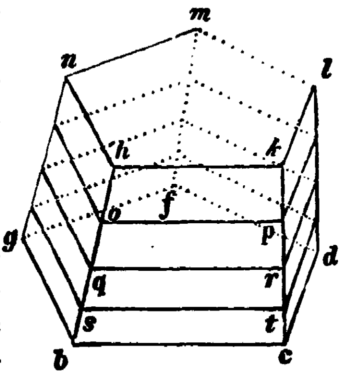
Die Seitenfläche einer Pyramide durch mit der Grundfläche parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.



Nach IV. 55. verhalten sich die Seitenflächen ähnlicher Pyramiden wie die Quadrate gleichnamiger Kanten. Soll also die Seitenfläche n gleiche Theile erhalten, so bestimmt man auf einer Endkante ab die Theilungspunct' m, l, k, h u. s. w. so wie bei der Theilung der Endfläche abc durch Parallellinien (III. 69.), indem man $am = ab\sqrt{\frac{1}{n}}$, $al = \sqrt{\frac{2}{n}}$, $ak = ab \cdot \sqrt{\frac{3}{n}}$, $ah = ab\sqrt{\frac{4}{n}}$ u. s. w. macht, und durch diese Theilungspuncte parallele Ebenen mit der Grundfläche (IV. 34.) zieht.

59.

Die Seitenfläche einer abgestumpften Pyramide durch mit den Grundflächen parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.



Die Endkanten einer abgestumpften Pyramide treffen (IV. 55.) gehörig verlängert in einen Punct zusammen. Die parallelen Ebenen bilden also ähnliche Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze dieser Durchschnittspunct ist. Die durch parallele Ebenen auf den Endflächen der abgestumpften Pyramide, welche Trapezien sind, abgeschnittenen Stücke verhalten sich also wie die Unterschiede der Quadrate der parallelen Transversallinien. Man verfährt daher wie bei der Theilung eines Trapeziums (III. 71.), indem man auf einer Endfläche $bckh$ die parallelen Transversallinien op, qr, st u. s. w. für n gleiche Theile so zieht, dass

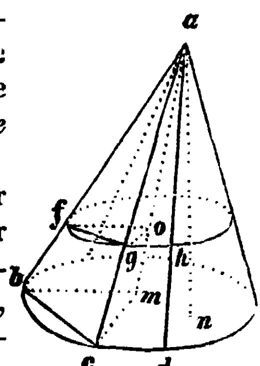
$$op^2 = hk^2 + \frac{1}{n}(bc^2 - hk^2)$$

$$qr^2 = hk^2 + \frac{2}{n}(bc^2 - hk^2)$$

$$st^2 = hk^2 + \frac{3}{n}(bc^2 - hk^2) \text{ u. s. w.}$$

60.

Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis oder eine andere krumme Linie ist.



Die von der Spitze nach dem Mittelpunct der Grundfläche gezogene Linie a : heisst die *Axe*, die auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie an die *Höhe* des Kegels.

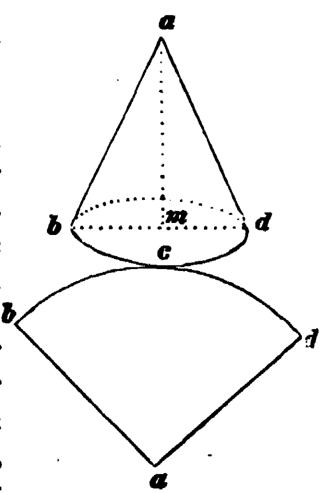
Jede grade Linie, welche von der Spitze nach einem Punct des Umfangs der Grundfläche gezogen wird, heisst die *Seitenlinie* des Kegels, wie ab, ac, ad, und liegt ganz in der Seitenfläche desselben. Jede Ebene, abc, abd, welche durch die Spitze des Kegels und zwei Puncte des Umfangs der Grundfläche gelegt wird, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in zwei graden Linien, welche Seitenlinien sind. Eine Ebene, welche durch eine Seitenlinie, und durch eine Berührungslinie des Umfangs der Grundfläche gelegt wird, berührt die Seitenfläche des Kegels in der Seitenlinie. Eine Ebene, welche nicht durch die Spitze des Kegels geht, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in einer krummen Linie, welche ein *Kegelschnitt* heisst. Eine Ebene, welche der Grundfläche parallel ist, durchschneidet die Seitenfläche des Kegels in einer krummen Linie fgh, welche der Grundfläche bcd ähnlich ist. Wenn die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, so ist auch jeder parallele Querschnitt ein Kreis. Denn (IV. 27.) $fo \overset{\frown}{=} bm$, $go \overset{\frown}{=} cm$, $fg \overset{\frown}{=} bc$, also (IV. 31.) $\triangle fog \backsim bmc$; wenn also $mb = mc$, so ist auch $of = og$.

Ein Kegel kann angesehen werden als entstanden durch die Bewegung einer graden Linie ab, längs einer nicht in ihrer Ebene liegenden krummen Linie bcd, wobei sie immer durch einen gegebenen festen Punct a geht.

Wenn die Grundfläche des Kegels ein Kreis und die Axe am senkrecht auf der Ebene des Kreises ist, also mit der Höhe an zusammenfällt, so sind alle Seitenlinien ab, ac, ad einander gleich. Alsdann heisst der Kegel ein *gleichseitiger*, im Gegentheil aber ein ungleichseitiger Kegel.

61.

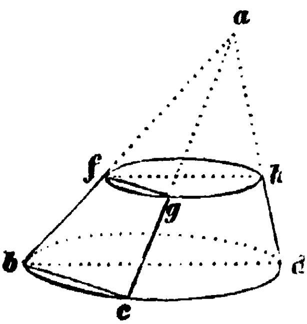
Die Seitenfläche eines gleichseitigen Kegels ist gleich dem halben Product des Umfangs der Grundfläche mit der Seitenlinie.



Da bei dem gleichseitigen Kegel die Axe auf der Grundfläche senkrecht, und die Grundfläche ein Kreis ist, so sind alle Seitenlinien einander gleich $ab = ac = ad$ u. s. w. Bei der Abwickelung des gleichseitigen Kegels auf einer Ebene beschreiben die Puncte des Umfangs der Grundfläche einen Kreisbogen, dessen Halbmesser der Seitenlinie des Kegels gleich ist. Bei einer ganzen Umwälzung des Kegels ist der Bogen dieses Kreises an Länge dem Umfange der Grundfläche des Kegels, und der Inhalt des Kreissectors der Seitenfläche des Kegels gleich. Da der gleichseitige Kegel als eine regelmässige Pyramide angesehen werden kann, deren Grundfläche ein Kreis ist, und (IV. 54.) die Seitenfläche einer regelmässigen Pyramide gleich dem Product des halben Umfangs der Grundfläche mit der Höhe der Endfläche ist, wie gross auch die Anzahl der Seiten ohne Randkanten der Grundfläche seyn mag, so gilt dieser Satz auch für den gleichseitigen Kegel, wobei sich die Linie, welche bei der Pyramide die Höhe der Endfläche, d. h. die von der Spitze auf die Randkante gezogene senkrechte Linie war, in die Seitenlinie des Kegels verwandelt.

62.

Ein abgestumpfter Kegel ist eine abgestumpfte Pyramide, deren parallele Grundflächen Kreise oder andere krumme Linien sind.

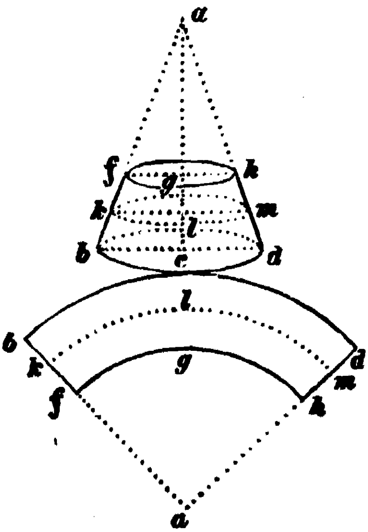


Ein abgestumpfter Kegel ist das Stück eines Kegels, welches zwischen der Grundfläche desselben und einem parallelen Querschnitt enthalten ist. Alle Seitenlinien desselben *bf*, *cg*, *dh* u. s. w. treffen gehörig verlängert in einen Punct zusammen. Eine durch je zwei Seitenlinien *bf*, *cg* gelegte Ebene geht durch denselben Punct und schneidet die parallelen Grundflächen in graden Linien *bc*, *fg*, welche (IV. 27.) parallel sind. Die Grundflächen sind daher ähnliche krumme Linien, und alle den Grundflächen parallele Ebenen schneiden die Seitenfläche des abgestumpften Kegels in ähnlichen krummen Linien. Wenn durch eine Seitenlinie eine Ebene so gelegt wird, dass ihr Durchschnitt auf der einen Grundfläche dieselbe berührt, so berührt auch ihr Durchschnitt auf der andern Grundfläche diese letztere, und die Ebene selbst berührt die Seitenfläche in der Seitenlinie.

63.

Die Seitenfläche eines abgestumpften gleichseitigen Kegels ist gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien der Grundflächen mit der Seitenlinie.

Der abgestumpfte gleichseitige Kegel ist eine abgestumpfte regelmässige Pyramide, deren Grundflächen *bcd*, *fgh* Kreise sind. Da die Seitenfläche der abgestumpften regelmässigen Pyramide (IV. 55.) gleich dem Product der halben Summe der Umfangslinien der Grundflächen mit der Höhe der Endfläche ist, wie gross auch die Anzahl der Seiten oder Randkanten der Grundflächen seyn mag, so gilt dieser Satz auch für den abgestumpften Kegel, wobei sich die Linie, welche bei

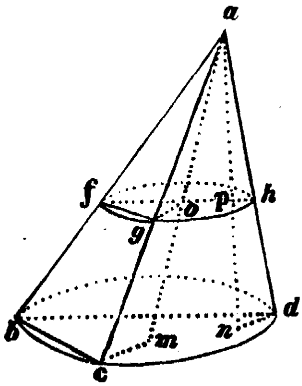


der abgestumpften Pyramide die Höhe der Endfläche ist, beim abgestumpften gleichseitigen Kegel in die Seitenlinie desselben verwandelt. Beim abgestumpften gleichseitigen Kegel sind alle Seitenlinien einander gleich, unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt, und treffen gehörig verlängert in einen Punct zusammen. Die Linie, welche die Mittelpuncte der kreisförmigen Grundflächen verbindet, trifft gehörig verlängert in denselben Punct, und ist auf den Grundflächen senkrecht. Da bei der abgestumpften regelmässigen Pyramide die halbe Summe der Umfangslinien der beiden parallelen Grundflächen, der Umfangslinie des mittlern Querschnitts gleich ist, so gilt derselbe Satz auch für den abgestumpften Kegel. Man theilt also eine Seitenlinie bf in k in die Hälfte, legt durch k eine den Grundflächen parallele Ebene, welche die Seitenfläche des abgestumpften Kegels in einem Kreise durchschneidet. Das Product des Umfangs klm dieses mittlern Querschnitts mit der Seitenlinie bf giebt ebenfalls die Seitenfläche des abgestumpften gleichseitigen Kegels. Bei der Abwickelung desselben auf einer Ebene beschreiben die Puncte des Umfangs der Grundflächen concentrische Kreisbögen, deren Halbmesser die Entfernung von der Spitze a des ganzen Kegels ist, und die an Länge den Umfangslinien der Grundflächen gleich sind. Der Inhalt des zwischen diesen concentrischen Bögen enthaltenen Flächenstücks ist der Seitenfläche des abgestumpften gleichseitigen Kegels gleich.

64.

An ähnlichen Kegeln sind die gleichnamigen Seitenlinien, Durchmesser, Halbmesser, Axen, Höhen u. s. w. den Umfangslinien der Grundflächen proportionirt, die Seitenflächen und Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate derselben.

Wenn ein Kegel von beliebiger Form durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so entsteht ein zweiter dem vorigen ähnlicher Kegel $afgh \sim abcd$. Denn diese beiden Kegel haben zusammenliegende Seitenlinien af in ab, ag in ac, ah in ad u. s. w. Jede durch die gemeinschaftliche Spitze a gelegte Ebene durchschneidet die parallelen Grundflächen fgh, bcd in parallelen graden Linien $fg \parallel bc$, $go \parallel cm$, $hp \parallel dn$ u. s. w., und bildet also in beiden Kegeln ähnliche Dreiecke $afg \sim abc$, $ago \sim acm$, $ahp \sim adn$, $afh \sim abd$ u. s. w. Bezeichnet man also das Verhältniss der gleichnamigen Seiten durch A, so ist wie bei ähnlichen Pyramiden $A = \frac{af}{ag} = \frac{fg}{bc} = \frac{ag}{ac} = \frac{go}{cm} = \frac{ao}{am} = \frac{ap}{an} = \frac{hp}{dn} = \frac{ah}{ad} = \frac{fh}{bd}$ u. s. w.



Und da bei ähnlichen Pyramiden, welche Form auch die Grundfläche haben mag (IV. 56.), die Umfangslinien der Grundflächen sich wie die gleichnamigen Seiten, die Grundflächen, Seitenflächen, Oberflächen sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten verhalten, so gilt derselbe Satz auch für die ähnlichen Kegel, und es ist

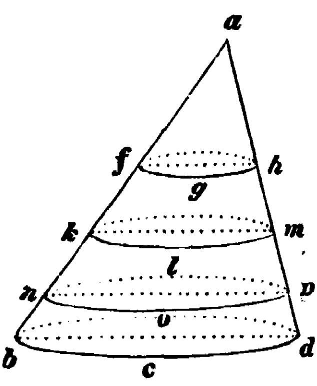
$$\frac{\text{Umfang } fgh}{\text{Umfang } bcd} = A, \quad \frac{\text{Inhalt } fgh}{\text{Inhalt } bcd} = A^2$$

$$\frac{\text{Seitenfläche } afgh}{\text{Seitenfläche } abcd} = A^2, \quad \frac{\text{Oberfläche } afgh}{\text{Oberfläche } abcd} = A^2$$

65.

Die Seitenfläche eines Kegels durch mit der Grundfläche parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.

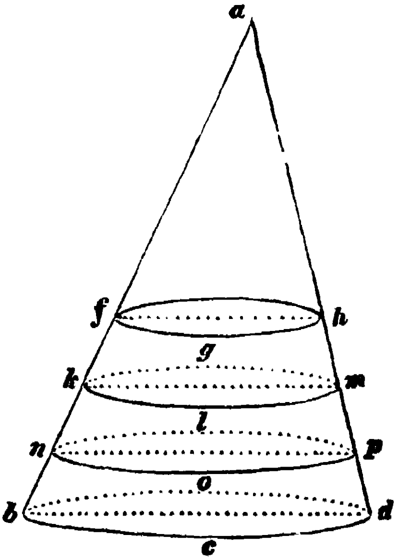
Man verfährt in Gemässheit des vorigen Satzes wie bei der Eintheilung eines Dreiecks durch Parallellinien mit der Grundlinie (III. 69.). Soll also die Seitenfläche n gleiche Theile erhalten, so bestimmt man auf einer beliebigen Seitenlinie ab die Theilungspuncte f, k u. s. w., so dass $af = ab\sqrt{\frac{1}{n}}$, $ak = ab\sqrt{\frac{2}{n}}$, $an = ab\sqrt{\frac{3}{n}}$ u. s. w.



und legt durch diese Theilungspuncte Ebenen, welche der Grundfläche bcd parallel sind.

66.

Die Seitenfläche eines abgestumpften Kegels durch mit den Grundflächen parallele Ebenen in gleiche Theile zu theilen.



Es seyen bf, dh zwei beliebige Seitenlinien, so liegen sie (IV. 62.) in einer Ebene, welche durch die Spitze a des vollen Kegels geht, und welche die parallelen Grundflächen fgh, bcd in parallelen graden Linien fh, bd durchschneidet (IV. 27.). Eine durch einen beliebigen Punct k, welcher in einer Seitenlinie liegt, den Grundflächen parallele gelegte Ebene klm, wird von der Ebene abd in einer graden Linie km geschnitten, welche ebenfalls den Linien fh, bd parallel ist. Also ist (IV. 64.)

$$\frac{\text{Seitenfläche } afgh}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{fh^2}{bd^2}, \quad \frac{\text{Seitenfläche } fghbcd}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{bd^2 - fh^2}{bd^2}$$

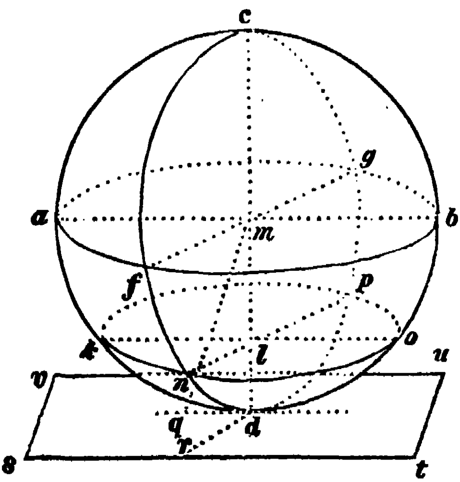
$$\frac{\text{Seitenfläche } aklm}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{km^2}{bd^2}, \quad \frac{\text{Seitenfläche } fghklm}{\text{Seitenfläche } abcd} = \frac{km^2 - fh^2}{bd^2}$$

Also $$\frac{\text{Seitenfläche } fghklm}{\text{Seitenfläche } fghbcd} = \frac{km^2 - fh^2}{bd^2 - fh^2}.$$

Man verfährt also wie bei der Theilung eines Trapeziums (III. 71.). Soll die Anzahl der Theile gleich n seyn, so bestimmt man in dem Trapezium $fbdh$ die Parallellinien km, np u. s. w., so dass $km^2 = fh^2 + \frac{1}{n}(bd^2 - fh^2)$, $np^2 = fh^2 + \frac{2}{n}(bd^2 - fh^2)$ u. s. w. und legt durch die Theilungspuncte der Seitenlinie bf parallele Ebenen mit den Grundflächen.

67.

Die Kugel ist ein runder Körper, an welchem alle Puncte der Oberfläche von einem innern Puncte gleichweit entfernt sind.

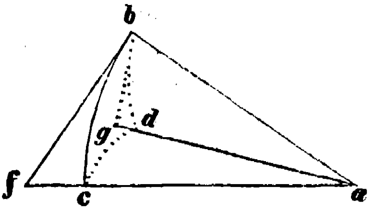


Bei der Kugel kommen also dieselben Benennungen vor, wie beim Kreise. Der innere feste Punct heisst der Mittelpunct oder das Centrum, die überall gleiche Entfernung der Puncte der Oberfläche vom Mittelpunct heisst der Halbmesser oder Radius. Eine grade Linie, welche von einem Puncte der Oberfläche durch den Mittelpunct zum entgegengesetzten Puncte der Oberfläche gezogen wird, heisst der Durchmesser oder Diameter, und ist dem doppelten Halbmesser gleich. Jede durch den Mittelpunct gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, welcher der grösste Kreis der Kugel heisst, weil der Halbmesser und Durchmesser dieses grössten Kreises dem Halbmesser und Durchmesser der Kugel gleich sind. Der Umfang des grössten Kreises ist also auch dem Umfange der Kugel gleich. Jeder grösste Kreis der Kugel theilt dieselbe in zwei einander gleiche Halbkugeln, deren gemeinschaftliche Grundfläche dieser grösste Kreis ist. Jede andre Ebene, welche nicht durch den Mittelpunct geht, schneidet die Kugel ebenfalls in einem Kreise $knop$, welcher ein kleinerer Kreis heisst. Denn wenn man vom Mittelpuncte der Kugel auf diese Ebene eine senkrechte grade Linie ml fället (IV. 20.), so sind (IV. 3. 6.) die Winkel $mlk = mln = mlo = mlp = R$. Da die Halbmesser der Kugel mk, mn, mo, mp einander gleich sind, so sind auch (I. 36.) die rechtwinkligen Dreiecke mlk, mln, mlo, mlp congruent, also $lk = ln = lo = lp$ Halbmesser des Kreises $knop$, dessen Mittelpunct l ist. Da aber (II. 15.) $mk^2 = ml^2 + lk^2$, so ist $lk < mk$, also der Kreis $knop$ kleiner als der grösste Kreis $afbg$. Der kleinere Kreis theilt die Kugel in zwei ungleiche Segmente, welche zusammen die ganze Kugel ausmachen, und diesen Kreis zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben. Dieser kleinere Kreis ist auch die Grundfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Spitze der Mittelpunct der Kugel ist, dessen Seitenlinie dem Halbmesser der Kugel gleich ist, dessen Höhe die vom Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene des kleinern Kreises gefällte senkrechte Linie ml ist. Dieser Kegel macht mit dem kleinern Segment der Kugel zusammen denjenigen Theil der Kugel aus, welcher der Kugelsector heisst. Ein grösster Kreis $afbg$ heisst in Beziehung auf einen kleinern Kreis $knop$, dessen Ebene der seinigen parallel ist, der Aequator, und der kleinere Kreis heisst sein Parallelkreis, und das Stück der Kugel zwischen dem Aequator und einem Parallelkreise, oder zwischen zwei Parallelkreisen heisst eine Zone. Die grössten Kreise $cadb$, $cfdg$, deren Ebenen auf der Ebene des Aequators $afbg$ senkrecht sind, heissen Meridiane. Ihre gemeinschaftliche Kante cd ist ebenfalls (IV. 17.) auf dem Aequator senkrecht, und heisst die Axe, ihre beiden Endpuncte c, d heissen die Pole, und sind von allen Puncten des Aequators gleich weit entfernt, $ca = cf = cb = cg = da = df = db = dg$. Eine Kugel kann also auch durch die Umdrehung eines grössten Halbkreises um seinen Durchmesser als Axe entstehend gedacht werden. Der Kantenwinkel zweier Meridiane oder grössten Kreise $cadb$, $cfdg$ ist (IV. 22.) der Winkel amf, den die Ebenen derselben auf dem Aequator im Mittelpunct der Kugel abschneiden und dessen Maass der entsprechende Bogen $af = bg$ des Aequators ist. Dieser Winkel ist auch gleich dem Winkel qdr, welchen zwei grade Linien dq, dr an einem der Pole d bilden, wenn diese Linien in der Ebene eines jeden dieser grössten Kreise an dieselben berührend gezogen werden. Eine Ebene $stuv$ berührt die Kugel, wenn sie in einem ihrer Puncte d auf den Durchmesser senkrecht gelegt wird. Denn wenn man in derselben irgend einen Punct q annimmt, und nach demselben vom Mittelpunct m eine grade Linie mq zieht, so ist mdq ein rechter Winkel, also $mq > md$. Folglich liegen alle Puncte dieser Ebene ausserhalb der Kugel, und sie hat nur den Punct d mit der Kugel gemein.

68.

Ein sphärisches Dreieck wird auf der Oberfläche einer Kugel durch drei Bögen grösster Kreise gebildet.

Es seyen b, c, d drei Puncte auf der Oberfläche einer Kugel, a der Mittelpunct der Kugel, so schneiden (IV. 67.) die durch abc, abd, acd gelegten Ebenen die Oberfläche der Kugel in grössten Kreisen, deren Bögen bc, bd, cd die Seiten des sphärischen Dreiecks heissen. Die Winkel des sphärischen Dreiecks werden durch die Winkel der Berührungslinien angegeben, welche man an die Seiten des sphärischen Dreiecks zieht.

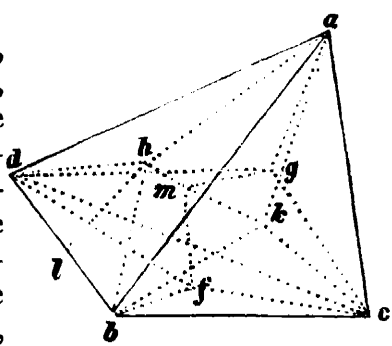


Es sey nämlich in der Ebene abc, bf senkrecht auf ab, also bf eine Berührungslinie des Bogens bc, und in der Ebene abd, bg senkrecht auf ab, also eine Berührungslinie des Bogens bd; so ist der Winkel fbg der Winkel des sphärischen Dreiecks in b. Man kann auch in den Ebenen abc, abd die Bögen bc, bd bis zu dem Aequator verlängern, wovon der Punct b der Pol ist, so ist der Bogen des Aequators das Maass des sphärischen Winkels b. Auch kann man den Mittelpunct a der Kugel als den Eckpunct eines körperlichen Winkels ansehen, welcher durch drei Ebenen abc, abd, acd gebildet wird, deren Kanten die Halbmesser ab, ac, ad sind, deren gradlinige Winkel bac, bad, cad durch die Seiten bc, bd, cd des sphärischen Dreiecks, und deren Kantenwinkel durch die Winkel des sphärischen Dreiecks gemessen werden.

69.

Um eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraëder eine Kugel zu beschreiben.

Das Tetraëder sey $abcd$, die vier Endflächen sind bcd, acd, abd, abc. Man bestimme in den Ebenen derselben die Mittelpuncte (I. 21.) der umschriebenen Kreise f, g, h, k, errichte in diesen Puncten auf den Flächen senkrechte Linien, welche in einen Punct m zusammentreffen,



welcher der Mittelpunct der umschriebenen Kugel ist. Denn man halbire bd in l. Da $bf = fd$, $bl = dl$, $fl = fl$, so ist $\triangle\, blf = dlf$, also $\angle\, blf = dlf = R$. Da $bh = dh$, $bl = dl$, $hl = hl$, so ist $\triangle\, blh = dlh$, also $\angle\, blh = dlh = R$, also ist (IV. 3. 6.) die Kante bld auf der Ebene hlf senkrecht. Also ist die Ebene hlf auf den Ebenen (IV. 13.) cbd, abd senkrecht. Also (IV. 10.)

liegen die in f auf cbd, in h auf abd errichteten Lothe in der Ebene hlf. Also müssen diese Lothe einander in m schneiden. Da $fb = fc = fd$, so sind die $\triangle\, mfb$, mfc, mfd congruent, also $mb = mc = md$. Da $hb = hd = ha$, so sind die $\triangle\, mhb$, mhd, mha congruent, also $mb = md = ma$. Hieraus folgt, dass die in g auf acd, in k auf abc errichteten Lothe ebenfalls in m zusammentreffen müssen.

Fundamente der Geometrie.

Vom

Professor Dr. Magnus Georg Paucker.

Fünfter bis Siebenter Cursus.

Metrik. — Trigonometrie. — Stereometrie.

Mit 255 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Mitau,
Verlag von Friedrich Lucas.

1842.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 31. Mai 1841.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

Fünfter Cursus.

Metrik.

1.

Rechtwinklige Dreiecke zu bilden, deren Seiten rationale Verhältnisse haben.

Man nehme zwei beliebige Zahlen a, b als Grundzahlen an. Das doppelte Product derselben stellt eine Kathete, der Unterschied der Quadrate die andre Kathete, die Summe der Quadrate die Hypotenuse dar. Denn wenn $2a \cdot b = k$, $a^2 - b^2 = l$, $a^2 + b^2 = h$ ist, so ist $4 \cdot a^2 \cdot b^2 = k^2$, $a^4 - 2a^2 \cdot b^2 + b^4 = l^2$, $a^4 + 2a^2 \cdot b^2 + b^4 = h^2$, also $k^2 + l^2 = h^2$.

Z. B. die Grundzahlen seyen 5 und 6, so ist $k = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$, $l = 36 - 25 = 11$, $h = 36 + 25 = 61$. Hier ist $60^2 = 3600$, $11^2 = 121$, $61^2 = 3721$. Hiernach ist folgende Tafel berechnet worden:

Grundzahlen	kl. Kath.	gr. Kath.	Hypot.	Grundzahlen	kl. Kath.	gr. Kath.	Hypot.
2, 1	3	4	5	9, 2	36	77	85
3, 2	5	12	13	9, 4	65	72	97
4, 1	8	15	17	9, 8	17	144	145
4, 3	7	24	25	10, 1	20	99	101
5, 2	20	21	29	10, 3	61	91	109
5, 4	9	40	41	10, 7	51	140	149
6, 1	12	35	37	10, 9	19	180	181
6, 5	11	60	61	11, 2	44	117	125
7, 2	28	45	53	11, 4	88	105	137
7, 4	33	56	65	11, 6	85	132	157
7, 6	13	84	85	11, 8	57	176	185
8, 1	16	63	65	11, 10	21	220	221
8, 3	48	55	73	12, 1	24	143	145
8, 5	39	80	89	12, 5	119	120	169
8, 7	15	112	113	12, 7	95	168	193
				12, 11	23	264	265

2.

Dreiecke zu bilden, deren Seiten und Höhen rationale Verhältnisse haben.

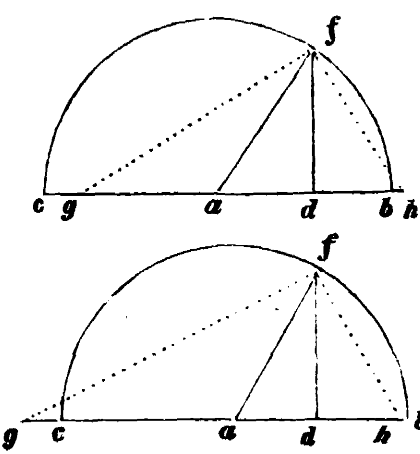
Man bilde nach der vorigen Aufgabe zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten rationale Verhältnisse haben, multiplicire in beiden Dreiecken die eine Kathete mit solchen Zahlen, wodurch sie einander gleich werden, und verbinde dann die andre Kathete durch Addition und Subtraction.

Z. B. Man nimmt aus der vorigen Tafel die beiden ersten Dreiecke 3, 4, 5 und 5, 12, 13

	3, 4, 5	3, 4, 5	4, 3, 5	4, 3, 5
	5, 12, 13	12, 5, 13	5, 12, 13	12, 5, 13
	15, 20, 25	12, 16, 20	20, 15, 25	12, 9, 15
	15, 36, 39	12, 5, 13	20, 48, 52	12, 5, 13
	Höhe 15	Höhe 12	Höhe 20	Höhe 12
Seiten	25, 39	20, 13	25, 52	15, 13
Grundlinie	16 oder 56	11 oder 21	33 oder 63	4 oder 14

Wenn die Seiten und eine Höhe rational sind, so sind auch (III. 8.) die andern beiden Höhen rational. Das Dreieck, dessen Höhe 12, Grundlinie 14, Seiten 13, 15 sind, ist dadurch bemerkenswerth, dass es schon in den ältesten Zeiten von den Indern, Griechen, Arabern u. s. w. als Beispiel angewendet worden ist (Chasles Geschichte der Geometrie, Leipzig 1839. 484).

3.



Für zwei grade Linien, welche ein irrationales Verhältniss (II. 50.) zu einander haben, deren Quadrate aber in rationalem Verhältnisse stehen, genäherte Zahlverhältnisse zu finden; oder die Quadratwurzel geometrisch auszuziehen.

Man nehme alle Linien als durch eine gemeinschaftliche Linieneinheit gemessen an, so dass alle Linien als Zahlen oder Verhältnisse vorgestellt werden. Die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, sey A. Man beschreibe einen Halbkreis, dessen Halbmesser die gesuchte Quadratwurzel sey, also $ab^2 = ac^2 = af^2 = A$. Man nehme als ersten genäherten Werth $ad = B$, so dass B^2 kleiner als A, aber grösser als $\frac{1}{4}A$ sey, also $ad > bd$. Man errichte in d auf ab eine senkrechte Linie df bis an den Halbkreis, so ist $df^2 = af^2 - ad^2 = A - B^2 = R$. Da A und B gegeben sind, so ist auch $df^2 = R$ gegeben. Nimmt man nun auf ac einen Punct g an, zieht gf, und darauf fh senkrecht, so ist (III. 56.) $dg \cdot dh = df^2 = R$, also $dh = \frac{R}{dg}$, und $ah = ad + dh = B + \frac{R}{dg}$. Dieser Werth von ah ist ein genäherter Werth der $\sqrt{A}$. Man kann damit anfangen $ag = B$ zu setzen, dann ist $dg = 2B$. Den hieraus gefundenen Werth von ah nimmt man als neuen Werth von ag an, findet hieraus einen folgenden Werth von ah u. s. w. Auf diese Weise nähert man sich der gesuchten $\sqrt{A}$ immer mehr. Denn da $cd \cdot db = df^2$, und $gd \cdot dh = df^2$, so ist $cd \cdot db = gd \cdot dh$, also $\frac{gd}{cd} = \frac{db}{dh}$, also $\frac{cg}{cd} = \frac{bh}{dh}$, also $\frac{bh}{cg} = \frac{dh}{cd} = \frac{bd}{gd}$. Da aber nach der Voraussetzung $bd < ad$, so ist um so mehr $bd < gd$, also $bh < cg$. Folglich ah näher als ag dem Werth von $ab = \sqrt{A}$. Wenn $ag < \sqrt{A}$, so ist $ah > \sqrt{A}$, und umgekehrt. Die gefundenen Quadratwurzeln sind also abwechselnd zu gross und zu klein.

1. *Beispiel.* Das Verhältniss der Diagonallinie eines Quadrats zur Seite oder $\sqrt{2}$ zu finden (II. 44.). Hier ist $A = 2$; man setze $B = 1$, so ist $R = 1$. Setzt man $dg = 2B = 2$, so ist $ah = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Setzt man $ag = \frac{3}{2}$, so ist $ah = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Setzt man $ag = \frac{7}{5}$, so ist $ah = 1\frac{5}{12} = \frac{17}{12}$. Setzt man $ag = \frac{17}{12}$, so ist $ah = 1\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$ u. s. w. Das Schema ist $\sqrt{2} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}$ (II. 50.).

Jeder Zähler und Nenner wird also gefunden, indem man den nächstvorhergehenden mit 2 multiplicirt, und den vorvorhergehenden hinzu addirt. Dieses lässt sich allgemein beweisen. Es sey $ag = \frac{C}{D}$, $ad = B$, so ist $dg = B + \frac{C}{D} = \frac{BD + C}{D}$, $dh = \frac{RD}{BD + C}$, $ah = B + \frac{RD}{BD + C} = \frac{B^2 . D + RD + BC}{BD + C} = \frac{E}{F}$.

Da $A = B^2 + R$, so ist $E = AD + BC$, $F = BD + C$.

Wenn nun $ag = \frac{E}{F}$, und hieraus $ah = \frac{G}{H}$, so ist ebenso $G = AF + BE$, $H = BF + E$,
also $G = ABD + AC + BE = B\,(E - BC) + AC + BE$,
also $G = 2BE + RC$,
$H = BF + E = BF + AD + BC = BF + AD + B\,(F - BD)$,
also $H = 2BF + R . D$.

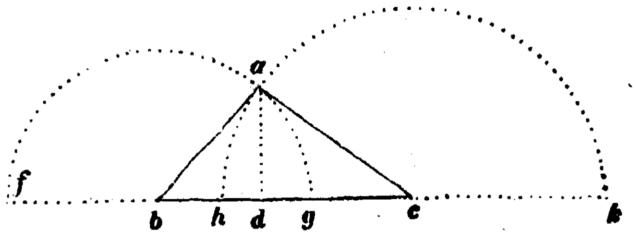
2. *Beispiel.* In einem gleichseitigen Dreieck das Verhältniss der Höhe zur halben Grundlinie, oder $\sqrt{3}$ zu finden (II. 47.). Hier ist $A = 3$; man setze $B = 1$, so ist $R = 2$. Setzt man zuerst $dg = 2B = 2$, so ist $ah = 2 = \frac{4}{2}$. Setzt man $ag = \frac{4}{2}$, so ist $ah = \frac{10}{6}$. Setzt man $ag = \frac{10}{6}$, so ist $ah = \frac{28}{16}$, also $\sqrt{3} = \frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{6}, \frac{28}{16}, \frac{76}{44}, \frac{208}{120}, \frac{568}{328}, \frac{1552}{896}$, oder $\sqrt{3} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}$.

3. *Beispiel.* Im Quadrat (III. 61.) das Verhältniss der halbirenden Diagonallinie zur halben Seite, oder $\sqrt{5}$ zu finden. Hier ist $A = 5$, $B = 2$, $R = 1$. Setzt man zuerst $dg = 2B = 4$, so ist $ah = \frac{9}{4}$. Setzt man $ag = \frac{9}{4}$, so ist $ah = \frac{38}{17}$ u. s. w. $\sqrt{5} = \frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}$.

4.

Aus den Seiten eines Dreiecks einen Ausdruck für den Flächeninhalt desselben zu finden (III. 8.).

Erste Auflösung. Das Dreieck sey abc. Man beschreibe aus b, c mit den Halbmessern ba, ac Halbkreise, welche die verlängerte Grundlinie bc in f, g, und h, k schneiden, so ist, wenn man die Höhe ad fällt (III. 56.)

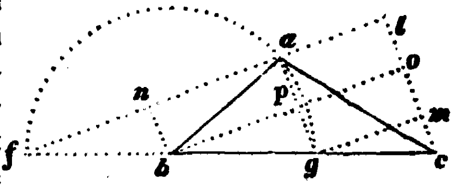


$ad^2 = fd \cdot dg$ und $ad^2 = hd \cdot dk$, also $fd \cdot dg = hd \cdot dk$, also $\frac{fd}{dk} = \frac{hd}{dg}$, also $\frac{fd}{fk} = \frac{hd}{hg}$, also $\frac{fd}{hd} = \frac{fk}{hg}$, also $\frac{fd}{fh} = \frac{fk}{fk - hg}$, also $fd = \frac{fh \cdot fk}{fk - hg}$.

Da $fd \cdot dg = hd \cdot dk$, so ist auch $\frac{dg}{hd} = \frac{dk}{fd}$, also $\frac{dg}{hg} = \frac{dk}{fk}$, also $\frac{dg}{dk} = \frac{hg}{fk}$, also $\frac{dg}{gk} = \frac{hg}{fk - hg}$, also $dg = \frac{hg \cdot gk}{fk - hg}$. Setzt man nun $ab + bc + ca = 2S$, so ist $fh = ab + bc - ca = 2S - 2ca$, $fk = ab + bc + ca = 2S$, $hg = ab + ca - bc = 2S - 2bc$, $gk = ca + bc - ab = 2S - 2ab$, $fk - hg = 2bc$. Also $fd = 2 \cdot \frac{S(S - ca)}{bc}$, $dg = 2 \cdot \frac{(S - ab)(S - bc)}{bc}$. Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks durch F, so ist $F = \frac{1}{2} bc \cdot ad$, $ad^2 = fd \cdot dg$, also

$$F = \sqrt{S(S - ab)(S - bc)(S - ca)}.$$

Zweite Auflösung. Man beschreibe aus b mit dem Halbmesser ba einen Halbkreis, welcher die Seite bc in f, g schneidet, so ist $\angle fag = R$. Man ziehe



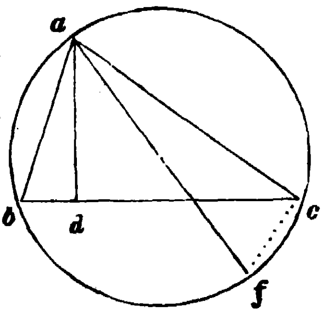
$bo \parallel gm \parallel fa$, $bn \parallel cl \parallel ga$, so ist $\triangle abc = abgo = boln = bo \cdot ap$. Aber $\frac{ap}{bp} = \frac{co}{bo}$, also $bo \cdot ap = co \cdot bp$, also $bo^2 \cdot ap^2 = bo \cdot bp \cdot co \cdot ap$, also $\triangle abc = F = \sqrt{bo \cdot bp} \cdot \sqrt{co \cdot ap}$.

$fc^2 - ca^2 = fl^2 - al^2$, $ca^2 - cg^2 = cl^2 - cm^2$. Aber (III. 7.) $fc^2 - ca^2 = (fc + ca)(fc - ca) = 4S(S - ca)$

$ca^2 - cg^2 = (ca + cg)(ca - cg) = 4(S - ab)(S - bc)$,
$fl^2 - al^2 = (fl + al)(fl - al) = 4bo \cdot bp$,
$cl^2 - cm^2 = (cl + cm)(cl - cm) = 4 \cdot co \cdot ap$,
also $bo \cdot bp = S(S - ca)$, $co \cdot ap = (S - ab)(S - bc)$,
also $F = \sqrt{S(S - ca)} \cdot \sqrt{(S - ab)(S - bc)}$.

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 56$, $ca = 39$, so ist $2S = 120$, $S = 60$, $S - ca = 21$, $S - ab = 35$, $S - bc = 4$, $F^2 = 60 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 4 = 4^2 \cdot 7^2 \cdot 15^2$, also $F = 4 \cdot 7 \cdot 15 = 420$.

5.



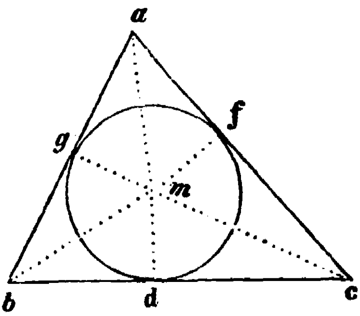
An einem Dreieck ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises gleich dem Product der drei Seiten, dividirt durch den doppelten Inhalt des Dreiecks.

Da $\angle adb = acf = R$, $\angle abd = afc$, so ist $\triangle adb \sim acf$, also $\frac{ad}{ab} = \frac{ac}{af}$, also $af = D = \frac{ab \cdot ca}{ad}$

oder $D = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{bc \cdot ad} = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{2F}$.

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 63$, $ca = 52$, so ist $S = 70$, $S - ca = 18$, $S - ab = 45$, $S - bc = 7$, $F^2 = 70 \cdot 18 \cdot 45 \cdot 7 = 7^2 \cdot 9^2 \cdot 10^2$, $F = 630$, also $D = \frac{25 \cdot 63 \cdot 52}{2 \cdot 630} = 65$.

6.



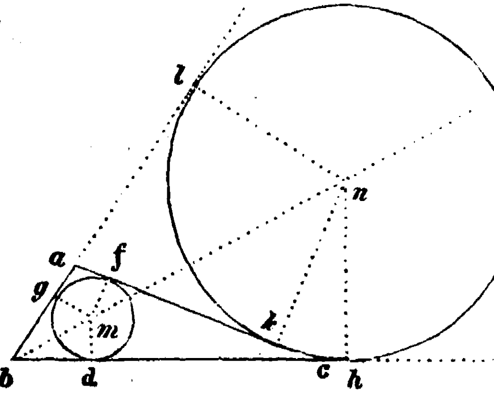
An einem Dreieck ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gleich dem Inhalt des Dreiecks, dividirt durch den halben Umfang desselben.

$\triangle abm = \frac{1}{2}ab \cdot mg = \frac{1}{2}ab \cdot r$, $\triangle bcm = \frac{1}{2}bc \cdot md = \frac{1}{2}bc \cdot r$, $\triangle cam = \frac{1}{2}ca \cdot mf = \frac{1}{2}ca \cdot r$, $\triangle abm + bcm + cam = abc = F$, $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ca = S$, also $F = S \cdot r$, oder $r = \frac{F}{S}$.

Beispiel. Es sey $ab = 16$, $bc = 60$, $ca = 52$, so ist $S = 64$, $S - ab = 48$, $S - bc = 4$, $S - ca = 12$, also $F^2 = 64 \cdot 48 \cdot 48$, $F = 8 \cdot 48 = 384$, $r = \frac{384}{64} = 6$.

7.

An einem Dreiecke sind die Abstände der Berührungspuncte des äussern eingeschriebenen Kreises gleich dem halben Umfange des Dreiecks, und die Abstände der Berührungspuncte des innern eingeschriebenen Kreises gleich dem halben Umfange weniger der gegenüberliegenden Seite.

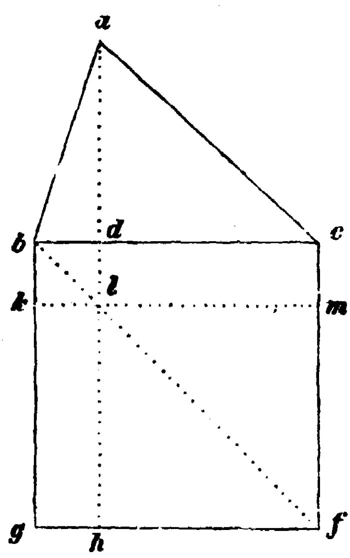


Wenn der äussere eingeschriebene Kreis n die Seiten bc, ca, ab in h, k, l berührt, so ist $al = ak$, $bl = bh$, $ch = ck$, $bl = ab + ak$, $bh = bc + ck$, also $2bl = 2bh = ab + bc + ak + ck = ab + bc + ca = 2S$, also $bl = bh = S$, $ch = ck = bh - bc = S - bc$, $al = ak = bl - ab = S - ab$.

Wenn der innere eingeschriebene Kreis m die Seiten bc, ca, ab in d, f, g berührt, so ist $af = ag$, $bg = bd$, $cd = cf$, $ag = ab - bd$, $af = ac - cd$, also $2af = 2ag = ab + ca - bd - cd = ab + ca - bc = ab + bc + ca - 2bc = 2S - 2bc$, also $af = ag = S - bc$. Ebenso $bg = bd = S - ca$, $cd = cf = S - ab$.

8.

Wenn man von der Spitze eines Dreiecks eine senkrechte Diagonallinie auf die Grundlinie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Nebenseiten des spitzen Winkels grösser, als das Quadrat der Gegenseite, um das doppelte Product oder Rechteck der Grundlinie mit dem Abschnitt, welcher dem Winkel anliegt.

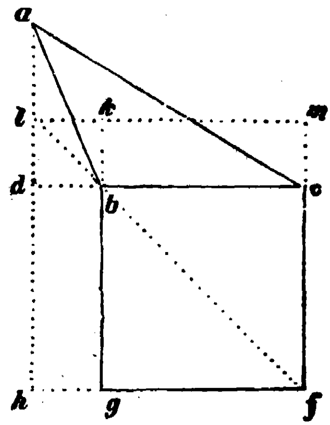


$ac^2 = ad^2 + cd^2$, $ab^2 = ad^2 + bd^2$, also $ac^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2$, also $bc^2 + ca^2$

$-\,ab^2 = bc^2 + cd^2 - bd^2 = gfmk + cdlm + mlhf$ $= 2gfmk = 2bc \cdot cd$ und $bc^2 + ab^2 - ca^2 = bc^2$ $+ bd^2 - cd^2 = bcmk + klhg + bdlk = 2bcmk$ $= 2bc \cdot bd.$

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 56$, $ca = 39$, so ist $ab^2 = 625$, $bc^2 = 3136$, $ca^2 = 1521$, also $bc^2 + ca^2 - ab^2 = 4032$, $ab^2 + bc^2 - ca^2 = 2240$, also $2bc \cdot cd = 4032$, $2bc \cdot bd = 2240$, hieraus $cd = 36$, $bd = 20$, $cd^2 = 1296$, $bd^2 = 400$, also $ad^2 = 1521 - 1296 = 625 - 400 = 225$. Aus beiden folgt $ad = 15$, $F = 420$.

9.



Wenn man von der Spitze eines Dreiecks eine senkrechte Diagonallinie auf die verlängerte Grundlinie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Nebenseiten des stumpfen Winkels kleiner, als das Quadrat der Gegenseite, um das doppelte Product oder Rechteck der Grundlinie mit dem Abschnitt, welcher dem Winkel anliegt.

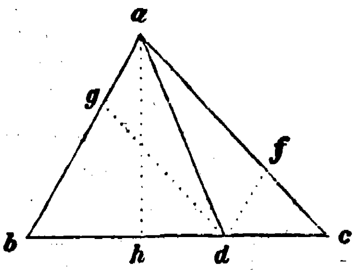
$$ca^2 = ad^2 + cd^2,\ ab^2 = ad^2 + bd^2,$$
$$ca^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2,$$

$ca^2 - ab^2 - bc^2 = cd^2 - bd^2 - bc^2 = bcmk$ $+ bdhg = 2bcmk = 2bc \cdot bd.$

Beispiel. Es sey $ca = 56$, $ab = 25$, $bc = 39$, also $ca^2 = 3136$, $ab^2 = 625$, $bc^2 = 1521$, also $ca^2 - ab^2 - bc^2 = 3136 - 625 - 1521 = 990$, also $2bc \cdot bd = 990$, also $bd = 12\frac{9}{13}$, $cd = 51\frac{9}{13}$, $bd^2 = 161\frac{16}{169}$, $cd^2 = 2672\frac{16}{169}$, $ad^2 = 3136 - 2672\frac{16}{169}$ $= 625 - 161\frac{16}{169} = 463\frac{153}{169}$, also $ad = 21\frac{7}{13}$ $F = 420$.

Anmerkung. Die Figur dieses Satzes ist der Figur des vorigen Satzes *correlativ*. Der Punct d liegt in der vorigen Figur in der Richtung von b nach c, in dieser Figur in der Richtung von c nach b, also in der entgegengesetzten Richtung. Man erhält also die Gleichung dieses Satzes, wenn man in der Gleichung des vorigen Satzes bd negativ nimmt. Die Gleichung des vorigen Satzes war $bc^2 + ab^2 - ca^2 = 2bc \cdot bd$. Nimmt man bd negativ, so erhält man $bc^2 + ab^2 - ca^2 = -2bc \cdot bd$, und hieraus die Gleichung dieses Satzes: $ca^2 - ab^2 - bc^2 = 2bc \cdot bd$.

10.



Wenn die Grundlinie eines Dreiecks beliebig innerhalb getheilt wird, so ist das Quadrat der Diagonallinie, wenn man Parallellinien mit den Seiten aus dem Theilungspunct zieht, gleich der Summe der Producte jeder Seite mit ihrem Abschnitt, weniger dem Product der Abschnitte der Grundlinie.

Es sey $df \parallel ab$, $dg \parallel ac$, ah senkrecht auf bc, so ist (V. 8. 9.) in den Dreiecken adb, adc, $ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd \cdot dh$, $ad^2 = ac^2 - cd^2 - 2cd \cdot dh$. Man eliminirt das Product, in welchem dh vorkommt, indem man die erste Gleichung mit cd, die andere mit bd multiplicirt und dann addirt:

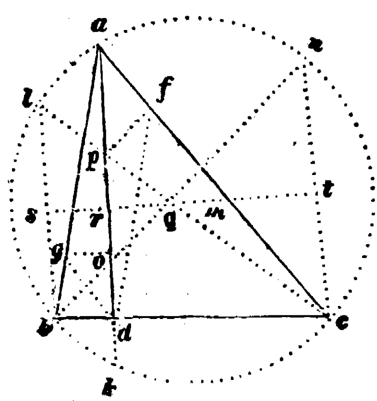
$ad^2 \cdot cd = ab^2 \cdot cd - bd^2 \cdot cd + 2bd \cdot cd \cdot dh$,
$ad^2 \cdot bd = ac^2 \cdot bd - cd^2 \cdot bd - 2cd \cdot bd \cdot dh$,
also $ad^2 \cdot bc = ab^2 \cdot cd + ac^2 \cdot bd - bd \cdot cd \cdot bc$,

also $ad^2 = ab^2 \cdot \dfrac{cd}{bc} + ac^2 \cdot \dfrac{bd}{bc} - bd \cdot cd$,

aber $\dfrac{cd}{bc} = \dfrac{ag}{ab}$, $\dfrac{bd}{bc} = \dfrac{af}{ac}$,

also $ad^2 = ab \cdot ag + ac \cdot af - bd \cdot cd$.

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $ac = 39$, $bc = 56$, $bd = 21$, $cd = 35$, so ist $af = ac \cdot \dfrac{bd}{bc} = \dfrac{39 \cdot 21}{56} = 14\frac{5}{8}$, $ag = ab \cdot \dfrac{cd}{bc} = \dfrac{25 \cdot 35}{56} = 15\frac{5}{8}$, $ab \cdot ag = 390\frac{5}{8}$, $ac \cdot af = 570\frac{3}{8}$, $bd \cdot cd = 735$, also $ad^2 = 226$, $ad = 15{,}0333$.



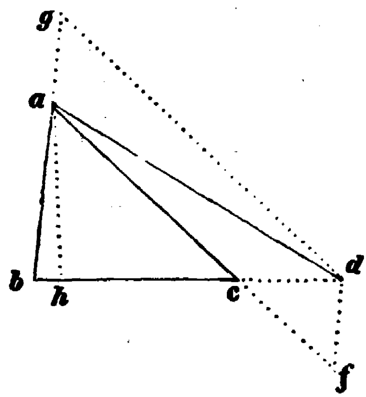
Andrer Beweis. Man beschreibe um das $\triangle\, abc$ einen Kreis, welcher von der Diagonallinie ad in k geschnitten wird. Man ziehe die Sehnen $bl \parallel cn \parallel ad$, verbinde bn, cl, welche die ad in o, p schneiden, fälle vom Mittelpunct m auf diese parallelen Sehnen die Senkrechte $srmt$, so ist $ar = kr$, $ls = bs$, $nt = ct$. Da (III. 38.) $\angle\, blc$

$= bnc$, $\angle bnc = lbn$, so ist, wenn cl, bn einander in q schneiden $\angle blq = lbq$, also sind die Dreiecke qbl, qop, qnc gleichschenklig, also geht $srmt$ durch q, also $pr = or$.
Also $ap = ko = ak - ao = ad + dk - ao$,
also $ao + ap - dk = ad$,
also $ad^2 = ad \cdot ao + ad \cdot ap - ad \cdot dk$.
Aber $\angle abn = acn = cad = adg$, also (III. 42.) $bdog$ ein Kreisviereck, also (III. 52.) $ad \cdot ao = ab \cdot ag$.

Ferner $\angle acl = abl = bak = adf$, also (III. 42.) $cdpf$ ein Kreisviereck, also (III. 52.) $ad \cdot ap = ac \cdot af$.
Auch ist (III. 54.) $ad \cdot dk = bd \cdot cd$.
Also $ad^2 = ab \cdot ag + ac \cdot af - bd \cdot cd$.

11.

Wenn die Grundlinie eines Dreiecks beliebig ausserhalb getheilt wird, so ist das Quadrat der Diagonallinie, wenn man von dem Theilungspunct Parallellinien mit den Seiten zieht, gleich dem Unterschied der Producte jeder Seite mit ihrem Abschnitte, nebst dem Product der Abschnitte der Grundlinie.

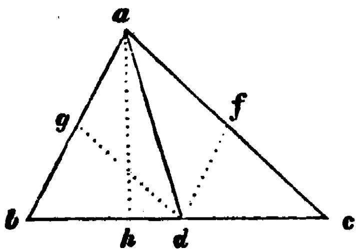


In den Dreiecken adb, adc ist
$ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd \cdot dh$,
$ad^2 = ac^2 - cd^2 + 2cd \cdot dh$,
also $ad^2 \cdot cd = ab^2 \cdot cd - bd^2 \cdot cd + 2bd \cdot cd \cdot dh$,
$ad^2 \cdot bd = ac^2 \cdot bd - cd^2 \cdot bd + 2bd \cdot cd \cdot dh$,
also $ad^2 \cdot bc = ac^2 \cdot bd - ab^2 \cdot cd + bd \cdot cd \cdot bc$,
also $ad^2 = ac^2 \cdot \frac{bd}{bc} - ab^2 \cdot \frac{cd}{bc} + bd \cdot cd$,
aber $\frac{bd}{bc} = \frac{af}{ac}$, $\frac{cd}{bc} = \frac{ag}{ab}$,
also $ad^2 = ac \cdot af - ab \cdot ag + bd \cdot cd$.

Anmerkung. Die Figur dieses Satzes ist der Figur des vorigen Satzes correlativ. Der Punct d liegt in der vorigen Figur in der Richtung von c nach b, in dieser Figur in der entgegengesetzten Richtung von b nach c; der Punct g in der vorigen von a nach b, in dieser von b nach a. Man erhält also die Gleichung dieses Satzes aus der Gleichung des vorigen, indem man den positiven Abschnitt ag negativ, und den negativen Abschnitt cd positiv nimmt.

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $ac = 39$, $bc = 56$, $cd = 35$, $bd = 91$, so ist $af = \frac{ac \cdot bd}{bc} = 63\frac{3}{8}$, $ag = \frac{ab \cdot cd}{bc} = 15\frac{5}{8}$, $ac \cdot af = 2471\frac{5}{8}$, $ab \cdot ag = 390\frac{5}{8}$, $bd \cdot cd = 3185$, $ad^2 = 5266$, $ad = 72{,}5672$.

12.



Das Quadrat der Diagonallinie, welche die Grundlinie eines Dreiecks in die Hälfte theilt, ist gleich der halben Summe der Quadrate der Seiten, weniger dem Quadrat der halben Grundlinie.

Da $bd = \frac{1}{2} bc$, so ist auch $ag = \frac{1}{2} ab$, $af = \frac{1}{2} ac$, also (V. 10.) $ad^2 = \frac{1}{2} ab^2 + \frac{1}{2} ac^2 - bd^2$.

Oder (V. 8. 9.) $ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd \cdot dh$,

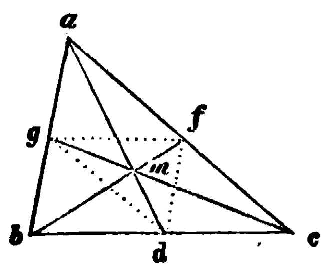
$$ad^2 = ac^2 - cd^2 - 2cd \cdot dh,$$

$bd = cd$, also $2ad^2 = ab^2 + ac^2 - 2bd^2$,

$$ad^2 = \tfrac{1}{2} ab^2 + \tfrac{1}{2} ac^2 - bd^2.$$

Beispiel. Es sey $ab = 60$, $bc = 56$, $ac = 52$, also $bd = cd = 28$, so ist $\frac{1}{2} ab^2 = 1800$, $\frac{1}{2} ac^2 = 1352$, $bd^2 = 784$, also $ad^2 = 2368$, $ad = 48{,}66209$.

13.

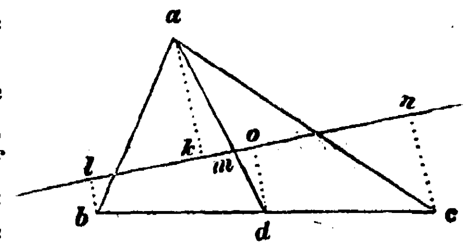


Der Abstand des Schwerpuncts eines Dreiecks von der Ecke ist $\frac{2}{3}$ der Diagonallinie.

Wenn man bc, ca, ab in d, f, g halbirt, so ist $df \,\frown\, ab$, $fg \,\frown\, bc$, $gd \,\frown\, ca$. Wenn ad, bf einander in m schneiden, so ist $\triangle\, dmf \sim amb$, also $\frac{am}{dm} = \frac{ab}{df}$, $\triangle\, fdc \sim abc$, also $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{cd} = \frac{2}{1}$, also $am = 2dm$, also $am = \frac{2}{3} ad$. Wenn ad, cg einander in n schneiden, so ist $\triangle\, dng \sim anc$, also $\frac{an}{dn} = \frac{ac}{dg}$; $\triangle\, gbd \sim abc$, also $\frac{ac}{dg} = \frac{bc}{bd} = \frac{2}{1}$, also

$an = 2dn$, also $an = \frac{2}{3}ad$, also $an = am$, d. h. die Durchschnittspuncte von ad, bf und ad, cg fallen zusammen. Also durchschneiden ad, bf, cg einander in einem Punct, welcher der *Schwerpunct* heisst, und es ist $am = \frac{2}{3}ad$, $bm = \frac{2}{3}bf$, $cm = \frac{2}{3}cg$.

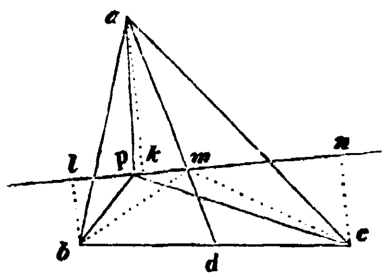
14.



Wenn in der Ebene eines Dreiecks durch den Schwerpunct eine beliebige grade Linie gezogen wird, und von den Ecken auf dieselbe senkrechte Linien gefällt werden, so ist die Summe der beiden kleinern Ordinaten oder Abscissen gleich der grössern.

Es sey $bd = cd$, $am = \frac{2}{3}ad$, also m der Schwerpunct. Man fälle die senkrechten Linien oder Ordinaten ak, bl, cn, do, so ist $lo = on$, also $bl + cn = 2do$, $mn - ml = 2mo$. Aber $am = 2dm$, also $ak = 2do$, $mk = 2mo$, also $bl + cn = ak$ für die Ordinaten, $mn - ml = mk$, oder $ml + mk = mn$, für die Abscissen, in Beziehung auf den Schwerpunct genommen.

15.



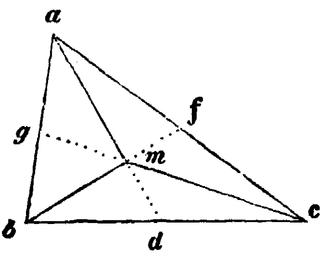
In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Abstände des Schwerpuncts von den Ecken ein Minimum, d. h. kleiner als die Summe der Quadrate der Abstände jedes andern in dieser Ebene befindlichen Puncts von den Ecken.

Es sey m der Schwerpunct, p ein beliebiger Punct in der Ebene des $\triangle\, abc$; die grade Linie mp sey gezogen, und darauf die Senkrechten ak, bl, cn gefället, so ist (V. 8. 9.)

$$pa^2 = ma^2 + mp^2 - 2mp \cdot mk$$
$$pb^2 = mb^2 + mp^2 - 2mp \cdot ml$$
$$pc^2 = mc^2 + mp^2 + 2mp \cdot mn.$$

Da aber (V. 14.) $mk + ml - mn = o$, so ist $pa^2 + pb^2 + pc^2 = ma^2 + mb^2 + mc^2 + 3mp^2$.

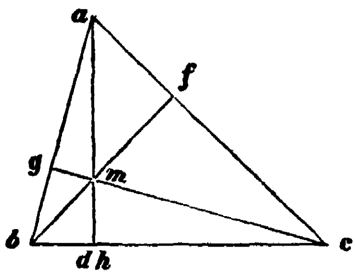
16.



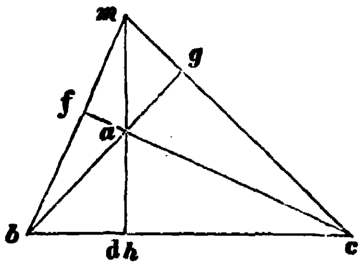
In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Abstände des Schwerpuncts von den Ecken der dritte Theil von der Summe der Quadrate der Seiten.

(V. 12.) $ad^2 = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ca^2 - \frac{1}{4}bc^2$, aber $ma = \frac{2}{3}ad$, also $ma^2 = \frac{2}{9}ab^2 + \frac{2}{9}ca^2 - \frac{1}{9}bc^2$; aus gleichem Grunde $mb^2 = \frac{2}{9}ab^2 + \frac{2}{9}bc^2 - \frac{1}{9}ca^2$, $mc^2 = \frac{2}{9}bc^2 + \frac{2}{9}ca^2 - \frac{1}{9}ab^2$, also $ma^2 + mb^2 + mc^2 = \frac{1}{3}ab^2 + \frac{1}{3}bc^2 + \frac{1}{3}ca^2$.

17.



Die von den Ecken eines Dreiecks auf die Gegenseiten senkrecht gezogenen Diagonallinien durchschneiden einander in einem Punct, und die Abschnitte an jeder Ecke verhalten sich umgekehrt wie die anliegenden Seiten.



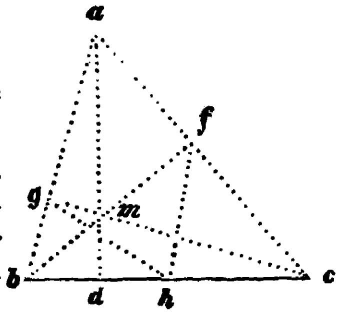
Es seyen auf die Seiten bc, ca, ab die Diagonallinien ad, bf, cg senkrecht gefällt, so ist $\triangle\, baf \sim cag$, $\triangle\, abd \sim cbg$, $\triangle\, bcf \sim acd$, also $\frac{af}{ag} = \frac{ab}{ca}$, $\frac{bg}{bd} = \frac{bc}{ab}$, $\frac{cd}{cf} = \frac{ca}{bc}$.

Wenn bf, cg einander in m schneiden, so ist wegen der rechten Winkel f, g (III. 42.) $afmg$ ein Kreisviereck, also $\angle\, gam = gfm$. Wegen der rechten Winkel f, g ist auch $bgfc$ ein Kreisviereck, also $\angle\, gfb = gcb$. Also ist auch $\angle\, gam = gcb$. Wenn also am die bc in h schneidet, so ist $\angle\, bah = gcb$; aber auch $\angle\, abh = cbg$, also $\angle\, h = g = R$. Also ist ah auf bc senkrecht. Aber auch ad auf bc senkrecht. Also fallen die Linien ah, ad zusammen, d. h. die senkrechte Linie ad geht durch m.

Zweiter Beweis. Wenn bf, cg einander in m schneiden, so ist $\frac{mf}{cf} = \frac{mg}{bg} = \frac{af}{bf}$, also $mf = \frac{af \cdot cf}{bf}$. Wenn bf, ad einander in n schneiden, so ist $\frac{nf}{af} = \frac{nd}{bd} = \frac{cf}{bf}$, also

$nf = \frac{af \cdot cf}{bf}$, also $nf = mf$, d. h. die Puncte m, n fallen zusammen, also ad, bf, cg schneiden einander in m.

18.

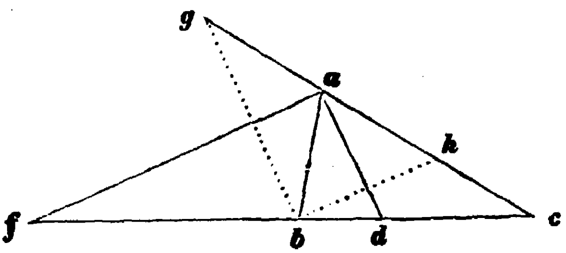


Im freien Felde auf eine gegebene grade Linie eine senkrechte grade Linie zu ziehen (III. 37.).

Die gegebene grade Linie sey bc. Man nehme auf derselben zwei beliebige Stücke $hb = hc$ von beliebiger Länge. Man ziehe aus h grade Linien hf, hg nach beliebiger Richtung, und mache $hf = hg = hb = hc$. Man verbinde bg, cg, bf, cf, so sind (III. 35.) $\angle\, bgc = bfc = R$. Verlängert man also bg, cf bis zu ihrem Durchschnitt in a, und verbindet man diesen Punct mit dem Puncte m, in welchem bf, cg einander schneiden, so ist (V. 17.) die grade Linie amd auf bc senkrecht.

19.

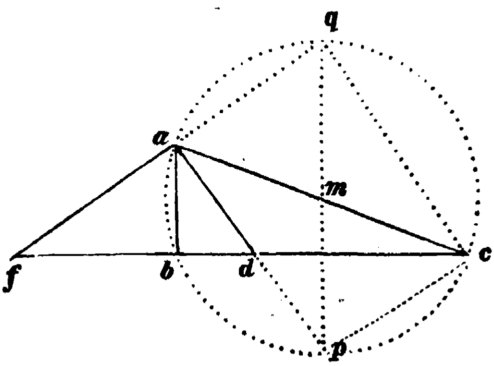
Die beiden Diagonallinien, welche den innern und äussern Winkel eines Dreiecks in die Hälfte theilen, schneiden die Grundlinie im Verhältniss der Nebenseiten.



Im Dreieck abc sey der innere Winkel bac durch ad, der äussere Winkel bag durch af in die Hälfte getheilt, so ist $\angle\, daf = R$. Man ziehe $bg \frown ad$, $bh \frown af$, so ist auch $\angle\, gbh = R$, also (III. 36.) $ag = ah = ab$, also $\frac{bd}{cd} = \frac{ag}{ac} = \frac{ab}{ac}$, und $\frac{bf}{cf} = \frac{ah}{ac} = \frac{ab}{ac}$.

20.

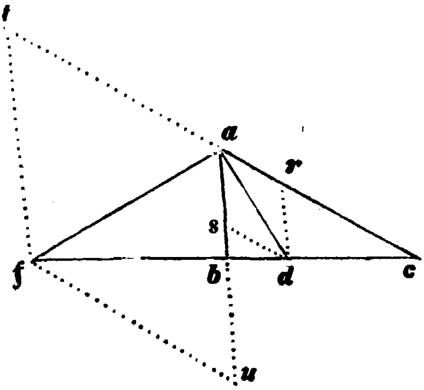
Das Quadrat der Diagonallinie, welche den Winkel eines Dreiecks in die Hälfte theilt, ist gleich dem Unterschied zwischen dem Rechteck der Nebenseiten und dem Rechteck der Abschnitte der Grundlinie.



Erster Beweis. Man beschreibe um das $\triangle$ abc einen Kreis, errichte auf bc den senkrechten Durchmesser pq, verbinde ap, aq, so ist $\angle\, bap = bpq = cqp = cap$, also theilt ap den innern Winkel bac, und aq den äussern Winkel in die Hälfte. Die graden Linien ap, aq schneiden die Grundlinie in d und f, und es ist $\triangle\, abd \sim apc$, $\triangle\, abf \sim aqc$, also $\frac{ab}{ad} = \frac{ap}{ac}$, $\frac{ab}{af} = \frac{aq}{ac}$, oder $ab \cdot ac = ad \cdot ap = af \cdot aq$. Hieraus folgt:

$$ab \cdot ac = ad^2 + ad \cdot dp = ad^2 + bd \cdot dc,$$
$$ab \cdot ac = af \cdot fq - af^2 = bf \cdot fc - af^2,$$

also $ad^2 = ab \cdot ac - bd \cdot dc$, $af^2 = bf \cdot fc - ab \cdot ac$.



Zweiter Beweis. Ziehe $dr \parallel ft \parallel ab$, $ds \parallel fu \parallel ac$, so ist $ar = as$, $at = au$, also

$$\frac{as}{ac} = \frac{ar}{ac} = \frac{bd}{bc},$$
$$\frac{ar}{ab} = \frac{as}{ab} = \frac{cd}{bc},$$
$$\frac{au}{ac} = \frac{at}{ac} = \frac{bf}{bc},$$
$$\frac{at}{ab} = \frac{au}{ab} = \frac{fc}{bc}.$$ Hieraus $\frac{as}{ac} + \frac{ar}{ab} = 1$, $\frac{at}{ab} - \frac{au}{ac} = 1$.

Also $ab \cdot as + ac \cdot ar = ab \cdot ac$, $ac \cdot at - ab \cdot au = ab \cdot ac$.

Nun ist allgemein (V. 10. 11.)

$$ad^2 = ab \cdot as + ac \cdot ar - bd \cdot cd,$$
$$af^2 = ab \cdot au - ac \cdot at + bf \cdot cf,$$

also $ad^2 = ab \cdot ac - bd \cdot cd$, $af^2 = bf \cdot cf - ab \cdot ac$.

Diese Ausdrücke lassen sich noch weiter so umbilden, dass bloss die Seiten des Dreiecks darin vorkommen. Nämlich:

$$bd = \frac{bc \cdot ab}{ac + ab},\quad cd = \frac{bc \cdot ac}{ac + ab},\quad bf = \frac{bc \cdot ab}{ac - ab},$$

$cf = \frac{bc \cdot ac}{ac - ab}$, also $ad^2 = ab \cdot ac - \frac{bc^2 \cdot ab \cdot ac}{(ab + ac)^2}$, $af^2 = \frac{bc^2 \cdot ab \cdot ac}{(ac - ab)^2} - ab \cdot ac$. Oder wenn $ab + bc + ca = 2S$, so ist (III. 7.)

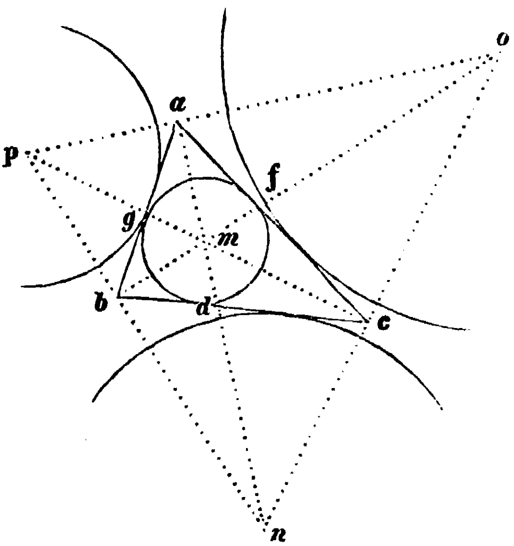
$$ad^2 = \frac{4\, ab \cdot ac \cdot S\,(S - bc)}{(ac + ab)^2},\ af^2 = \frac{4\, ab \cdot ac\,(S - ab)\,(S - ac)}{(ac - ab)^2}.$$

Beispiel. Es sey (V. 6.) $ab = 16$, $ac = 52$, $bc = 60$, so ist $S = 64$, $S - ab = 48$, $S - bc = 4$, $S - ac = 12$, $ad^2 = \frac{4 \cdot 16 \cdot 52 \cdot 64 \cdot 4}{68 \cdot 68} = 184\frac{72}{289}$, $af^2 = \frac{4 \cdot 16 \cdot 52 \cdot 48 \cdot 12}{36 \cdot 36} = 1479\frac{1}{9}$,

$$ad = \frac{64}{17}\sqrt{13} = 13{,}57385,\ af = \frac{32}{3}\sqrt{13} = 38{,}45922.$$

21.

Aus den Seiten eines Dreiecks die Abstände der Mittelpuncte des innern und der äussern eingeschriebenen Kreise von den Ecken des Dreiecks zu finden.



Wenn man die drei innern Winkel des Dreiecks in die Hälfte theilt, so schneiden die theilenden Linien einander in dem Mittelpuncte m des innern eingeschriebenen Kreises. Theilt man einen innern und zwei äussere Winkel in die Hälfte, so schneiden die theilenden Linien einander in den Mittelpuncten n, o, p der äussern eingeschriebenen Kreise. Die Diagonallinien an, bo, cp sind auf den Seiten des $\triangle\, nop$ senkrecht (V. 17.).

Wenn die Diagonallinie ad den innern Winkel a in die Hälfte theilt, und $ab + bc + ca = 2S$, so ist (V. 20.)

$$ad^2 = \frac{4\, ab \cdot ca \cdot S\,(S - bc)}{(ca + ab)^2}.$$

Wenn in dem $\triangle\, abd$ die Diagonallinie bm den $\angle\, abd$ in die Hälfte theilt, so ist (V. 19.)

$$\frac{am}{dm} = \frac{ab}{bd},\ \frac{am}{ad} = \frac{ab}{ab + bd},\ \frac{ab}{ca} = \frac{bd}{cd},\ \frac{ab}{ca + ab} = \frac{bd}{bc},$$

$$\frac{ab}{bd} = \frac{ca + ab}{bc},\ \frac{ab}{ab + bd} = \frac{ca + ab}{ab + bc + ca},$$

also $\dfrac{am}{ad} = \dfrac{ca + ab}{2S}$, also $am^2 = \dfrac{ca \cdot ab\,(S - bc)}{S}$,

ebenso $bm^2 = \dfrac{ab \cdot bc\,(S - ac)}{S}$, $cm^2 = \dfrac{bc \cdot ca\,(S - ab)}{S}$.

Wenn die Linie ap den äussern Winkel a in die Hälfte theilt, und in h die Grundlinie bc schneidet, so ist (V. 20.)

$$ah^2 = \frac{4ab \cdot ac\,(S - ab)\,(S - ac)}{(ac - ab)^2}.$$

Wenn in dem $\triangle\, abh$ die Diagonallinie bp den $\angle\, abh$ in die Hälfte theilt, so ist (V. 19.) $\dfrac{ap}{hp} = \dfrac{ab}{bh}$, $\dfrac{ap}{ah} = \dfrac{ab}{ab + bh}$,

$$\frac{ab}{ca} = \frac{bh}{ch},\ \frac{ab}{ca - ab} = \frac{bh}{bc},\ \frac{ab}{bh} = \frac{ca - ab}{bc},\ \frac{ab}{ab + bh}$$

$= \dfrac{ca - ab}{bc + ca - ab}$, also $\dfrac{ap}{ah} = \dfrac{ca - ab}{2\,(S - ab)}$, also ap^2

$= \dfrac{ca \cdot ab\,(S - ca)}{S - ab}$, ebenso $bp^2 = \dfrac{ab \cdot bc\,(S - bc)}{S - ab}$.

Wenn die Diagonallinie cg den innern Winkel c in die Hälfte theilt, so ist (V. 20.) $cg^2 = \dfrac{4bc \cdot ca \cdot S\,(S - ab)}{(bc + ca)^2}$.

Wenn an dem Dreieck cbg die Linie bp den äussern $\angle\, b$ in die Hälfte theilt, so ist (V. 19.) $\dfrac{cp}{gp} = \dfrac{bc}{bg}$, $\dfrac{cp}{cg}$

$= \dfrac{bc}{bc - bg}$, $\dfrac{bc}{ca} = \dfrac{bg}{ag}$, $\dfrac{bc}{bc + ca} = \dfrac{bg}{ab}$, $\dfrac{bc}{bg} = \dfrac{bc + ca}{ab}$,

$\dfrac{bc}{bc - bg} = \dfrac{bc + ca}{bc + ca - ab}$, also $\dfrac{cp}{cg} = \dfrac{bc + ca}{2\,(S - ab)}$, also

$$cp^2 = \frac{bc \cdot ca \cdot S}{S - ab}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich für den Mittelpunct o:

$$ao^2 = \frac{ca \cdot ab\,(S - ab)}{S - ca},\ co^2 = \frac{bc \cdot ca\,(S - bc)}{S - ca},$$

$$bo^2 = \frac{ab \cdot bc \cdot S}{S - ca},$$

und für den Mittelpunct n:

$$bn^2 = \frac{ab \cdot bc\,(S - ab)}{S - bc},\quad cn^2 = \frac{bc \cdot ca\,(S - ca)}{S - bc},$$

$$an^2 = \frac{ca \cdot ab \cdot S}{S - bc}.$$

Hieraus ergeben sich auch noch folgende Gleichungen, welche sich leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke beweisen lassen:

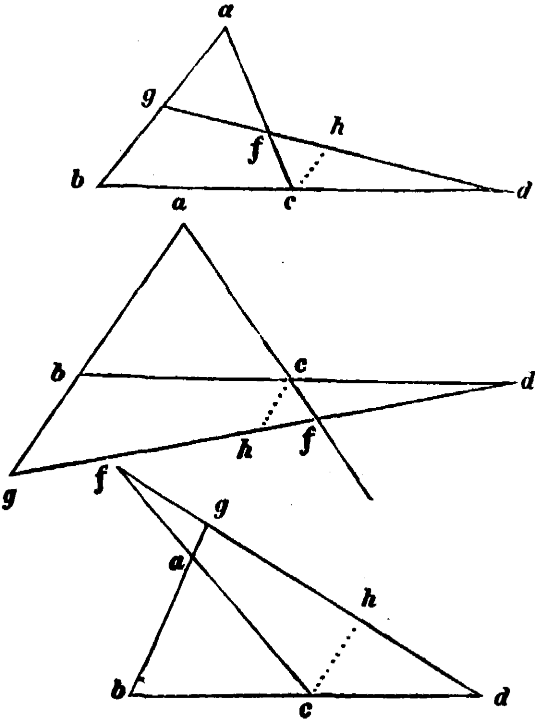
$$am \cdot an = ao \cdot ap = ba \cdot ac,$$
$$bm \cdot bo = bn \cdot bp = ab \cdot bc,$$
$$cm \cdot cp = cn \cdot co = bc \cdot ca.$$

Beispiel. Es sey (V. 6.) $ab = 16$, $bc = 60$, $ca = 52$, also $S = 64$, $S - ab = 48$, $S - bc = 4$, $S - ca = 12$, so ist

$am^2 = 52$, $bm^2 = 180$, $cm^2 = 2340$,
$an^2 = 13312$, $bn^2 = 11520$, $cn^2 = 9360$,
$ao^2 = 3328$, $bo^2 = 5120$, $co^2 = 1040$,
$ap^2 = 208$, $bp^2 = 80$, $cp^2 = 4160$,
$am = 7{,}2111$, $bm = 13{,}4164$, $cm = 48{,}3735$,
$an = 115{,}3776$, $bn = 107{,}3312$, $cn = 96{,}7471$,
$ao = 57{,}6888$, $bo = 71{,}5542$, $co = 32{,}2490$,
$ap = 14{,}4222$, $bp = 8{,}94427$, $cp = 64{,}4980$.

22.

Auf den Seiten eines von einer graden Transversallinie geschnittenen Dreiecks ist das Product der Verhältnisse der wechselnamigen Abschnitte gleich Eins.



Wenn auf den Seiten bc, ca, ab die Puncte d, f, g in grader Linie liegen, so ziehe man $ch \frown ab$, dann ist $\frac{ag}{ch} = \frac{af}{cf}$, $\frac{ch}{bg} = \frac{cd}{bd}$, also $\frac{ag}{bg} = \frac{af}{cf} \cdot \frac{cd}{bd}$ oder $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1.$

Es liegt immer entweder ein Durchschnittspunct, oder es liegen drei Durchschnittspuncte auf den verlängerten Seiten.

Wenn afc die Transversallinie des $\triangle\, gbd$ ist, so ist $\frac{ga}{ba} \cdot \frac{bc}{dc} \cdot \frac{df}{gf} = 1.$

Wenn bcd die Transversallinie des $\triangle\, agf$ ist, so ist $\frac{ab}{gb} \cdot \frac{gd}{fd} \cdot \frac{fc}{ac} = 1.$

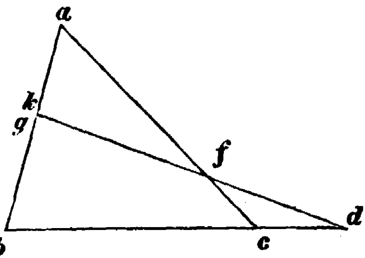
Wenn agb die Transversallinie des $\triangle\, cdf$ ist, so ist $\frac{db}{cb} \cdot \frac{ca}{fa} \cdot \frac{fg}{dg} = 1.$

Wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, und die sich aufhebenden Abschnitte weglässt, so erhält man wieder die erste Gleichung.

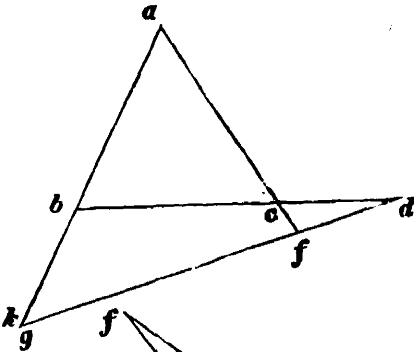
23.

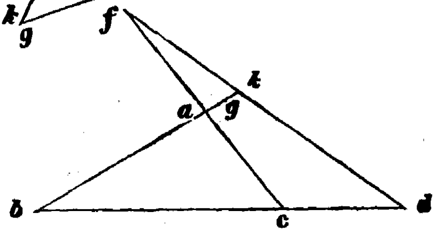
Wenn auf jeder Dreiecksseite ein Punct so liegt, dass das Product der Verhältnisse der wechselnamigen Abschnitte gleich Eins ist, und die Lage jedes Puncts der graden Linie *entspricht, in welcher die beiden andern Puncte liegen, so liegen die drei Puncte in grader Linie.*

Es sey auf bc der Punct d, auf ca der Punct f, auf ab der Punct k so gelegen, dass $\frac{ak}{bk} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$ sey.



Wenn die grade Linie df die Seite ab in g schneidet, so ist (V. 22.) $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$. Also ist $\frac{ak}{bk} = \frac{ag}{bg}$.





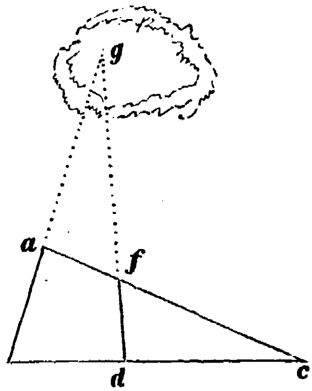
Es wird angenommen, dass k eben so liegt wie g, d. h. dass k und g entweder beide zwischen a und b, oder beide auf der verlängerten ab, oder beide auf der verlängerten ba liegen. Da nun $\frac{ak}{bk} = \frac{ag}{bg}$, so folgt aus dieser Proportion im ersten Falle $\frac{ak}{ak + bk} = \frac{ag}{ag + bg}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$, im zweiten Falle $\frac{ak}{ak - bk} = \frac{ag}{ag - bg}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$, im dritten Falle $\frac{ak}{bk - ak} = \frac{ag}{bg - ag}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$, also in allen drei Fällen $ak = ag$, d. h. die Puncte k, g fallen zusammen, also d, f, k in grader Linie.

24.

Die Entfernung eines sichtbaren aber nicht erreichbaren Puncts auf dem Felde durch Messung von fünf graden Linien zu finden.

Dieser Punct sey g. Man stecke zwei grade Linien ba, df so ab, dass ihre Verlängerungen in g zusammentreffen. Man nehme den Punct c in dem Durchschnitt von bd, af

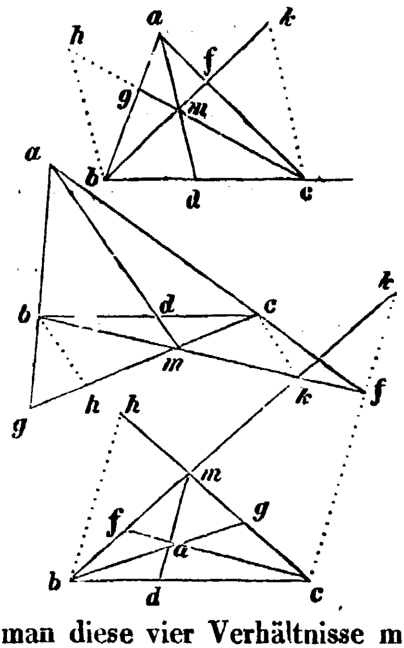
und messe die Linien af, cf, bd, cd, ab. Da (V. 22.) $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$, so lässt sich das Verhältniss $\frac{ag}{bg}$ berechnen; hieraus und aus der gemessenen Linie ab ergeben sich die Entfernungen ag, bg.



Beispiel. Es sey nach Schritten oder Arschinen gemessen $ab = 807$, $bd = 498$, $cd = 793$, $cf = 685$, $af = 391$, so ist $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{498}{793} \cdot \frac{685}{391} = 1$, also $\frac{ag}{bg} = \frac{793}{498} \cdot \frac{391}{685} = \frac{310063}{341130}$, also $\frac{ag}{ab} = \frac{310063}{31067}$, $ag = \frac{807 \cdot 310063}{31067} = 8054\frac{1}{4}$, d. h. 5 Werst $554\frac{1}{4}$ Arschinen.

25.

Auf den Seiten eines Dreiecks, welche durch Diagonallinien geschnitten werden, die in einen Punct der Ebene zusammentreffen, ist das Product der Verhältnisse der wechselnamigen Abschnitte gleich Eins.



Das Dreieck sey abc, die Seiten bc, ca, ab seyen in d, f, g so getheilt, dass die Diagonallinien ad, bf, cg in einen Punct m zusammentreffen. Man ziehe $bh \parallel ad$ bis an cg, $ck \parallel ad$ bis an bf, so ist $\frac{ag}{bg} = \frac{am}{bh}$, $\frac{bd}{bc} = \frac{md}{ck}$, $\frac{bc}{cd} = \frac{bh}{md}$, $\frac{cf}{af} = \frac{ck}{am}$. Wenn man diese vier Verhältnisse mit einander multiplicirt, so erhält man, da sich alle Glieder rechts aufheben, die Gleichung $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$. Es liegt immer entweder ein Durchschnittspunct oder es liegen alle drei Durchschnittspuncte innerhalb der Seiten des $\triangle\ abc$.

Man erhält ebenso, wenn sich an dem $\triangle\ bmc$ die Diagonallinien md, cf, bg in a vereinigen, $\frac{mf}{bf} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cg}{mg} = 1$; wenn sich an dem $\triangle\ amc$ die Diagonallinien cd, mf, ag in b vereinigen, $\frac{ad}{md} \cdot \frac{mg}{cg} \cdot \frac{cf}{af} = 1$; wenn sich an dem $\triangle\ amb$ die Diagonallinien bd, af, mg in c vereinigen, $\frac{md}{ad} \cdot \frac{ag}{bg} \cdot \frac{bf}{mf} = 1$.

Wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man wieder die erste Gleichung.

Wenn man von den 7 Puncten a, b, c, d, f, g, m immer 3, welche ein Dreieck bilden, und 3, welche in grader Linie liegen, vergleicht, so ist (V. 22.) aus:

$$\triangle\ abd \text{ und } cmg \ldots \frac{ag}{bg} \cdot \frac{bc}{dc} \cdot \frac{dm}{am} = 1,$$

$$\triangle\ acd \text{ und } bmf \ldots \frac{cf}{af} \cdot \frac{am}{dm} \cdot \frac{db}{cb} = 1,$$

$$\triangle\ abf \text{ und } cmg \ldots \frac{ag}{bg} \cdot \frac{bm}{fm} \cdot \frac{fc}{ac} = 1,$$

$$\triangle\ cbf \text{ und } amd \ldots \frac{bd}{cd} \cdot \frac{ca}{fa} \cdot \frac{fm}{bm} = 1,$$

$$\triangle\ acg \text{ und } bmf \ldots \frac{ab}{gb} \cdot \frac{gm}{cm} \cdot \frac{cf}{af} = 1,$$

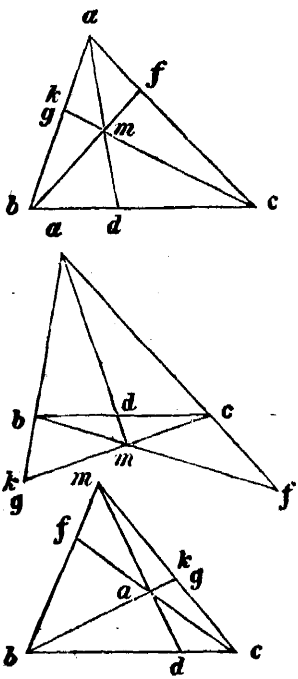
$$\triangle\ bcg \text{ und } amd \ldots \frac{ga}{ba} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cm}{gm} = 1,$$

Wenn man je zwei dieser Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man wieder die erste Gleichung.

26.

Wenn auf jeder Dreiecksseite ein Punct so liegt, dass das Product der Verhältnisse der wechselnamigen Abschnitte gleich Eins ist, und die Lage jedes Puncts dem Durchschnitt der Diagonallinien der beiden andern Puncte entspricht, so schneiden die Diagonallinien einander in einem Punct.

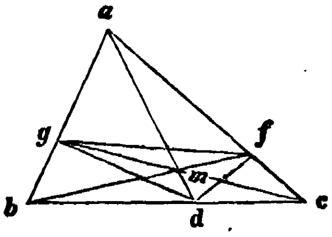
Es sey auf bc der Punct d, auf ca der Punct f, auf ab der Punct k so gelegen, dass $\frac{ak}{bk} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$ sey. Wenn nun die Diagonallinien ad, bf einander in m schneiden,



und cm die ab in g schneidet, so ist (V. 25.) $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$. Also ist $\frac{ak}{bk} = \frac{ag}{bg}$. Es wird angenommen, dass k eben so liegt, wie g, d. h. dass k und g entweder beide zwischen a und b, oder beide auf der verlängerten ab, oder beide auf der verlängerten ba liegen. Da nun $\frac{ak}{bk} = \frac{ag}{bg}$, so folgt aus dieser Proportion im ersten Falle $\frac{ak}{ak + bk} = \frac{ag}{ag + bg}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$; im zweiten Falle $\frac{ak}{ak - bk} = \frac{ag}{ag - bg}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$; im dritten Falle $\frac{ak}{bk - ak} = \frac{ag}{bg - ag}$, d. h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$, also in allen drei Fällen $ak = ag$, d. h. die Puncte k, g fallen zusammen, also treffen die Diagonallinien ad, bf, ck in einen Punct zusammen.

27.

Aus den Seiten eines Dreiecks und den auf zwei Seiten gegebenen Abschnitten, die Absc nitte auf der dritten Seite, die Diagonallinien und Transversallinien zu berechnen.



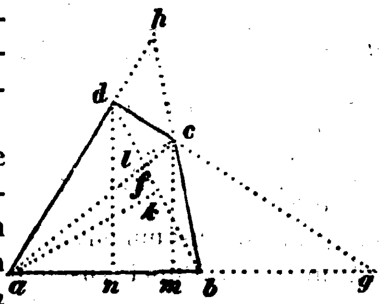
Gegeben seyen ab, bc, ca, auf bc die Abschnitte bd, cd, auf ca die Abschnitte cf, af. Man verbinde ad, bf, welche einander in m schneiden, man ziehe cm, welche die Seite ab in g schneidet, so ergiebt sich (V. 25.) das Verhältniss $\frac{ag}{bg}$; hieraus und aus ab finden sich die Abschnitte ag, bg. Nun lassen sich (V. 10. 11.) die Diagonallinien ad, bf, cg berechnen. Die Gleichungen (V. 25.) geben die Verhältnisse $\frac{am}{dm}$, $\frac{bm}{fm}$, $\frac{cm}{gm}$, hieraus in Verbindung mit den Diagonallinien ad, bf, cg, die Abschnitte am, dm, bm, fm, cm, gm. Nun berechnet man (V. 10. 11.) die Transversallinie df als Diagonallinie des $\triangle\, cad$ oder bcf; die Transversallinie fg als Diagonallinie des $\triangle\, abf$ oder cag; die Transversallinie gd als Diagonallinie des $\triangle\, abd$ oder bcg.

Beispiel. Es sey $ab = 46$, $bc = 56$, $ca = 39$, $bd = 24$, $cd = 32$, $cf = 18$, $af = 21$, so ist: $ag = 28$, $bg = 18$, und hieraus

$ad^2 = 1093$, $bf^2 = 2287\frac{3}{13}$, $cg^2 = 2000\frac{1}{23}$,
$ad = 33{,}06055$, $bf = 47{,}82500$, $cg = 44{,}72184$,
$am = 24{,}17861$, $dm = 8{,}88194$,
$bm = 27{,}83845$, $fm = 19{,}98655$,
$cm = 30{,}70454$, $gm = 14{,}01729$,
$df^2 = 677\frac{11}{13}$, $fg^2 = 1060\frac{237}{299}$, $gd^2 = 274\frac{7}{23}$,
$df = 26{,}03548$, $fg = 32{,}56981$, $gd = 16{,}56214$.

28.

An einem ebenen Vierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder verlängerten Seiten wie die Nebendreiecke.



Das Viereck sey $abcd$, die Diagonallinien ac, bd schneiden einander in f, die verlängerten Seiten ab, cd in g; bc, da in h. Man fälle ak, cl auf bd, und cm, dn auf ab senkrecht, so ist

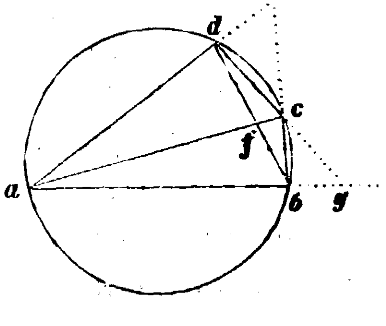
$$\frac{cf}{af} = \frac{cl}{ak} = \frac{\triangle\, bcd}{\triangle\, dab},\quad \frac{cg}{dg} = \frac{cm}{dn} = \frac{\triangle\, abc}{\triangle\, dab},$$

ebenso $$\frac{df}{bf} = \frac{\triangle\, cda}{\triangle\, abc},\quad \frac{bg}{ag} = \frac{\triangle\, bcd}{\triangle\, cda},\quad \frac{ch}{bh} = \frac{\triangle\, cda}{\triangle\, dab},$$

$$\frac{dh}{ah} = \frac{\triangle\, bcd}{\triangle\, abc}.$$

29.

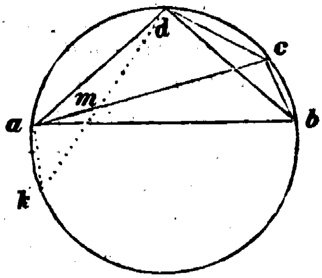
An einem Kreisvierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder verlängerten Seiten wie die Rechtecke der Nebenseiten.



Die Diagonallinien ac, bd schneiden einander in f; die verlängerten Seiten ab, cd in g; bc, da in h. Da $\triangle afd \sim bfc$, so ist $\frac{df}{cf} = \frac{da}{bc}$. Da $\triangle cfd \sim bfa$, so ist $\frac{af}{df} = \frac{ab}{cd}$. Aus beiden Proportionen folgt: $\frac{af}{cf} = \frac{da \cdot ab}{bc \cdot cd}$. Eben so wird bewiesen, dass $\frac{bf}{df} = \frac{ab \cdot bc}{cd \cdot da}$, $\frac{bg}{ag} = \frac{db \cdot bc}{da \cdot ac}$, $\frac{cg}{dg} = \frac{bc \cdot ca}{bd \cdot da}$, $\frac{ch}{bh} = \frac{ac \cdot cd}{ab \cdot bd}$, $\frac{dh}{ah} = \frac{cd \cdot db}{ca \cdot ab}$.

Sind also zwei Abschnitte einander gleich, so sind auch die Rechtecke der Nebenseiten einander gleich. Z. B. wenn $bf = df$, so ist $ab \cdot bc = cd \cdot da$; wenn $af = cf$, so ist $da \cdot ab = bc \cdot cd$.

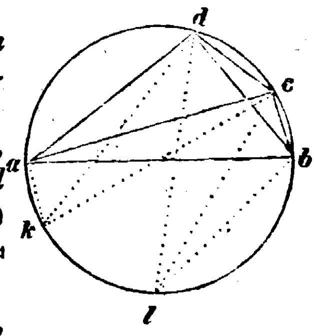
30.



An einem Kreisvierecke ist das Rechteck der Diagonallinien gleich der Summe der Rechtecke der Gegenseiten.

Man mache die Sehne $ak = bc$. Wenn ca, dk einander in m schneiden, so ist (III. 38.) $\angle adk = adm = bdc$, $\angle dam = dac = dbc$, $\angle adb = mdc$, $\angle dba = dca = dcm$, also $\triangle dam \sim dbc$, $\triangle dcm \sim dba$, also $\frac{da}{am} = \frac{bd}{bc}$ oder $bd \cdot am = bc \cdot da$, $\frac{cd}{cm} = \frac{bd}{ab}$, oder $bd \cdot cm = ab \cdot cd$; aus beiden folgt $ac \cdot bd = ab \cdot cd + bc \cdot da$.

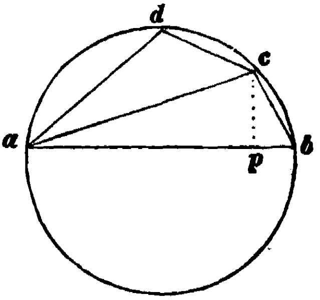
31.



An einem Kreisvierecke verhalten sich die Diagonallinien wie die Summen der Rechtecke der Nebenseiten.

Man mache die Sehnen $ak = bc$, $bl = da$, so ist auch $ck = ab$, $dl = ab$, $cl = dk$. Aber (V. 30.) $ac \cdot dk = ak \cdot cd + da \cdot ck = bc \cdot cd + da \cdot ab$, $bd \cdot cl = dl \cdot bc + cd \cdot bl = ab \cdot bc + cd \cdot da$, also $\frac{ac}{bd} = \frac{da \cdot ab + bc \cdot cd}{ab \cdot bc + cd \cdot da}$.

32.



Der Inhalt eines Kreisvierecks ist gleich der Quadratwurzel aus dem Product von vier Factoren, welche dem halben Umfang weniger jeder Seite gleich sind.

Der Durchmesser des Kreises sey $= D$, so ist (V. 5.) $2 \triangle acd = \frac{cd \cdot da \cdot ac}{D}$, $2 \triangle abc = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{D}$, also $\frac{\triangle abc}{\triangle acd} = \frac{ab \cdot bc}{cd \cdot da}$. Es sey der Inhalt des Kreisvierecks $abcd = F$, so ist $\frac{\triangle abc}{F} = \frac{ab \cdot bc}{ab \cdot bc + cd \cdot da}$, oder $F \cdot ab \cdot bc = \triangle abc\,(ab \cdot bc + cd \cdot da)$. Man fälle cp senkrecht auf ab, so ist $2 \cdot abc = ab \cdot cp$, $4\,(abc)^2 = ab^2 \cdot cp^2 = ab^2\,(bc^2 - bp^2)$. Aber (III. 7.) $bc^2 - bp^2 = (bc + bp)\,(bc - bp)$, also $4\,(abc)^2 = (ab \cdot bc + ab \cdot bp)\,(ab \cdot bc - ab \cdot bp)$. Aber (V. 8.) $2ab \cdot bp = ab^2 + bc^2 - ca^2$, also $2ab \cdot bc + 2ab \cdot bp = (ab + bc)^2 - ca^2$,

$2ab \cdot bc - 2ab \cdot bp = ca^2 - (ab - bc)^2$,

also $16\,(abc)^2 = ((ab + bc)^2 - ca^2) \cdot (ca^2 - (ab - bc)^2)$,

Aber (V. 30.) $ac \cdot bd = ab \cdot cd + bc \cdot da$,

(V. 31.) $\frac{ac}{bd} = \frac{da \cdot ab + bc \cdot cd}{ab \cdot bc + cd \cdot da}$,

also $ca^2 = \frac{(da \cdot ab + bc \cdot cd)\,(ab \cdot cd + bc \cdot da)}{ab \cdot bc + cd \cdot da}$,

oder $ca^2 \cdot (ab \cdot bc + cd \cdot da) = (da \cdot ab + bc \cdot cd)\,(ab \cdot cd + bc \cdot da) = da^2 \cdot ab \cdot bc + ab^2 \cdot cd \cdot da + bc^2 \cdot cd \cdot da + cd^2 \cdot ab \cdot bc = (cd^2 + da^2)\,ab \cdot bc + (ab^2 + bc^2)\,cd \cdot da$.

Addirt und subtrahirt man rechts das Product $2ab \cdot bc \cdot cd \cdot da$, so ist:

$$ca^2\,(ab \cdot bc + cd \cdot da)$$
$$= (cd - da)^2\,ab \cdot bc + (ab + bc)^2\,cd \cdot da,$$
$$\text{oder} = (cd + da)^2\,ab \cdot bc + (ab - bc)^2\,cd \cdot da.$$

Zieht man beide Theile dieser Gleichung von $(ab + bc)^2\,(ab \cdot bc + cd \cdot da)$ ab, so ist:

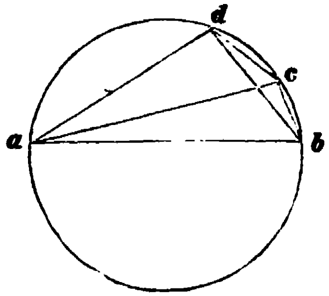
$$((ab + bc)^2 \cdot ca^2)\,(ab \cdot bc + cd \cdot da) = ((ab + bc)^2 - (cd - da)^2)\,ab \cdot bc.$$

Zieht man aber von beiden Theilen jener Gleichung die Grösse $(ab - bc)^2\ (ab \cdot bc + cd \cdot da)$ ab, so ist:
$$(ca^2 - (ab - bc)^2)\ (ab \cdot bc + cd \cdot da) = ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2)\ ab \cdot bc.$$
Multiplicirt man beide Ausdrücke, so ist:
$((ab + bc)^2 - ca^2)\ (ca^2 - (ab - bc)^2)\ (ab \cdot bc + cd \cdot da)^2 =$
$((ab + bc)^2 - (cd - da)^2) \cdot ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2) \cdot ab^2 \cdot bc^2$,
oder $16\,(abc)^2\ (ab \cdot bc + cd \cdot da)^2 =$
$((ab + bc)^2 - (cd - da)^2)\ ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2) \cdot ab^2 \cdot bc^2$,
also $16\,F^2 = ((ab + bc)^2 - (cd - da)^2) \cdot ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2)$.

Wenn nun S der halbe Umfang des Kreisvierecks ist, so ist $2\,S = ab + bc + cd + da$, also
$$ab + bc + cd - da = 2\,(S - da),$$
$$ab + bc - (cd - da) = 2\,(S - cd),$$
$$cd + da + ab - bc = 2\,(S - bc),$$
$$cd + da - (ab - bc) = 2\,(S - ab),$$
also $(ab + bc)^2 - (cd - da)^2 = 4\,(S - cd)\ (S - da)$,
$(cd + da)^2 - (ab - bc)^2 = 4\,(S - ab)\ (S - bc)$.
Also $F^2 = (S - ab)\ (S - bc)\ (S - cd)\ (S - da)$.

Beispiel. Es sey $ab = 990$, $bc = 309$, $cd = 423$, $da = 819$, so ist $S = 1270\tfrac{1}{2}$, also $S - ab = 280\tfrac{1}{2}$, $S - bc = 961\tfrac{1}{2}$, $S - cd = 847\tfrac{1}{2}$, $S - da = 451\tfrac{1}{2}$, und hieraus $F = 321248$ der Inhalt des Kreisvierecks.

33.

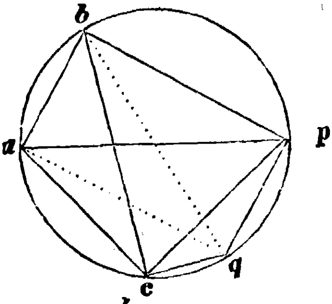


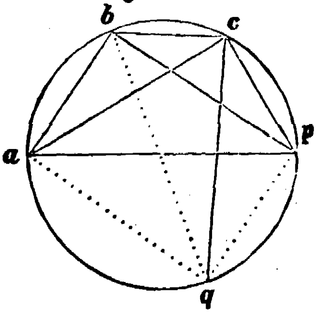
Der Durchmesser eines Kreisvierecks ist gleich dem Product der Quadratwurzeln aus der Summe der Rechtecke der Gegenseiten und Nebenseiten, dividirt durch den doppelten Inhalt.

Man setze $ab \cdot cd + bc \cdot da = A^2$, $da \cdot ab + bc \cdot cd = B^2$, $ab \cdot bc + cd \cdot da = C^2$, so ist (V. 30.) $ac \cdot bd = A^2$, und (V. 31.) $\frac{ac}{bd} = \frac{B^2}{C^2}$, also $ac = \frac{A \cdot B}{C}$, $bd = \frac{A \cdot C}{B}$. Es sey nun der Durchmesser des Kreises $= D$, und der Inhalt des Kreisvierecks $= F$, so ist (V. 5.)
$$D \cdot 2\,(abc) = ab \cdot bc \cdot ca, \text{ und (V. 32.)}$$
$$F \cdot ab \cdot bc = (abc) \cdot C^2, \text{ also durch Multiplication}$$
$$D \cdot 2\,F = ac \cdot C^2 = A \cdot B \cdot C, \text{ also } D = \frac{A \cdot B \cdot C}{2\,F}.$$

Beispiel. Es sey $ab = 990$, $bc = 309$, $cd = 423$, $da = 819$, so ist $A^2 = 671841$, $B^2 = 941517$, $C^2 = 652347$, also $A = 819{,}6592$; $B = 970{,}3177$; $C = 807{,}6800$; $ac = 984{,}7090$; $bd = 682{,}2735$; $F = 321248$; hieraus $D = 999{,}8084$.

34.





Aus den Sehnen und Ergänzungssehnen zweier Bögen die Sehnen und Ergänzungssehnen der Summe und Differenz der Bögen zu finden.

Wenn die Bögen zweier Sehnen zusammen dem Halbkreise gleich sind, so heisst die eine die *Ergänzungssehne* der andern. Die Summe der Quadrate der Sehne und Ergänzungssehne ist also dem Quadrat des Durchmessers gleich. Die gegebenen Sehnen seyen ab, ac, ihre Ergänzungssehnen pb, pc. Der Durchmesser sey $ap = bq = D$. Für die Summe der Bögen hat man (V. 30.) im Viereck $abpc$

$$D \cdot bc = ac \cdot pb + ab \cdot pc,$$

im Viereck $apqc$ $\quad D \cdot cq = pc \cdot aq - ac \cdot pq$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = pc \cdot pb - ac \cdot ab.$

Für den Unterschied der Bögen hat man

im Viereck $abcp$ $\quad D \cdot bc = ac \cdot pb - ab \cdot pc,$
im Viereck $acpq$ $\quad D \cdot cq = pc \cdot aq + ac \cdot pq$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = pc \cdot pb + ac \cdot ab.$

Beispiel. Es sey $ab = 309$, $ac = 990$, $D = 999{,}8084$. Hieraus findet sich

$pb = 950{,}8604$ $\qquad pc = 139{,}7027$
$ac \cdot pb = 941352{,}0$ $\qquad ab \cdot pc = 43168{,}1$
$pc \cdot pb = 132837{,}7$ $\qquad ac \cdot ab = 305910.$

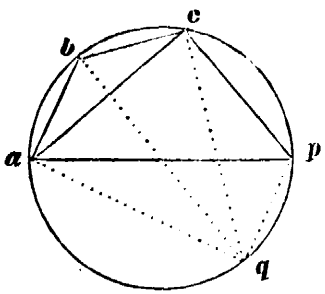
Man hat also für die Summe der Bögen

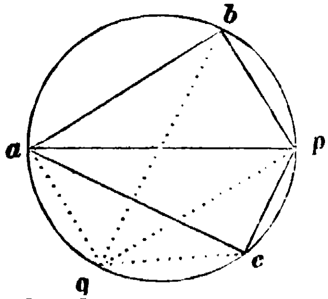
$D \cdot bc = 984520{,}1$ $\qquad bc = 984{,}7090$
$D \cdot cq = 173072{,}3$ $\qquad cq = 173{,}1054.$

Und für den Unterschied der Bögen

$D \cdot bc = 898183{,}9$ $\qquad bc = 898{,}3560$
$D \cdot cq = 438747{,}7$ $\qquad cq = 438{,}8318.$

35.



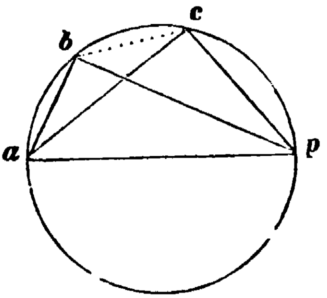


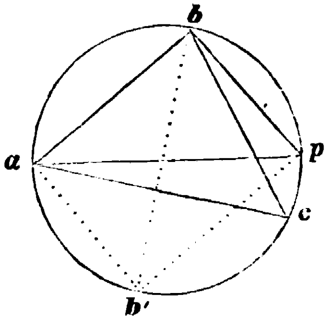
Aus der Sehne und Ergänzungssehne eines Bogens die Sehne und Ergänzungssehne des doppelten Bogens zu bestimmen.

Der Durchmesser sey $ap = bq = D$, $ab = bc$ die Sehne des einfachen Bogens, $pb = qa = qc$ dessen Ergänzungssehne, ac die Sehne des doppelten Bogens, pc dessen Ergänzungssehne. Man hat (V. 30.) im Viereck $abcq$
$D \cdot ac = bc \cdot aq + ab \cdot qc = 2ab \cdot pb$.
Im Viereck $bcpq$, wenn der Bogen ab kleiner als der Quadrant ist,
$$D \cdot pc = qc \cdot pb - bc \cdot pq = pb^2 - ab^2$$
$$= D^2 - 2ab^2 = 2pb^2 - D^2.$$
Wenn der Bogen ab grösser als der Quadrant ist
$$D \cdot pc = bc \cdot pq - qc \cdot pb = ab^2 - pb^2$$
$$= 2ab^2 - D^2 = D^2 - 2pb^2.$$

Beispiel. Es sey $D = 1000$, $ab = 327$, so ist $ab^2 = 106929$, $2ab^2 = 213858$, $D^2 - 2ab^2 = 786142$, also $pc = 786{,}142$,
$pb^2 = D^2 - ab^2 = 893071$, $pb = 945{,}0244$,
$2ab \cdot pb = 618045{,}8$, also $ac = 618{,}0458$.

36.





Aus der Ergänzungssehne eines Bogens die Sehne und Ergänzungssehne des halben Bogens zu bestimmen.

Es sey $ap = D$ der Durchmesser, $ab = bc$ die Sehne des halben Bogens, pb dessen Ergänzungssehne, ac, pc die Sehne und Ergänzungssehne des einfachen Bogens, so ist (V. 35.), wenn der Bogen ac kleiner als der Halbkreis,
$$D \cdot pc = D^2 - 2ab^2 = 2pb^2 - D^2,$$
also $ab^2 = \frac{1}{2} D (D - pc)$,
$pb^2 = \frac{1}{2} D (D + pc)$.

Wenn aber der Bogen apc grösser als der Halbkreis

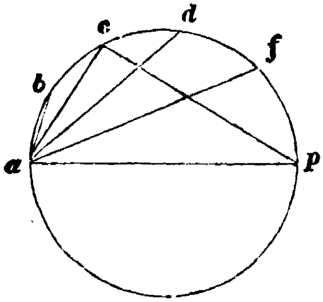
$$D \cdot pc = 2ab^2 - D^2 = D^2 - 2pb^2,$$

also $ab^2 = \frac{1}{2}D\,(D + pc)$, $pb^2 = \frac{1}{2}D\,(D - pc)$.

Beispiel. Es sey $D = 1000$, $pc = 900$, so ist, wenn der Bogen ac kleiner als der Halbkreis angenommen wird,

$$ab^2 = 50000,\quad pb^2 = 950000,$$
$$ab = 223{,}6068,\quad pb = 974{,}6793.$$

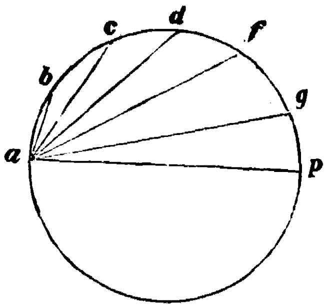
37.



Aus der Sehne des einfachen und zweifachen Bogens die Sehne des vierfachen Bogens zu bestimmen.

Es sey $ap = D$ der Durchmesser, ab, ac, ad, af die Sehnen des ein-, zwei-, drei-, vierfachen Bogens, pc die Ergänzungssehne des zweifachen Bogens, so ist (V. 35.) $D \cdot af = 2ac \cdot pc$, $D \cdot pc = D^2 - 2ab^2$, oder $= 2ab^2 - D^2$, also $D^2 \cdot af = 2ac \cdot (D^2 - 2ab^2)$, oder $= 2ac \cdot (2ab^2 - D^2)$, je nachdem der Bogen ab kleiner oder grösser als der Quadrant ist.

38.



Aus den Sehnen des einfachen und zweifachen Bogens die Sehnen des drei-, vier-, fünffachen Bogens u. s. w. zu bestimmen.

Nimmt man die Bogen ab, bc, cd, df, fg u. s. w. einander gleich, so giebt (V. 30.) das Viereck

$$abcd \cdots\ ad \cdot ab = ac^2 - ab^2 = (ac + ab)\,(ac - ab),$$
$$abdf \cdots\ af \cdot ac = ad^2 - ab^2 = (ad + ab)\,(ad - ab),$$
$$abfg \cdots\ ag \cdot ad = af^2 - ab^2 = (af + ab)\,(af - ab)$$

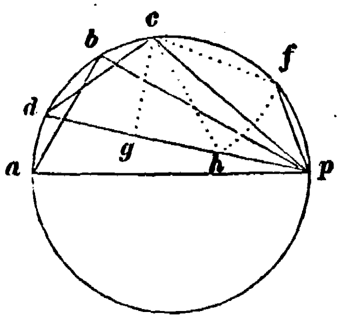
u. s. w., wodurch sich aus den Sehnen ab, ac der Reihe nach die Sehnen ad, af, ag u. s. w. finden lassen. Auch wird (V. 35.) $D^2 \cdot \frac{1}{4}ac^2 = ab^2 \cdot pb^2 = ab^2\,(D^2 - ab^2)$,

also $D^2 = \dfrac{ab^2 \cdot ab^2}{ab^2 - \frac{1}{4}ac^2}$.

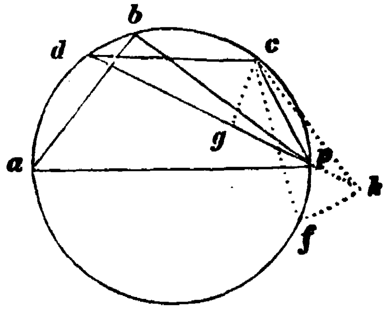
Beispiel. Es sey $ab = 309{,}0170$, $ac = 587{,}7853$, so ist $ab^2 = 95491{,}50$, $ac^2 = 345491{,}50$, $ab^2 - \frac{1}{4}ac^2 = 9118{,}62$, $\sqrt{ab^2 - \frac{1}{4}ac^2} = 95{,}4915$, also $D = 1000$.

Ferner $ad \cdot ab = 250000$, also $ad = 809{,}0170$, $af \cdot ac = 559017{,}0$, also $af = 951{,}0565$, $ag \cdot ad = 809017{,}0$, also $ag = 1000$. Also sind in diesem Beispiel ab, ac, ad, af die Sehnen eines regelmässigen Zehnecks.

39.



Das Rechteck der Ergänzungssehnen zweier Bögen ist gleich dem Rechteck, welches der halbe Durchmesser mit der Summe der Ergänzungssehnen der Summe und Differenz der Bögen bildet.



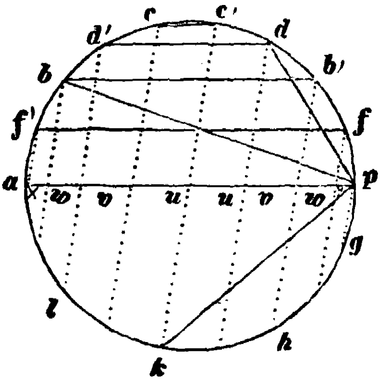
Der Durchmesser sey $ap = D$, die Sehnen der beiden Bögen ab, ac, ihre Ergänzungssehnen pb, pc. Macht man die Bögen cd, cf dem Bogen ab gleich, so ist der Bogen ad die Differenz der Bögen ab, ac, und der Bogen af die Summe der Bögen ab, ac. Also ist pd die Ergänzungssehne der Differenz der Bögen ab, ac, und pf die Ergänzungssehne der Summe der Bögen ab, ac. Fället man cg senkrecht auf pd, so ist $\triangle\, cpg \sim apb$, also $\frac{ap}{pb} = \frac{pc}{pg}$, oder $pb \cdot pc = D \cdot pg$. Nimmt man auf der Linie pd den Punct h so, dass $ch = cf = cd = ab$ ist, so ist $\triangle\, cpf = cph$, also $ph = pf$. Wenn nun die Summe der Bögen ab, ac, d. h. der Bogen acf kleiner als der Halbkreis ist, so ist $pg = \frac{1}{2}(pd + ph) = \frac{1}{2}(pd + pf)$,
also $pb \cdot pc = \frac{1}{2} D\,(pd + pf)$.

Wenn aber die Summe der Bögen ab, ac, d. h. der Bogen acf grösser als der Halbkreis ist,
so ist $pg = \frac{1}{2}(pd - ph) = \frac{1}{2}(pd - pf)$,
also $pb \cdot pc = \frac{1}{2} D\,(pd - pf)$.

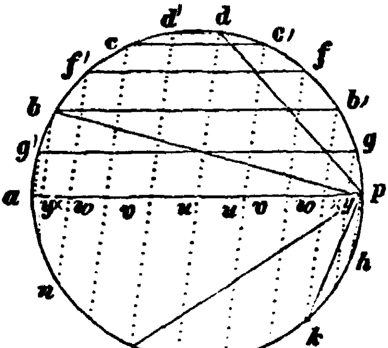
Beispiel. Es sey $D = 1000$, so sind für die Bögen $ab = 50^\circ$ und $ac = 70^\circ$ die Ergänzungssehnen $pb = 906{,}3078$ und $pc = 819{,}1521$, also ihr Product $pb \cdot pc = 742403{,}9$.

Für die Differenz und Summe der Bögen, nämlich $ad = 20^\circ$, und $af = 120^\circ$, sind die Ergänzungssehnen $pd = 984{,}8078$, $pf = 500$, also ihre halbe Summe 7424039, welche mit D multiplicirt, wieder den Werth von $pb \cdot pc$ giebt.

40.



In einem regelmässigen eingeschriebenen Vieleck von ungrader Seitenzahl ist die Summe der Ergänzungssehnen in dem einen Halbkreise weniger der Summe der Ergänzungssehnen in dem andern Halbkreise, gleich dem halben Durchmesser.



Die Ergänzungssehnen müssen nach den Puncten von ungrader Stelle gezogen werden, nämlich im Fünfeck, nach dem 1sten und 3ten Punct, im Siebeneck nach dem 1sten, 3ten und 5ten Punct, im Neuneck nach dem 1sten, 3ten, 5ten, 7ten Punct u. s. w. Man ziehe durch irgend eine Ecke a einen Durchmesser $ap = D$. Dann sey b die 1ste, c die 2te, d die 3te Ecke u. s. w. Man ziehe im Halbkreise durch alle Ecken parallele Sehnen bb', cc', dd' u. s. w. mit ap, und durch alle Theilungspuncte des Halbkreises parallele Sehnen, deren Neigungswinkel gegen ap gleich einem rechten Winkel mehr oder weniger $\frac{1}{4}$ des Centralwinkels des Vielecks sey. Alsdann gehen diese parallelen Sehnen auch durch die Theilungspuncte des andern Halbkreises, und theilen den Durchmesser so, dass die Abschnitte auf beiden Seiten des Mittelpuncts einander gleich sind, nämlich $u = u$, $v = v$, $w = w$ u. s. w. Man hat nun im Neuneck z. B. $ff' - bb' = w + x$, $dd' - cc' = u + v$. Aber $u + v + w + x = \frac{1}{2} D$, also $ff' + dd' - cc' - bb' = \frac{1}{2} D$, oder:

$$pb + pd - pg - pk = \tfrac{1}{2} D,$$

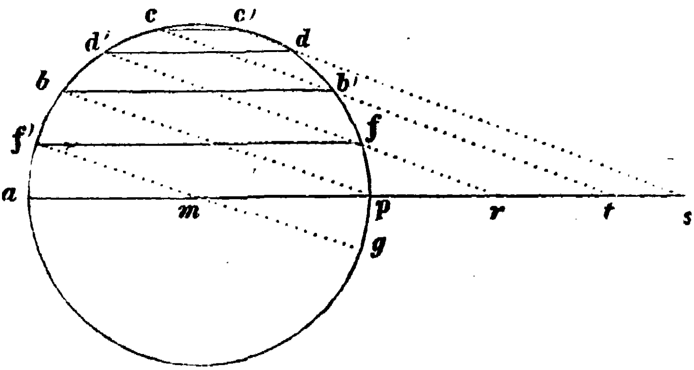
$$\text{oder } pb + pd - pf - pc = \tfrac{1}{2} D.$$

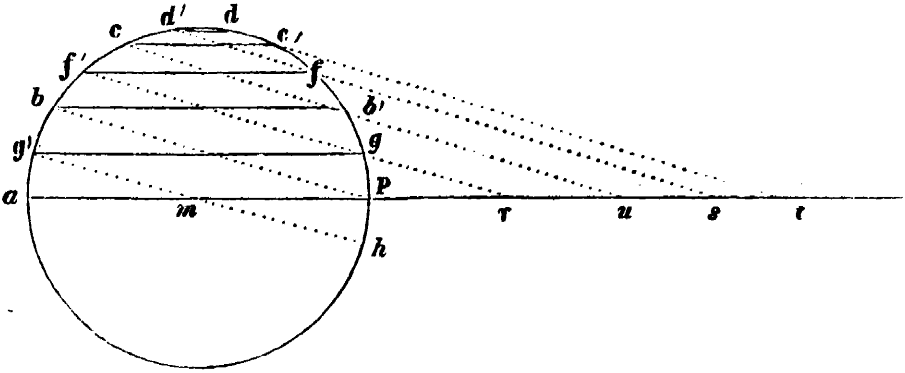
Man hat ferner im Eilfeck $gg' - bb' = x + y$, $ff' -$

$cc' = v + w$, $dd' = u$. Aber $u + v + w + x + y = \frac{1}{2} D$, also $gg' + ff' + dd' - cc' - bb' = \frac{1}{2} D$, oder:

$$pb + pd + pg - pk - pm = \tfrac{1}{2} D,$$

oder $pb + pd + pg - pf - pc = \frac{1}{2} D$.

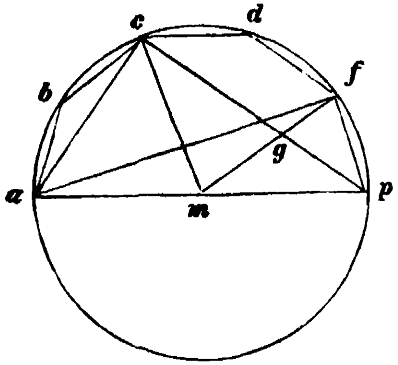




Zweiter Beweis. Man ziehe durch die Ecken des Polygons b, c, d, f, g u. s. w. Parallellinien mit dem Durchmesser ap, so theilen diese den Halbkreis in soviel gleiche Theile, als das Polygon Ecken hat. Man ziehe aus p nach der 1sten Ecke b eine Sehne, so werden die Sehnen, welche gleichweit abstehende Theilungspuncte verbinden, der pb parallel seyn, und eine derselben wird durch den Mittelpunct m des Kreises gehen. Man verlängere diese Sehnen bis an den Durchmesser ap. Dann ist beim Neuneck: $mr = ff'$, $rs = dd'$, $st = cc'$, $tp = bb'$, also $\frac{1}{2} D = mr + rs - st - tp = ff' + dd' - cc' - bb' = pb + pd - pf - pc$. Beim Eilfeck: $mr = gg'$, $rs = ff'$, $st = dd'$, $tu = cc'$, $up = bb'$, also $\frac{1}{2} D = mr + rs + st - tu - up = gg' + ff' + dd' - cc' - bb' = pb + pd + pg - pf - pc$.

41.

Das regelmässige eingeschriebene Zehneck und Fünfeck zu berechnen.



Es sey m der Mittelpunct, $ap = D$ der Durchmesser, und es sey der Halbkreis in b, c, d, f in fünf gleiche Theile getheilt, so sind die Sehnen $ab = pf$ die Seite des Zehnecks, ihre Ergänzungssehne $af = pb$ die Diagonallinie des Fünfecks, $ac = pd$ die Seite des Fünfecks, ihre Ergänzungssehne $pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks. Man hat also (V. 39.) $pc \cdot pf = \frac{1}{2} D\,(pc - pf)$, (V. 40.) $pc - pf = \frac{1}{2} D$, also $pc \cdot pf = \frac{1}{4} D^2$. Diese beiden Gleichungen lassen sich auch leicht unmittelbar beweisen. Wenn mf, pc einander in g schneiden, so ist $\angle\, pmf = mpg = gpf = mcg = 36^{\circ}$, die $\angle\, mpf = amc = mfp = mgc = pgf = 72^{\circ}$, also $\triangle\, mpf = gmc$, $\triangle\, gpf \sim fmp$, $\triangle\, gpm \sim mpc$, also $mg = pg = pf$ die Seite des Zehnecks, $cg = mc = \frac{1}{2} D$, also $pc - pg = pc - pf = \frac{1}{2} D$, und $pc \cdot pg = pc \cdot pf = mp^2 = \frac{1}{4} D^2$. Diese beiden Gleichungen lassen sich so ausdrücken: „Wenn der Halbmesser mf in g in stetiger Proportion geschnitten wird, so dass $\frac{fg}{mg} = \frac{mg}{mf}$, so ist der grössere Abschnitt mg die Seite des Zehnecks. Wenn der Halbmesser cg in p in stetiger Proportion geschnitten wird, so dass $\frac{pc}{cg} = \frac{cg}{pg}$, so ist der grössere Abschnitt pc die Diagonallinie des Zehnecks, der kleinere Abschnitt pg die Seite des Zehnecks."

Diese Gleichungen werden auf folgende Art aufgelöset: $pc - pf = \frac{1}{2} D$ giebt ins Quadrat erhoben (V. 9.) $pc^2 - 2pc \cdot pf + pf^2 = \frac{1}{4} D^2$. Aber $pc \cdot pf = \frac{1}{4} D^2$, also $4pc \cdot pf = D^2$. Beide Gleichungen addirt geben $pc^2 + 2pc \cdot pf + pf^2 = \frac{5}{4} D^2$,
also $pc + pf = \frac{1}{2} D \sqrt{5}$. Aber $pc - pf = \frac{1}{2} D$,
also $pc = \frac{1}{4} D\,(\sqrt{5} + 1)$, $\quad pf = \frac{1}{4} D\,(\sqrt{5} - 1)$,
$pc^2 = \frac{1}{16} D^2\,(6 + 2\sqrt{5})$, $pf^2 = \frac{1}{16} D^2\,(6 - 2\sqrt{5})$.

Aber $ac^2 + pc^2 = D^2$, $af^2 + pf^2 = D^2$, also $ac^2 = \frac{1}{16} D^2 (10 - 2\sqrt{5})$, $pb^2 = af^2 = \frac{1}{16} D^2 (10 + 2\sqrt{5})$.

Diese Ausdrücke lassen sich auch noch anders beweisen: Im Viereck $pcdf$ ist (V. 30.) $pd \cdot cf = pc \cdot df + cd \cdot pf$, oder $ac^2 = \frac{1}{4} D^2 + pf^2$, und da $ac^2 + pc^2 = af^2 + pf^2 = D^2$, so ist $af^2 = \frac{1}{4} D^2 + pc^2$ „d. h. das Quadrat der Seite des Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seiten des Sechsecks und Zehnecks; das Quadrat der Diagonallinie des Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seite des Sechsecks und der Diagonallinie des Zehnecks.“

Der Bogen ac ist die Hälfte des Bogens af, der Bogen af ist die Hälfte der Ergänzung des Bogens ac zum Umfange, also (V. 36.)

$$ac^2 = \tfrac{1}{2} D (D - pf) = \tfrac{1}{8} D^2 (5 - \sqrt{5}),$$
$$af^2 = \tfrac{1}{2} D (D + pc) = \tfrac{1}{8} D^2 (5 + \sqrt{5}).$$

Um die Linien durch die Seite des Zehnecks auszudrücken, ist $pc \cdot pf = \frac{1}{4} D^2$, also $\frac{D}{pf} = \frac{4pc}{D} = (\sqrt{5} + 1)$, also $D = pf (\sqrt{5} + 1)$. Ferner $af^2 + pf^2 = D^2$, also $\frac{af^2}{pf^2} = \frac{D^2}{pf^2} - 1 = 5 + 2\sqrt{5}$, also $af^2 = pf^2 \cdot (5 + 2\sqrt{5})$.

Um die Linien durch die Seite des Fünfecks auszudrücken, ist $\frac{ac^2}{D^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{5}{10 + 2\sqrt{5}}$, also $D^2 = ac^2 (2 + \frac{2}{5}\sqrt{5})$, $pc^2 = ac^2 (1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})$.

Um die Berechnung in Zahlen zu machen, ist

$$\sqrt{5} = 2{,}2360679\ 7749978\ 96964.$$

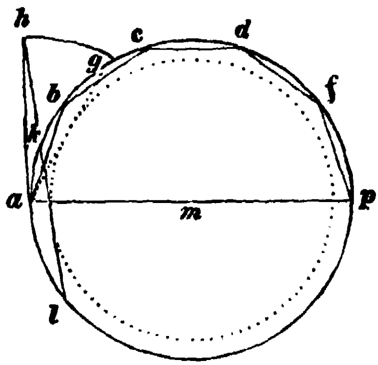
Hieraus folgt nach den obigen Ausdrücken

$$pf = D \cdot 0{,}3090169\ 9437494$$
$$ac = D \cdot 0{,}5877852\ 5229247$$
$$pc = D \cdot 0{,}8090169\ 9437494$$
$$af = D \cdot 0{,}9510565\ 1629653$$
$$D = ac \cdot 1{,}7013016\ 1670407$$
$$pc = ac \cdot 1{,}3763819\ 2047117$$
$$D = pf \cdot 3{,}2360679\ 7749978$$
$$af = pf \cdot 3{,}0776835\ 3717525$$

42.

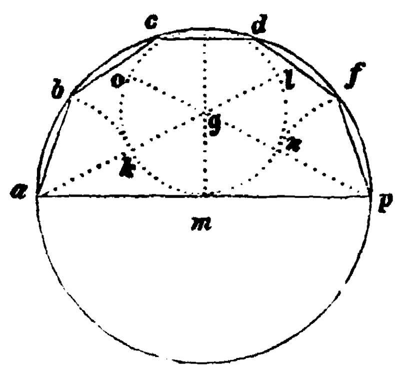
In einen Kreis ein regelmässiges Fünfeck und Zehneck zu verzeichnen.

Erste Auflösung.



Man ziehe den Durchmesser ap, trage aus a die Sehne $ag = am = \frac{1}{2}D$ in den Umfang, fälle von m auf ag eine Senkrechte, und beschreibe mit diesem Halbmesser einen concentrischen Kreis, welcher (III. 30.) die ag berührt. Errichte auf ap in a eine Senkrechte $ah = am = \frac{1}{2}D$, ziehe aus h an den concentrischen Kreis (III. 44.) eine Berührende hkl, welche den gegebenen Kreis in k, l schneidet, so ist $kl = ag = \frac{1}{2}D$, und da ha den gegebenen Kreis in a berührt (III. 30.), so ist (III. 51.) $hl \cdot hk = ha^2 = \frac{1}{4}D^2$, und $hl - hk = \frac{1}{2}D$. Da nun (V. 41.) $pc - pf = \frac{1}{2}D$, $pc \cdot pf = \frac{1}{4}D^2$, so ist $hk = ab = pf$ die Seite des Zehnecks, und $hl = pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks.

Zweite Auflösung.

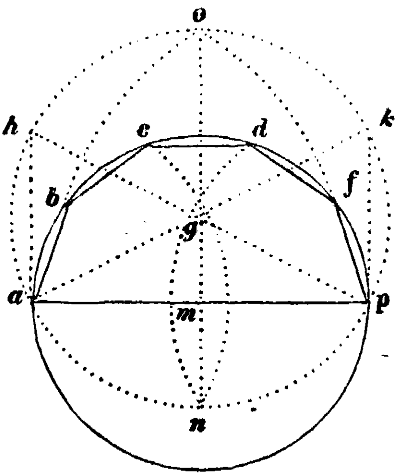


Errichte in dem Mittelpunct m auf den Durchmesser ap die Senkrechte $mg = \frac{1}{2}am = \frac{1}{4}D$, beschreibe aus g mit dem Halbmesser gm einen Kreis, welcher die ap in m berührt, ziehe ag, pg, welche ihn in k, l, n, o schneiden, so ist $al - ak = po - pn = 2mg = \frac{1}{2}D$, und (III. 51.) $al \cdot ak = po \cdot pn = am^2 = \frac{1}{4}D^2$, also ist $al = po = ad = pc$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $ak = pn = ab = pf$ die Seite des Zehnecks.

Dritte Auflösung.

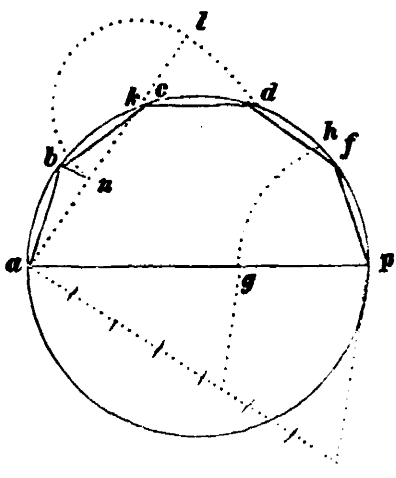
Errichte auf ap die senkrechten Linien $ah = pk = \frac{1}{2}D$, ziehe ak, ph, welche einander in g schneiden, so dass gm

senkrecht auf ap, und $= \frac{1}{4}D$, beschreibe aus g mit $ga = gp$ einen Kreis, welcher die Senkrechte mg in n, o schneidet, so ist $mo - mn = 2mg = \frac{1}{2}D$, und (III. 54.) $mo \cdot mn = am \cdot mp = \frac{1}{4}D^2$, also $mo = pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $mn = ab = pf$ die Seite des Zehnecks. Da $an^2 = am^2 + mn^2 = \frac{1}{4}D^2 + pf^2$ und $ao^2 = am^2 + mo^2 = \frac{1}{4}D^2 + pc^2$, so ist $an = pn = ac = pd$ die Seite des Fünfecks und $ao = po = af = pb$ die Diagonallinie des Fünfecks.



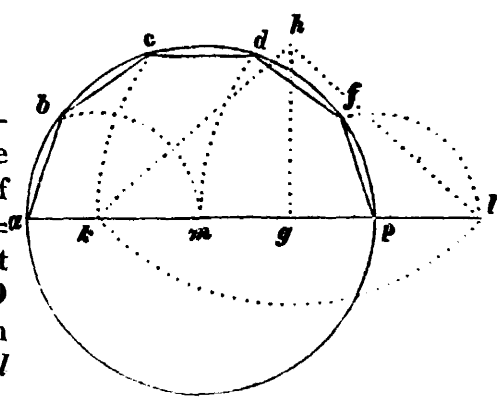
Vierte Auflösung.

Man theile den Durchmesser ap in g so, dass $pg = \frac{3}{8}D$ sey, mache die Sehne $ph = pg$, theile den Bogen ah in k in die Hälfte, ziehe die Sehne ak, so ist (V. 36.) $ak^2 = \frac{1}{2}D(D - ph) = \frac{5}{16}D^2$, also $ak = \frac{1}{4}D \cdot \sqrt{5}$. Man nehme auf der Sehne ak die Puncte l, n, so dass $kl = kn = \frac{1}{4}D$, so ist $al = \frac{1}{4}D(\sqrt{5} + 1) = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $an = \frac{1}{4}D(\sqrt{5} - 1) = ab$ die Seite des Zehnecks.



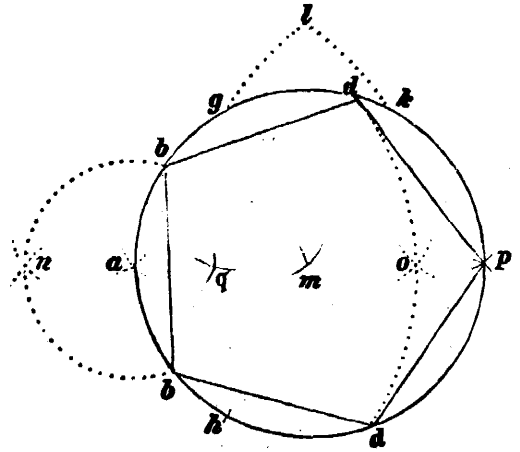
Fünfte Auflösung.

Man theile den Halbmesser mp in g in die Hälfte, errichte in g auf ap eine Senkrechte $gh = \frac{1}{2}D$, beschreibe aus h mit dem Halbmesser $ag = \frac{3}{4}D$ einen Kreis, welcher den Durchmesser ap in k, l



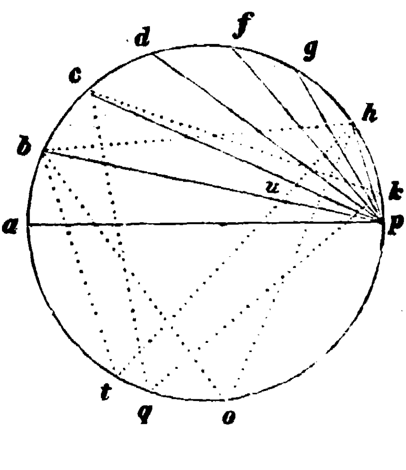
schneidet, so ist $gk^2 = gl^2 = \frac{9}{16}D^2 - \frac{4}{16}D^2 = \frac{5}{16}D^2$, also $gk = gl = \frac{1}{4}D \cdot \sqrt{5}$, also $pl = pf = km = kb = ab$ die Seite des Zehnecks, und $pk = pc = lm = ld$ die Diagonallinie des Zehnecks.

Sechste Auflösung (*Mascheroni*).



Der Mittelpunct sey m, ein beliebig gewählter Punct des Umfangs sey a. Man trage den Halbmesser von a nach g, von g nach k, von k nach p, von a nach h, so liegen a, m, p in grader Linie. Aus a und p beschreibe man mit den Halbmessern $ak = pg = D\sqrt{\frac{3}{4}}$ Bögen, welche einander in l schneiden, so ist ml senkrecht auf ap, und $= D\sqrt{\frac{1}{2}}$. Aus g und h beschreibe man mit dem Halbmesser $ml = D\sqrt{\frac{1}{2}}$ Bögen, welche einander in n und o schneiden, so liegen diese Puncte in der graden Linie ap, und wenn q die Mitte von gh und no, so ist $qn^2 = gn^2 - qg^2 = D^2 \cdot \frac{1}{2} - D^2 \cdot \frac{3}{16}$, $= D^2 \cdot \frac{5}{16}$, also $qn = qo = \frac{1}{4}D\sqrt{5}$, und da $qa = qm = \frac{1}{4}D$, so ist an die Seite des Zehnecks ao die Diagonallinie des Zehnecks. Man mache also $ab = an$, $ad = ao$, so ist $pdbbd$ ein regelmässiges Fünfeck. Diese Verzeichnung kann mittelst des Zirkels allein, ohne Lineal, ausgeführt werden.

43.



Das regelmässige eingeschriebene Fünfzehneck zu berechnen.

Es sey $ap = D$ der Durchmesser, die Sehne ab sey die Seite des Funfzehnecks, so ist pd die Ergänzungssehne des dreifachen Bogens als Diagonallinie des Zehnecks gegeben; ph die Ergänzungssehne des sechsfachen Bogens als Seite des Zehnecks gegeben; pg die Ergänzungssehne des fünffachen Bogens als Seite des Sechsecks oder Halbmesser des Kreises gegeben. Zur Berechnung der übrigen Sehnen dient folgender Hülfssatz:

„Wenn aus einem beliebigen Puncte des Umfangs nach den Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks Sehnen gezogen werden, so ist die grössere derselben gleich der Summe der beiden kleinern.“ Z. B. die Puncte b, h, o bilden ein gleichseitiges Dreieck. Es sey p ein beliebiger Punct des Umfangs. Man ziehe $bt \frown ph$. Wenn pb, ht einander in u schneiden, so ist $\angle\, ubt = uph = boh = btu = uph = \frac{2}{3} R$, also $pu = uh = ph$, $bu = ut = bt$. Auch $\angle\, uto = hbo = bho = upo = but = \frac{2}{3} R$, also $upot$ ein Parallelogramm, also $po = tu = bu$, also $pb = bu + pu = po + ph$.

Demnach giebt das gleichseitige $\triangle\, boh$ die Gleichungen:

$$pb - po = pb - pf = ph = \tfrac{1}{4} D\,(\sqrt{5} - 1),$$
$$ab + ao = ab + af = ah = \tfrac{1}{4} D \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Das gleichseitige $\triangle\, ckq$ giebt die Gleichungen:

$$pq = pc - pk = pd = \tfrac{1}{4} D\,(\sqrt{5} + 1),$$
$$aq = ak - ac = ad = \tfrac{1}{4} D \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Ausserdem gelten (V. 39.) die Gleichungen:

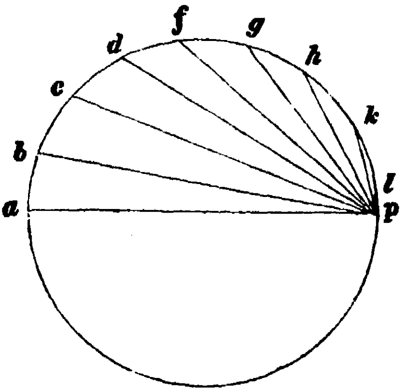
$$pb \cdot pf = \tfrac{1}{2} D \cdot (pd + pg) = \tfrac{1}{8} D^2 \cdot (\sqrt{5} + 3),$$
$$ab \cdot af = \tfrac{1}{2} D \cdot (pd - pg) = \tfrac{1}{8} D^2 \cdot (\sqrt{5} - 1),$$
$$pc \cdot pk = \tfrac{1}{2} D \cdot (pg - ph) = \tfrac{1}{8} D^2 \cdot (3 - \sqrt{5}),$$
$$ac \cdot ak = \tfrac{1}{2} D \cdot (pg + ph) = \tfrac{1}{8} D^2 \cdot (\sqrt{5} + 1).$$

Da hiernach von je zw Sehnen das Rechteck und die Summe oder Differenz gegeben ist, so lassen sie sich auf dieselbe Art, wie in V. 41. gezeigt worden, finden, und man erhält:

$$pb = D \,.\, 0{,}9781476\ 0073380,$$
$$pf = D \,.\, 0{,}6691306\ 0635885,$$
$$ab = D \,.\, 0{,}2079116\ 9081722,$$
$$af = D \,.\, 0{,}7431448\ 2547931,$$
$$pc = D \,.\, 0{,}9135454\ 5764260,$$
$$pk = D \,.\, 0{,}1045284\ 6326765,$$
$$ac = D \,.\, 0{,}4067366\ 4307580,$$
$$ak = D \,.\, 0{,}9945218\ 9536827.$$

44.

Das eingeschriebene regelmässige Siebzehneck zu berechnen.



Wenn man durch eine Ecke a den Durchmesser $ap = D$ zieht, und die folgenden Ecken mit b, c, d, f, g, h, k, l bezeichnet, so ist (V. 40.)

$$pb + pd + pg + pk - pl - ph - pf - pc = \tfrac{1}{2}D.$$

Aus diesen acht Ergänzungssehnen lassen sich vier Paare bilden, so dass der Bogen einer Ergänzungssehne entweder dem 4fachen Bogen einer andern gleich ist, oder denselben zum ganzen oder doppelten Umfange ergänzt.

Es sey nämlich der Umfang $= P$, so ist

$$\begin{array}{llll} af = 4ab & \text{und} & ab + 4af = P, \\ al = 4ac & \text{und} & ac + 4al = 2P, \\ ag + 4ad = P, & & 4ag - ad = P, \\ 4ah - ak = P, & & 4ak + ah = 2P. \end{array}$$

Demnach sind d, g; h, k; c, l; b, f zusammengehörige Puncte, und es ist:

$$(pd + pg) - (ph - pk) - (pc + pl) + (pb - pf) = \tfrac{1}{2}D.$$

Es sey $pd + pg = G$, $ph - pk = H$, $pc + pl = K$, $pb - pf = L$, so ist $G - H - K + L = \tfrac{1}{2}D$.

Jede dieser vier Linien besteht aus zwei Ergänzungssehnen, deren Rechtecke (V. 39.)

$$pd \cdot pg = \tfrac{1}{2}D \cdot K,\quad ph \cdot pk = \tfrac{1}{2}D \cdot L,\quad G \cdot H = \tfrac{1}{4}D^2,$$
$$pc \cdot pl = \tfrac{1}{2}D \cdot H,\quad pb \cdot pf = \tfrac{1}{2}D \cdot G,\quad K \cdot L = \tfrac{1}{4}D^2.$$

Setzt man $G - H = M$, $K - L = N$, so ist $M - N = \tfrac{1}{2}D$, und (V. 39.) $M \cdot N = D^2$,

also $M = \tfrac{1}{4}D(\sqrt{17} + 1)$, $N = \tfrac{1}{4}D(\sqrt{17} - 1)$,

und da $\sqrt{17} = 4{,}1231056\ 2561766\ 0549821\ 4098559\ 74$,

so ist

$$\begin{array}{ll} M = D \cdot 1{,}2807764\ 0640441 \\ N = D \cdot 0{,}7807764\ 0640441 \\ \hline \end{array}$$

hieraus:

$$\begin{array}{l} G = D \cdot 1{,}4528517\ 7210887 \\ H = D \cdot 0{,}1720753\ 6570445 \\ K = D \cdot 1{,}0247405\ 8886765 \\ L = D \cdot 0{,}2439641\ 8246324 \end{array}$$

hieraus:

$$\begin{aligned}
pd &= D \cdot 0{,}8502171\ 3572961 \\
pg &= D \cdot 0{,}6026346\ 3637925 \\
ph &= D \cdot 0{,}4457383\ 5577653 \\
pk &= D \cdot 0{,}2736629\ 9007208 \\
pc &= D \cdot 0{,}9324722\ 2940435 \\
pl &= D \cdot 0{,}0922683\ 5946330 \\
pb &= D \cdot 0{,}9829730\ 9968390 \\
pf &= D \cdot 0{,}7390089\ 1722065
\end{aligned}$$

hieraus (V. 36.)

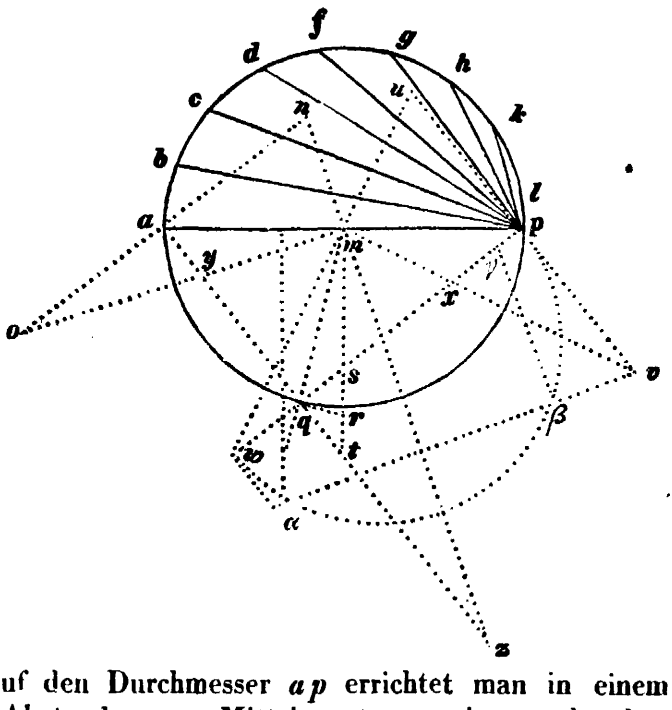
$$\begin{aligned}
ab &= D \cdot 0{,}1837495\ 1781657 \\
ac &= D \cdot 0{,}3612416\ 6618715 \\
ad &= D \cdot 0{,}5264321\ 6287735 \\
af &= D \cdot 0{,}6736956\ 4364655 \\
ag &= D \cdot 0{,}7980172\ 2728023 \\
ah &= D \cdot 0{,}8951632\ 9135506 \\
ak &= D \cdot 0{,}9618256\ 4317281 \\
al &= D \cdot 0{,}9957341\ 7629503
\end{aligned}$$

Der Umfang des Siebzehnecks ist:

$$17\,ab = D \cdot 3{,}1237418\ 0288169.$$

45.

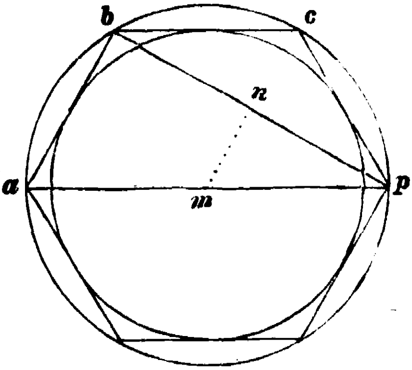
In einen Kreis ein regelmässiges Siebzehneck zu verzeichnen.



Auf den Durchmesser *ap* errichtet man in einem beliebigen Abstande vom Mittelpuncte *m* eine senkrechte Linie, welche man 4mal so lang als den Abstand vom Mittelpuncte macht. Nach dem Endpuncte derselben zieht man vom Mittelpunct eine grade Linie, welche den Kreis in q schneidet. In q errichtet man auf mq eine senkrechte Linie, welche die in m auf ap errichtete senkrechte Linie in r schneidet, so ist auch $mq = 4qr$, also $qr = \frac{1}{8}D$. Man zieht pq, aq, welche die mr in s, t schneiden, so ist $\angle\, aqp = mqr = sqt = amt = pmt = R$, also sind $\angle\, aqm = sqr$, $\angle\, mqp = rqt$; $amsq$, $pmqt$ sind Kreisvierecke, also $\angle\, maq = qsr$, $\angle\, mpq = rtq$, also $\triangle\, sqr \sim aqm$, $\triangle\, tqr \sim pqm$, also $sr = rq = rt$; mq berührt den über den Durchmesser st beschriebenen Halbkreis, also $mt - ms = st = \frac{1}{4}D$, und $mt \cdot ms = mq^2 = \frac{1}{4}D^2$. Also (V. 44.) $mt = \frac{1}{2}M$, $ms = \frac{1}{2}N$. Man errichte in p auf pq die senkrechten Linien $pu = pv = \frac{1}{2}D$, ziehe um, vm, welche die pq in w, x schneiden, so ist $\triangle\, msx \sim mpu$, $\triangle\, msw \sim mpv$, also $ws = ms = xs$, pm berührt den über dem Durchmesser wx beschriebenen Halbkreis, also $pw - px = wx = 2ms = N$, und $pw \cdot px = pm^2 = \frac{1}{4}D^2$, also (V. 44.) $pw = K$, $px = L$. Man errichte in a auf aq die senkrechten Linien $an = ao = \frac{1}{2}D$, ziehe om, nm, welche die aq in y, z schneiden, so ist $\triangle\, man \sim mty$, $\triangle\, mao \sim mtz$, $yt = mt = tz$, am berührt den über den Durchmesser yz beschriebenen Halbkreis, also ist $az - ay = yz = 2mt = M$, $az \cdot ay = am^2 = \frac{1}{4}D^2$, also (V. 44.) $az = G$, $ay = H$. Man errichte auf pw die Senkrechte $w\alpha = ay = H$, ziehe $v\alpha$, beschreibe über $pw = K$ einen Halbkreis, welcher die $v\alpha$ in β schneidet, errichte in β auf $v\alpha$ eine Senkrechte, welche die pw in γ schneidet, so sind $pv\beta\gamma$, $w\alpha\beta\gamma$ Kreisvierecke, also $\angle\, pv\gamma = p\beta\gamma = w\beta\alpha = w\gamma\alpha$, also $\triangle\, pv\gamma \sim w\gamma\alpha$, also $\frac{p\gamma}{pv} = \frac{w\alpha}{w\gamma}$, also $p\gamma \cdot \gamma w = pv \cdot w\alpha = \frac{1}{2}D \cdot H$, und $p\gamma + \gamma w = pw = K$, also (V. 44.) $w\gamma = pc$, d. h. gleich der Ergänzungssehne des doppelten Bogens des Siebzehnecks, und $p\gamma = pl$, d. h. gleich der Ergänzungssehne des achtfachen Bogens des Siebzehnecks, oder gleich der Seite des 34-Ecks.

46.

An einem regelmässigen Vieleck aus den Verhältnissen der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises zur Seite, die übrigen Stücke zu bestimmen.



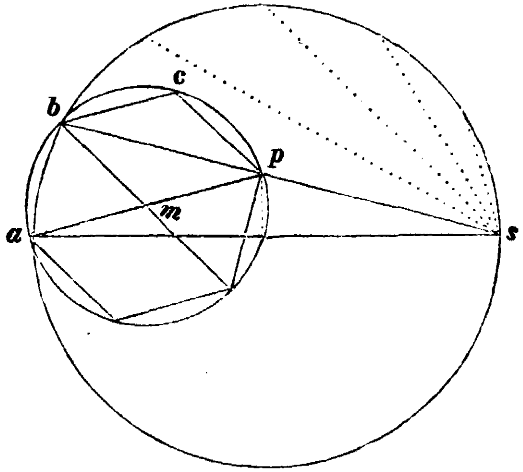
Es sey ab die Seite, ap der Durchmesser des umschriebenen Kreises, pb die Ergänzungssehne. Da das aus dem Mittelpunct m auf pb gefällte Loth mn die Sehne pb in die Hälfte theilt, und $\angle pba = R$, so ist pb der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises. Man setze das Verhältniss des Durchmessers des umschriebenen Kreises zur Seite $\frac{ap}{ab} = D$, das Verhältniss des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises zur Seite $\frac{pb}{ab} = E$, die Anzahl der Seiten $= N$, so lassen sich aus diesen drei Zahlen alle übrigen Stücke des Vielecks finden, ausserdem kann auch eine der beiden Zahlen D, E aus der andern gefunden werden. Es ist nämlich $ap^2 - pb^2 = ab^2$, also $\frac{ap^2}{ab^2} - \frac{pb^2}{ab^2} = 1$, also $D^2 - E^2 = 1$.

Nimmt man nun die Seite des Vielecks ab als gegeben an, so ist der Umfang des Vielecks $= ab \cdot N$; der Durchmesser des umschriebenen Kreises $= ab \cdot D$, der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises $= ab \cdot E$, der Inhalt des Vielecks (III. 7.) $= ab^2 \cdot \frac{N \cdot E}{4}$.

Nimmt man den Durchmesser des Kreises als gegeben an, so multiplicirt man ihn mit $\frac{1}{D}$, um die Seite, mit $\frac{N}{D}$, um den Umfang des eingeschriebenen Vielecks zu erhalten; mit $\frac{1}{E}$, um die Seite, mit $\frac{N}{E}$, um den Umfang des umschriebenen Vielecks zu erhalten; das Quadrat des Durchmessers multiplicirt man mit $\frac{NE}{4D^2}$, um den Inhalt des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{N}{4E}$, um den Inhalt des umschriebenen Vielecks zu erhalten.

Nimmt man den Halbmesser des Kreises als gegeben an, so multiplicirt man ihn mit $\frac{2}{D}$, um die Seite des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{2}{E}$, um die Seite des umschriebenen Vielecks zu erhalten; das Quadrat des Halbmessers multiplicirt man mit $\frac{NE}{D^2}$, um den Inhalt des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{N}{E}$, um den Inhalt des umschriebenen Vielecks zu erhalten. „Der Umfang des umschriebenen Vielecks verhält sich zum Durchmesser, wie der Inhalt des umschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers.“

47.



Aus dem Durchmesser des Kreises und dem Umfange eines regelmässigen eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks den Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu finden.

Vermöge V. 46. lässt sich diese Aufgabe darauf zurückführen, aus den Werthen von D und E für ein gegebenes regelmässiges Vieleck, die Werthe von D und E für ein regelmässiges Vieleck von doppelter Seitenzahl zu finden.

Wenn man in einem Vieleck, dessen Seite ab Durchmesser des umschriebenen Kreises ap, Ergänzungssehne oder Durchmesser des eingeschriebenen Kreises pb ist, diese letztere nach s verlängert, so dass $ps = ap$ ist, so ist $\angle asb = \frac{1}{2} apb$, also as der Durchmesser des umschriebenen und sb der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises eines Vielecks von doppelter Seitenzahl, dessen Seite ab ist. Bei jenem Vielecke ist $\frac{ap}{ab} = D$, $\frac{pb}{ab} = E$, bei dem andern ist $\frac{as}{ab} = D'$, $\frac{sb}{ab} = E'$. Aber $sb = sp + pb = ap + pb$, also $\frac{sb}{ab} = \frac{ap}{ab} + \frac{pb}{ab}$, also $E' = D + E$.

Wenn man also bei einem regelmässigen Vielecke die Werthe von D und E addirt, so erhält man den Werth von E für ein Vieleck von doppelter Seitenzahl, und hieraus den entsprechenden Werth von D durch die Gleichung $D^2 = E^2 + 1$. Auf diese Art fortfahrend erhält man die Werthe von D und E für ein Vieleck von 4facher, 8facher, 16facher u. s. w. Seitenzahl.

Da es, besonders bei vielstelligen Zahlen, beschwerlich ist, das Quadrat von E zu bilden, und nachher wieder die Quadratwurzel aus $E^2 + 1$ zu ziehen, so kann man diese doppelte Rechnung durch genäherte Auflösung einer quadratischen Zahlengleichung umgehen. Denn da $D^2 = E^2 + 1$, oder $D^2 - E^2 = 1$, oder $(D - E)(D + E) = 1$ ist, so sey $D = E + x$. Dann ist $x(2E + x) = 1$, oder $x^2 + 2E \cdot x = 1$. Der schon berechnete Theil von x sey a, der zu findende b, so ist $x = a + b$, $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$, also $(2a + 2E)b + b^2 = 1 - 2E \cdot a - a^2 = r$. Um b zu finden, dividirt man also den Rest r mit $2a + 2E$.

Beispiel.

Für $N = 6$ ist (III. 48.) $D = 2$, $E = \sqrt{3} = 1{,}732050807$, also ist für $N = 12$, $E = 3{,}732050807$.

Man nimmt zuerst $a = 0{,}1$

$2E$	7,464101614
$2a$	2
	7,66410161
	6
	7,7241016
	2
	7,726101
	12
	7,72730
	10
	7,7274

	1
$2Ea$	0,7464101614
a^2	1
	2435898386
3.....	2299230484
3^2....	9
	127667902
1.......	77241016
1^2......	1
	50416886
6.......	46356610
6^2......	36
	4056676
5........	3863651
5^2.......	25
	193000
2.........	154548
4..........	30909
9...........	6955
8............	617

$x =$	0,131652498
E	3,732050807
D	3,863703305
E'	7,595754112

Man kann auch unmittelbar aus einem Werthe von E den Werth des nächstfolgenden E durch genäherte Auflösung einer quadratischen Zahlengleichung finden. Denn da $E' - E = D$, so ist $(E' - E)^2 = D^2 = E^2 + 1$, oder $E'^2 - 2E' \cdot E = 1$. Setzt man $E' = x$, so ist $x^2 - 2Ex = 1$. Man nimmt also $x = a + b$, $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so ist $(2a - 2E)\, b + b^2 = 1 + 2Ea - a^2 = r$. Um also b zu finden, dividirt man den Rest r mit $2a - 2E$. Im obigen Beispiel nimmt man zuerst $a = 7$.

$2a$ 14	
$2E$ 7,464101614	
6,53589838	
1,0	
7,5358983	
18	
7,715898	
10	
7,72589	
14	
7,7272	
10	
7,727	
$x = E' = 7{,}595754112$	

	1
$2Ea$	52,248711298
a^2	49
	4,248711298
5.....	3267949193
5^2....	25
	730762105
9......	678230855
9^2.....	81
	44431250
5.......	38579492
5^2......	25
	5826758
7........	5408130
7^2.......	49
	418138
5.........	386365
5^2........	25
	31771
4..........	30909
1..........	772
1..........	77
2..........	15

48.

Aus dem Durchmesser und dem Umfange eines eingeschriebenen und umschriebenen regelmässigen Vielecks den Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von halber Seitenzahl zu finden.

Vermöge V. 46. lässt sich diese Aufgabe darauf zurückführen, aus den Werthen von D und E für ein Vieleck, diejenigen für ein Vieleck von halber Seitenzahl zu finden. Da

$D^2 - E^2 = 1$, und $D + E = E'$, so ist $(D - E)\,E' = 1$, also $D - E = \frac{1}{E'}$, also $2D = E' + \frac{1}{E'}$ und $2E = E' - \frac{1}{E'}$.

Beispiel.

Für das Zwölfeck ist (V. 47.)

$E' = 3,732050807$

2......746410161
6......223923048
7.......26124356
9........3358845
4..........149282
9...........33588
1.............373
9.............336
3...............11

1,000000000

also durch Division

$\frac{1}{E'} = 0,267949193$

$E' = 3,732050807$

Summe 4

Diff. 3,464101614

$D = 2,$

$E = 1,732050807$

für das Sechseck.

49.

Den Umfang des umschriebenen und eingeschriebenen 96-Ecks nach Archimedes zu berechnen.

Archimedes (287—212 vor Christo) nahm für die Seite des Sechsecks die Zahl 153 zur Einheit an, und berechnete hieraus für die Vielecke von 12, 24, 48, 96 Seiten (V. 47.) die Werthe von E und D, wobei er absichtlich die Zahlen etwas kleiner nahm, als sie wirklich seyn müssen, nämlich:

N	$E \times 153$	$D \times 153$
6	265	306
12	571	$591\frac{1}{8}$
24	$1162\frac{1}{8}$	$1172\frac{1}{8}$
48	$2334\frac{1}{4}$	$2339\frac{1}{4}$
96	$4673\frac{1}{2}$	—

Folglich ist beim 96-Eck die Zahl E etwas grösser als $\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$. Aber (V. 46.) der Umfang des umschriebenen Vielecks ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit der Zahl $\frac{N}{E}$. Also ist das Verhältniss des Umfangs des umschriebenen 96-Ecks

zum Durchmesser etwas kleiner als die Zahl $\frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}$.
Die genauere Berechnung giebt $3{,}1427146 = 3\frac{4863}{34075}$.

Ferner nahm Archimedes für die Seite des Sechsecks die Zahl 780 zur Einheit an, und berechnete hieraus für D und E Zahlen, welche er etwas grösser annahm, als sie wirklich seyn müssen, nämlich:

N	$E \times 780$	$D \times 780$
6	1351	1560
12	2911	$3013\frac{3}{4}$
24	$5924\frac{3}{4}$	$5976\frac{7}{44}$
48	$11900\frac{10}{11}$	$11926\frac{17}{33}$
96	$23827\frac{14}{33}$	$23840\frac{5}{22}$

Folglich ist beim 96-Eck die Zahl D etwas kleiner als $\frac{23840\frac{5}{22}}{780}$. Aber (V. 46.) der Umfang des eingeschriebenen Vielecks ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit der Zahl $\frac{N}{D}$. Also ist das Verhältniss des Umfangs des eingeschriebenen 96-Ecks zum Durchmesser etwas grösser als die Zahl $\frac{96 \times 780}{23840\frac{5}{22}}$ $= 3\frac{10}{71}$. Die genauere Berechnung giebt $3{,}14103195 = 3\frac{11}{78}$ $= 3\frac{287}{2035}$.

50.

Die regelmässigen Vielecke zu berechnen, welche aus den Vielecken von 3, 4, 5, 15 Seiten durch fortgesetzte Halbirung des Centralwinkels entstehen.

Aus dem Dreieck.

Beim Dreieck ist $D = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $E = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Beim Sechseck $D = 2$, $E = \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ 0756887\ 7293527\ 44.$

N		
3	E	0,5773502 6918962 5764509
	D	1,1547005 3837925 1529018
6	E	1,7320508 0756887 7293527
	D	2,
12	E	3,7320508 0756887 7293527
	D	3,8637033 0515627 3146998
24	E	7,5957541 1272515 0440526
	D	7,6612975 7554038 8669090
48	E	15,2570516 8826553 9109617
	D	15,2897882 9867851 1696056
96	E	30,5468399 8694405 0805674
	D	30,5632039 0907936 2388339
192	E	61,1100438 9602341 3194013
	D	61,1182253 0942660 7070383
384	E	122,2282692 0545002 0264397
	D	122,2323598 4370200 7620567
768	E	244,4606290 4915202 7884964
	D	244,4626743 5972124 7628553
1536	E	488,9233034 0887327 5513517
	D	488,9243260 6308837 0354672
3072	E	977,8476294 7196164 5868190
	D	977,8481407 9893550 4118994
6144	E	1955,6957702 7089714 9987185
	D	1955,6960259 3436736 7974646
12288	E	3911,3917962 0526451 7961831
	D	3911,3919240 3699753 8062704
24576	E	7822,7837202 4226205 6024535
	D	7822,7837841 5812830 4963429
49152	E	15645,5675044 0039036 0987965
	D	15645,5675363 5832345 2818470
98304	E	31291,1350407 5871381 3806436

Aus dem Viereck.

Beim Viereck ist $D = \sqrt{2}$, $E = 1$.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ 6237309\ 5048801\ 6887242$
$0969807\ 856967$

N		
4	E	1,
	D	1,4142135 6237309 5048801
8	E	2,4142135 6237309 5048801
	D	2,6131259 2975275 3055713
16	E	5,0273394 9212584 8104514
	D	5,1258308 9548301 2357592
32	E	10,1531703 8760886 0462107
	D	10,2022972 3737832 7716212
64	E	20,3554676 2498718 8178319
	D	20,3800162 4709611 3622424
128	E	40,7354838 7208330 1800743
	D	40,7477563 3446286 8075974
256	E	81,4832402 0654616 9876718
	D	81,4893762 0670379 3278682
512	E	162,9726164 1324996 3155401
	D	162,9756843 8445138 5820391
1024	E	325,9483007 9770134 8975793
	D	325,9498347 7969243 7642315
2048	E	651,8981355 7739378 6618108
	D	651,8989025 6793812 9710713
4096	E	1303,7970381 4533191 6328822
	D	1303,7974216 4054768 7769810
8192	E	2607,5944597 8587960 4098633
	D	2607,5946515 3348043 9807518
16384	L	5215,1891113 1936004 3906151
	D	5215,1892071 9315958 0509191
32768	E	10430,3783185 1251962 4415343
	D	10430,3783664 4941928 2560439
65536	E	20860,7566849 6193890 6975782
	D	20860,7567089 3038872 2278777
131072	E	41721,5133938 9232762 9254560

Aus dem Fünfeck.

Beim Fünfeck ist $D = \sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, $E = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$.
Beim Zehneck ist $D = 1 + \sqrt{5}$, $E = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

$\sqrt{5} =$ 2,2360679 7749978 9696409 1736687 3127623 5440618

N		
5	E	1,3763819 2047117 3538207
	D	1,7013016 1670407 9864363
10	E	3,0776835 3717525 3402570
	D	3,2360679 7749978 9696409
20	E	6,3137515 1467504 3098979
	D	6,3924532 2149966 1547042
40	E	12,7062047 3617470 4646021
	D	12,7454948 4318237 4286193
80	E	25,4516995 7935707 8932215
	D	25,4713370 5712845 5907025
160	E	50,9230366 3648553 4839240
	D	50,9328544 2895232 0532730
320	E	101,8558910 6543785 5371971
	D	101,8607998 4338598 9054850
640	E	203,7166909 0882384 4426822
	D	203,7191452 8301278 8280843
1280	E	407,4358361 9183663 2707665
	D	407,4370633 7708298 0960859
2560	E	814,8728995 6891961 3668525
	D	814,8735131 6131177 2857753
5120	E	1629,7464127 3023138 6526279
	D	1629,7467195 2639858 9270029
10240	E	3259,4931322 5662997 5796308
	D	3259,4932856 5470996 7562336
20480	E	6518,9864179 1133994 3358644
	D	6518,9864946 1037948 8040943
40960	E	13037,9729125 2171943 1399588
	D	13037,9729508 7123914 7340648
81920	E	26075,9458633 9295857 8740236
	D	26075,9458825 6771842 9660755
163840	E	52151,8917459 6067700 8400992

Aus dem Funfzehneck.

Beim 15-Eck ist $D = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$, $E = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Beim 30-Eck ist $D = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}$, $E = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}}$.

$\sqrt{15} = 3{,}8729833\ 4620741\ 6885179\ 2653997\ 81$

$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
$= 3{,}8042260\ 6518061\ 4288465\ 7573335\ 175285$

N.		
15	*E*	4,7046301 0947845 4233586
	D	4,8097343 4474413 0696097
30	*E*	9,5143644 5422258 4929683
	D	9,5667722 3350562 6133722
60	*E*	19,0811366 8772821 1063406
	D	19,1073226 0929739 7992296
120	*E*	38,1884592 9702560 9055702
	D	38,2015500 1411044 4141305
240	*E*	76,3900093 1113605 3197008
	D	76,3965543 8928808 7216265
480	*E*	152,7865637 0042414 0413274
	D	152,7898362 0445361 1563336
960	*E*	305,5763999 0487775 1976611
	D	305,5780361 5251173 9691919
1920	*E*	611,1544360 5738949 1668530
	D	611,1552541 8065889 4242828
3840	*E*	1222,3096902 3804838 5911359
	D	1222,3100992 9961463 8356811
7680	*E*	2444,6197895 3766302 4268170
	D	2444,6199940 6843759 4387831
15360	*E*	4889,2397836 0610061 8656001
	D	4889,2398858 7148683 4203016
30720	*E*	9778,4796694 7758745 2859017
	D	9778,4797206 1028042 6943425
61440	*E*	19556,9593900 8786787 9802443
	D	19556,9594156 5421435 0133509
122880	*E*	39113,9188057 4208222 9935952

Anmerkung. Die vorstehenden Zahlen sind bis mit zur 21sten Decimalstelle richtig, da sie auf 24 Decimalstellen berechnet wurden.

51.

Ein regelmässiges Vieleck im Allgemeinen zu berechnen.

In den vorhergehenden Aufgaben ist gezeigt worden, wie die regelmässigen Vielecke von 3, 4, 5, 15, 17 Seiten, und diejenigen, welche aus diesen durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl oder Halbirung des Centralwinkels entstehen, durch Auflösung quadratischer Gleichungen berechnet werden können. Hieher gehören auch die Vielecke von 257 und 65537 Seiten, und überhaupt alle diejenigen, deren Seitenzahl eine Primzahl ist, welche um 1 vermindert, eine Potenz von 2 giebt, wie der berühmte Gauss (*disquisitiones arithmeticae, Lipsiae* 1801. §. 365) zuerst bewiesen hat. Die Berechnung der Vielecke von 7, 9, 13, 19 Seiten beruht auf der Auflösung kubischer Gleichungen, und die Berechnung des 11-Ecks auf einer Gleichung vom 5ten Grade. Um diese Gleichungen zu finden, wendet man die Sätze V. 39. 40. an. Diese Vielecke können daher nicht durch Elementargeometrie, sondern nur durch Annäherung in den Kreis beschrieben werden. Um ein regelmässiges Vieleck zu berechnen, ist es hinreichend, die Werthe von D und E, d. h. die Verhältnisse der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises zur Seite, zu kennen, weil aus diesen beiden Zahlen alle übrigen, welche sich auf das Vieleck beziehen (V. 46.) berechnet werden können.

N	E	D
3	0,5773502 6918962	1,1547005 3837925
4	1,	1,4142135 6237309
5	1,3763819 2047117	1,7013016 1670407
6	1,7320508 0756887	2,
7	2,0765213 9657233	2,3047648 7096248
8	2,4142135 6237309	2,6131259 2975275
9	2,7474774 1945462	2,9238044 0016308
10	3,0776835 3717525	3,2360679 7749978
11	3,4056872 3888925	3,5494655 3288422
12	3,7320508 0756887	3,8637033 0515627
13	4,0571594 8563811	4,1785814 6886037
14	4,3812862 6753482	4,4939592 0743493
15	4,7046301 0947845	4,8097343 4474413
16	5,0273394 9212584	5,1258308 9548301
17	5,3495275 0550977	5,4421911 5175180

N	E	D
18	5,6712818 1961770	5,7587704 8314363
19	5,9926714 5852349	6,0755338 2097426
20	6,3137515 1467504	6,3924532 2149966

Die vorstehenden Zahlen sind bis mit zur 14ten Decimalstelle richtig, da sie bis auf 18 Decimalstellen berechnet wurden, und zwar auf doppelte Art, theils durch Auflösung der Gleichungen, theils durch unendliche Reihen. Aus diesen sind die Zahlen der folgenden Tafel berechnet worden, welche bis mit zur 10ten Decimalstelle richtig sind.

N	$\frac{1}{4} \cdot N \cdot E$	$\frac{N}{D}$	$\frac{N}{E}$	$\frac{NE}{D^2}$
3	0,4330127018	2,5980762113	5,1961524226	1,2990381056
4	1,	2,8284271247	4,	2,
5	1,7204774005	2,9389262614	3,6327126400	2,3776412907
6	2,5980762113	3,	3,4641016151	2,5980762113
7	3,6339124440	3,0371861738	3,3710223316	2,7364101886
8	4,8284271247	3,0614674589	3,3137084989	2,8284271247
9	6,1818241937	3,0781812899	3,2757321083	2,8925442436
10	7,6942088429	3,0901699437	3,2491969623	2,9389262614
11	9,3656399069	3,0990581252	3,2298914223	2,9735244960
12	11,1961524227	3,1058285412	3,2153903091	3,
13	13,1857683283	3,1111036357	3,2042122194	3,0207006182
14	15,3345019363	3,1152930753	3,1954086414	3,0371861738
15	17,6423629105	3,1186753622	3,1883484250	3,0505248230
16	20,1093579685	3,1214451522	3,1825978780	3,0614674589
17	22,7354918984	3,1237418028	3,1778507508	3,0705541625
18	25,5207681882	3,1256671980	3,1738856527	3,0781812899
19	28,4651894279	3,1272972153	3,1705392380	3,0846449574
20	31,5687575733	3,1286893008	3,1676888064	3,0901699437

Die erste Columne giebt das Verhältniss des Inhalts zum Quadrat der Seite, die zweite das Verhältniss des Umfangs des eingeschriebenen Vielecks zum Durchmesser; die dritte das Verhältniss des Umfangs des umschriebenen Vielecks zum Durchmesser, so wie auch das Verhältniss des Inhalts des umschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers, und das Verhältniss des Quadrats des halben Umfangs zum Inhalt des Vielecks. Die vierte Columne giebt das Verhältniss des Inhalts des eingeschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers.

Die Zahl der zweiten Columne ist die mittlere Proportionalzahl zwischen den nebenstehenden Zahlen der dritten und vierten Columne. Bei einem Vieleck von grader Seitenzahl ist die Zahl der vierten Columne gleich derjenigen Zahl, welche in der zweiten Columne einem Vieleck von halber Seitenzahl entspricht.

Beispiele.

1) Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks sey 220 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

Der halbe Umfang = 110, das Quadrat davon 12100, dividirt mit der Zahl der dritten Columne 5,19615 giebt 2328,6 □Fuss Inhalt.

2) Der Umfang eines regelmässigen 12-Ecks sey 220 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

Das Quadrat des halben Umfangs ist 12100, dividirt mit der Zahl der dritten Columne 3,21539 giebt 3763,1 □Fuss Inhalt.

3) Die Seite eines regelmässigen 12-Ecks sey 16 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

Das Quadrat der Seite ist 256, multiplicirt mit der Zahl der ersten Columne 11,19615 giebt 2866,2 □Fuss Inhalt.

4) Der Durchmesser eines Kreises sey 125 Fuss, wie gross ist der Inhalt des eingeschriebenen und umschriebenen 8-Ecks?

Der Halbmesser $62\frac{1}{2}$, das Quadrat davon 3906,25 multiplicirt mit den Zahlen der vierten und dritten Columne 2,828427 .. und 3,313708 .. giebt den Inhalt des eingeschriebenen 11048,5, des umschriebenen 12944,17 □Fuss.

5) Der Inhalt eines regelmässigen 8-Ecks sey 12100 □Fuss, wie gross ist die Seite?

Der Inhalt 12100 dividirt mit der Zahl der ersten Columne giebt 2505,99, die Quadratwurzel hieraus giebt die Seite 50,06 Fuss.

6) Der Inhalt eines regelmässigen 13-Ecks sey 12100 □Fuss, wie gross ist der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises?

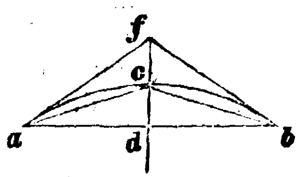
Der Inhalt 12100 dividirt mit den Zahlen der vierten und dritten Columne 3,020700 und 3,204212.. giebt 4005,69.. und 3776,28.. die Quadratwurzeln hieraus geben die Halbmesser 63,2905, und 61,4514, also die Durchmesser des umschriebenen Kreises 126,58, des eingeschriebenen Kreises 122,90 Fuss.

7) Der Inhalt eines regelmässigen 9-Ecks sey 325 □Fuss, wie gross ist der Umfang?

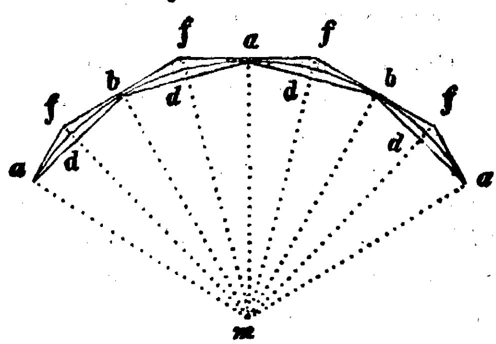
Der Inhalt 325 multiplicirt mit der Zahl der dritten Columne 3,2757321 giebt 1064,613, die Quadratwurzel hieraus giebt den halben Umfang 32,628, also den Umfang 65,256 Fuss.

52.

Das Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser, und des Kreisinhalts zum Quadrat des Halbmessers, ist für alle Kreise die unveränderliche Zahl $\pi = 3{,}14159265358979$.



Ein Bogen *acb* ist grösser als die grade Linie oder Sehne *ab*, welche seine Endpuncte verbindet, und kleiner als die Summe der beiden Berührungslinien *fa*, *fb*, welche an den Endpuncten in derselben Ebene gezogen werden. Der Inhalt des Segments *acb* ist grösser als der Inhalt des △ *acb*, und kleiner als der Inhalt des △ *afb*.



Wenn also in und um einen Kreis ein regelmässiges Vieleck beschrieben wird, so ist jeder Bogen des Kreises grösser als die zwischen seinen Endpuncten enthaltene innere Polygonlinie, und kleiner als die zwischen seinen Endpuncten enthaltene äussere Polygonlinie.

Eben so ist der Inhalt des Kreissectors grösser als der Inhalt des entsprechenden eingeschriebenen Polygonsectors, und kleiner als der Inhalt des entsprechenden umschriebenen Polygonsectors.

Derselbe Satz gilt auch für den ganzen Kreis. Der Umfang des Kreises ist grösser als der Umfang des eingeschriebenen Vielecks und kleiner als der Umfang des umschriebenen Vielecks. Der Inhalt des Kreises ist grösser als der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks und kleiner als der Inhalt des umschriebenen Vielecks.

Da $af^2 = ad^2 + df^2$, so nähert sich af desto mehr der Linie ad, oder $af + fb$ desto mehr der Sehne ab, je kleiner df ist. Aber $ad^2 = md \cdot df$, also ist df desto kleiner, je grösser md, d. h. je kleiner der Mittelpunctswinkel amb ist, bei gleichbleibender Sehne ab. Je grösser also die Anzahl der Theile des ganzen Bogens aa ist, desto mehr nähert sich die Länge der äussern Polygonlinie der Länge der innern Polygonlinie, und der Inhalt des äussern Polygonsectors dem Inhalt des innern Polygonsectors. Folglich ist die Länge des Kreisbogens die gemeinschaftliche Grenze, welcher sich die äussere und innere Polygonlinie desto mehr annähern, je grösser man die Anzahl der Theile macht. Eben so ist der Inhalt des Kreissectors die gemeinschaftliche Grenze, welcher sich der Inhalt des äussern und innern Polygonsectors desto mehr annähern, je grösser man die Anzahl der Theile macht.

Derselbe Satz gilt auch für den ganzen Kreis. Je grösser die Anzahl der Seiten des Vielecks ist, desto mehr nähern sich der Umfang des äussern und innern Vielecks dem Umfange des Kreises, und desto mehr nähert sich der Inhalt des äussern und innern Vielecks dem Inhalt des Kreises.

Da $\triangle\, amf = \frac{1}{2} ma \cdot af = \frac{1}{4} D \cdot af$, so ist der Inhalt des äussern Polygonsectors gleich dem Product der äussern Polygonlinie mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, und verhält sich zum Quadrat des Halbmessers wie die äussere Polygonlinie zum Durchmesser. Folglich ist auch der Inhalt des Kreissectors gleich dem Product des Kreisbogens mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, und verhält sich zum Quadrat des Halbmessers wie der Bogen zum Durchmesser.

Derselbe Satz gilt auch für den ganzen Kreis. Der Inhalt des Kreises ist gleich dem Product des Kreisumfangs mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, und verhält sich zum Quadrat des Halbmessers wie der Umfang zum Durchmesser.

Um also dieses Kreisverhältniss π für eine bestimmte Anzahl Stellen zu erhalten, nimmt man (V. 50.) ein Vieleck, in welchem die Werthe von D und E auf ebensoviel Stellen übereinstimmen. Z. B. beim 96-Eck ist $D = 30{,}5632\ldots$ und $E = 30{,}5468\ldots$ die Grenzen sind also

$$\frac{N}{D} = 3{,}14103\ldots \quad \text{und} \quad \frac{N}{E} = 3{,}14271\ldots$$

Archimedes fand aus dem 96-Eck (V. 49.) $\frac{N}{D} = 3\frac{10}{71}$ und $\frac{N}{E} = 3\frac{1}{7}$ oder $\frac{1561}{497}$ und $\frac{1562}{497}$. Aus demselben 96-Eck giebt die genauere Berechnung die Grenzen $3\frac{11}{78}$ und $3\frac{1}{7}$, oder $\frac{1715}{546}$ und $\frac{1716}{546}$.

Das Vieleck von 98304 Seiten giebt

$$E = 31291{,}1350407, \quad D = 31291{,}1350567$$

also $\frac{N}{D} = 3{,}1415926530, \quad \frac{N}{E} = 3{,}1415926547.$

Das Vieleck von 131072 Seiten giebt

$$E = 41721{,}51339389, \quad D = 41721{,}51340587,$$

also $\frac{N}{D} = 3{,}14159265329, \quad \frac{N}{E} = 3{,}14159265419.$

Das Vieleck von 163840 Seiten giebt

$$E = 52151{,}8917459606, \quad D = 52151{,}8917555481,$$

also $\frac{N}{D} = 3{,}14159265339, \quad \frac{N}{E} = 3{,}14159265397.$

Wenn man die Werthe von E und D für eine so grosse Anzahl Seiten wie in (V. 50.) berechnet hat, so ist es leicht, die Tafel noch viel weiter auszudehnen und dadurch das Kreisverhältniss auf eine grössere Anzahl von Decimalstellen zu berechnen. Nämlich es ist der Unterschied von D und E für

$N = 40960 \ldots\ldots 0{,}0000383\ 4951971\ 5941060$
$N = 81920 \ldots\ldots 0{,}0000191\ 7475985\ 0920519$

Der zweite Unterschied ist bis mit zur 19ten Decimalstelle die Hälfte des vorigen Unterschiedes. Also wird auch die Hälfte des Unterschiedes für $N = 81920$ gleich dem Unterschied für $N = 163840$ seyn. Dadurch wird man für dasselbe N den Werth von D erhalten, durch Addition von D und E den Werth von E für $N = 327680$ finden, und so durch fortgesetzte Halbirung der Unterschiede, und durch Addition die Rechnung bis auf ein Vieleck fortführen können, bei welchem D und E in der 19ten Decimalstelle übereinstimmen, wodurch man das Kreisverhältniss auf mehr als 40 Decimalstellen finden kann.

Durch Quadratwurzeln lassen sich einige ziemlich genaue Annäherungen für die Zahl π finden

z. B. $4\frac{2}{75} + \frac{1}{30}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = 3{,}141592652$

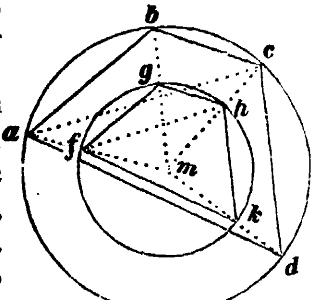
$$\sqrt{9{,}8696} = 3{,}1415919.. \quad \sqrt{\frac{10975}{1112}} = 3{,}141592639.$$

Bemerkenswerth ist die von Adriaan Anthonisse, Bürgermeister zu Alkmaar, etwa um 1584 gefundene Annäherung $\pi > 3\frac{15}{106} < 3\frac{17}{120}$, im Mittel $\pi = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113}$

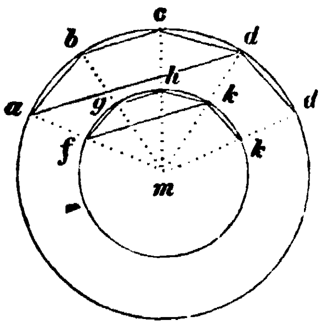
$= 3{,}14159292$. Dieses Verhältniss lässt sich leicht geometrisch construiren, da $16 = 4^2$, $113 = 8^2 + 7^2$ ist. Siehe Aufgabe 56.

53.

Alle Kreise sind einander ähnlich.



Man beschreibe in den Umfang des einen Kreises ein beliebiges Vieleck $abcd$. Die Halbmesser ma, mb, mc, md schneiden den concentrischen Kreis in f, g, h, k. Da die $\triangle\, mab$, mfg gleichschenklig sind und bei m einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so ist $\angle mfg = mab$, also $fg \frown ab$. Eben so $gh \frown bc$, $hk \frown cd$, also (II. 49.) $fh \frown ac$, $fk \frown ad$, $gk \frown bd$ u. s. w. Also $fghk \sim abcd$. Jedem in den einen Kreis beschriebenen Vieleck entspricht also ein ähnliches und ähnlich liegendes Vieleck im andern Kreise. Beschreibt man also in den Sector adm des einen Kreises einen regelmässigen Polygonsector $abcdm$, so entspricht demselben in dem andern Kreise ein ähnlicher und ähnlich liegender Polygonsector $fghkm$. Die Polygonlinien $abcd$, $fghk$ verhalten sich (II. 71.) wie die Halbmesser ma, mf, und die Flächen der Polygonsectoren $abcdm$, $fghkm$ verhalten sich (III. 67.) wie die Quadrate der Halbmesser ma, mf. Da dieses für jede beliebige Anzahl Seiten stattfindet, und die Länge der Polygonlinie sich desto mehr der Länge des Kreisbogens, der Inhalt des Polygonsectors sich desto mehr dem Inhalt des Kreissectors annähert (V. 52.), je grösser die Anzahl der Seiten ist, so müssen sich auch die Längen der Kreisbögen ad, fk, welche gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechen, wie die Halbmesser ma, mf, oder wie die Sehnen ad, fk verhalten. Aus gleichem Grunde müssen sich die Flächen der Kreissectoren adm, fkm, welche gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechen, wie die Quadrate der Halbmesser ma, mf, oder wie die Quadrate der Sehnen ad, fk verhalten. Da sich die ähnlichen Centraldreiecke adm, fkm, welche gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechen, eben-

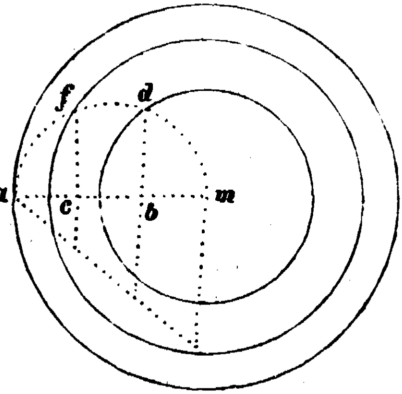


falls wie die Quadrate der Halbmesser *ma*, *mf*, oder der Sehnen *ad*, *fk* verhalten (III. 64.), so müssen sich auch die Kreissegmente *abcd*, *fghk*, welche gleichen Mittelpuncts-winkeln entsprechen, wie die Quadrate der Halbmesser *ma*, *mf*, oder der Sehnen *ad*, *fk* verhalten.

Derselbe Satz muss nun auch für die ganzen Kreise gültig seyn. Demnach verhalten sich die Umfänge der Kreise wie ihre Halbmesser oder Durchmesser, oder wie ihre, gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechenden Sehnen; und die Flächen der Kreise wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser, oder ihrer, gleichen Mittelpunctswinkeln entsprechenden Sehnen.

54.

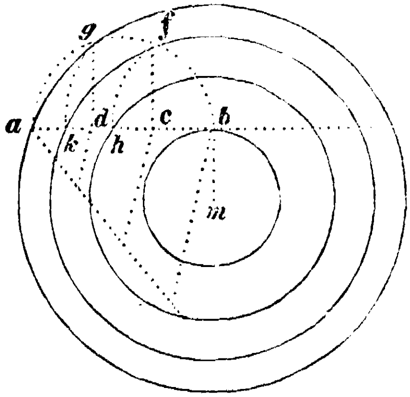
Einen Kreis durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.



Es sey der Kreis in n gleiche Theile zu theilen. Man theile seinen Halbmesser ma in gleiche Theile in b, c u. s. w., so dass $\frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u. s. w., beschreibe über ma einen Halbkreis, errichte auf ma in den Theilungspuncten senkrechte Linien, welche den Halbkreis in d, f schneiden, so ist (III. 56. 58.) $\frac{md^2}{ma^2} = \frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mf^2}{ma^2} = \frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u. s. w. Man beschreibe mit den Halbmessern md, mf u. s. w. concentrische Kreise, so ist (V. 53.) $\frac{\text{Kreis } md}{\text{Kreis } ma} = \frac{md^2}{ma^2} = \frac{1}{n}$, $\frac{\text{Kreis } mf}{\text{Kreis } ma} = \frac{mf^2}{ma^2} = \frac{2}{n}$ u. s. w.

55.

Einen Kreisring durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.



Die zwischen zwei concentrischen Kreisen, z. B. zwischen den Kreisen ma, mb enthaltene Fläche heisst ein Kreisring. Man ziehe von einem beliebigen Puncte a des äussern Kreises an den innern Kreis die Berührende ab. Soll der Kreisring in n gleiche Theile getheilt werden, so theile man ab in c, d u. s. w. in n gleiche Theile, errichte in den Theilungspuncten auf ab senkrechte Linien, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in f, g u. s. w. schneiden, mache $bh = bf$, $bk = bg$ u. s. w., beschreibe concentrische Kreise mit den Halbmessern mh, mk u. s. w., so leisten diese das Verlangte. Denn $mh^2 - mb^2 = bh^2 = bf^2$, $mk^2 - mb^2 = bk^2 = bg^2$, $ma^2 - mb^2 = ab^2$, also $\frac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{bf^2}{ab^2} = \frac{bc}{ab} = \frac{1}{n}$, $\frac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{bg^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab} = \frac{2}{n}$. Aber (V. 53.) $\frac{\text{Kreis } ma}{\text{Kreis } mb} = \frac{ma^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mh}{\text{Kreis } mb} = \frac{mh^2}{mb^2}$, $\frac{\text{Kreis } mk}{\text{Kreis } mb} = \frac{mk^2}{mb^2}$, also

$$\frac{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{ma^2 - mb^2}{mb^2}, \quad \frac{\text{Kreis } mh - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{mh^2 - mb^2}{mb^2}, \quad \frac{\text{Kreis } mk - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } mb} = \frac{mk^2 - mb^2}{mb^2},$$

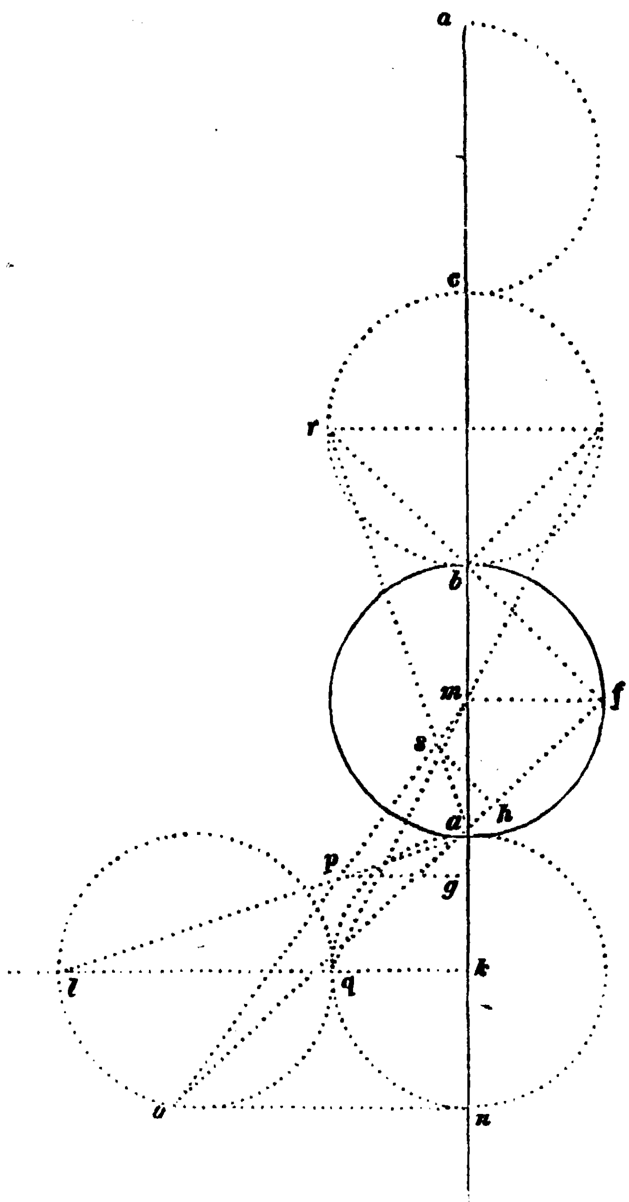
also

$$\frac{\text{Kreis } mh - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb} = \frac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\text{Kreis } mk - \text{Kreis } mb}{\text{Kreis } ma - \text{Kreis } mb} = \frac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{2}{n} \text{ u. s. w.}$$

56.

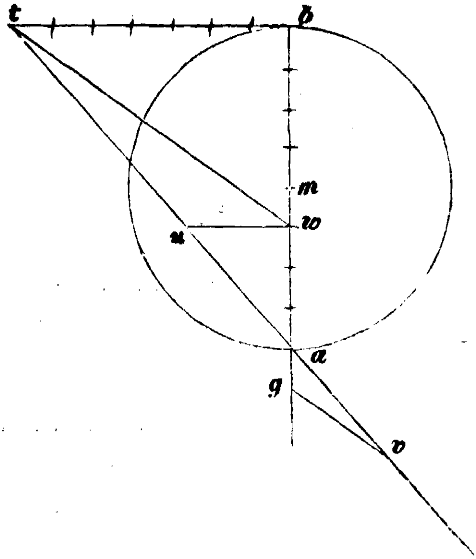
Den Umfang des Kreises aus dem Durchmesser oder dem Inhalt zu bestimmen.



Zur Rectification des Kreises, d. h. zur Verwandlung des Umfangs in eine grade Linie, nimmt man $ad = 3ab$, und setzt daran $ag = \frac{1}{7}ab$, oder noch genauer $= ah = \frac{1}{5}af$. Da $af = ab\sqrt{\frac{1}{2}} = ab \cdot 0{,}7071$, also $\frac{1}{5}af = ab \cdot 0{,}14142$, also der Fehler nur $\frac{1}{6000}$ des Durchmessers. Wenn man $ak = \frac{1}{2}ab$, die Senkrechte $kl = \frac{3}{2}ab$, $mn = \frac{3}{2}ab$, die Senkrechte $no = ab$ macht, und aus dem Puncte p, wo al, mo einander schneiden, die Senkrechte pg zieht, so ist $ag = \frac{1}{7}ab$. Denn $ag = \frac{1}{3}pg$, $mg = \frac{3}{2}pg$, also $ma = \frac{7}{6}pg = \frac{7}{2}ag$, also $ag = \frac{2}{7}ma = \frac{1}{7}ab$.

Wenn man $mk = ab$, $kq = \frac{1}{2}ab$ senkrecht auf mk

zieht, so liegen $aq = af$ in grader Linie. Wenn man $fr = 2af$ senkrecht auf af zieht, ar, mq verbindet, welche einander in s schneiden, und sh senkrecht auf af zieht, so ist $ah = \frac{1}{5}af$. Denn $ah = \frac{1}{2}sh$, $qh = 3sh$, also $aq = \frac{5}{2}sh = 5ah$, also $ah = \frac{1}{5}aq$.



Um das Verhältniss des Adriaan Anthonisse (V. 52.) zu construiren, zieht man $bt = \frac{7}{8}ab$ senkrecht auf ab, zieht ta, und nimmt darauf $au = av = \frac{1}{2}ab = am$, zieht uw senkrecht auf ab, verbindet tw, und zieht $vg \frown tw$, so ist $\frac{ag}{ab} = \frac{ag}{av} \cdot \frac{au}{ab} = \frac{aw}{at} \cdot \frac{au}{ab} = \frac{aw \cdot at}{at^2} \cdot \frac{au}{ab}$, also $\frac{ag}{ab} = \frac{au^2}{at^2} = \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = \frac{16}{113}$. Der Umfang ist also $= 3ab + ag$.

Setzt man den Durchmesser $= D$, den Umfang $= P$, den Inhalt $= F$, so ist $P = \pi \cdot D$, $F = \frac{1}{4}\pi D^2$, $P^2 = \pi^2 D^2$, also $4\pi F = P^2$, oder $P = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{F}$. Zum practischen Gebrauch kann man die Zahl π mit mehr oder weniger Annäherung nehmen, z. B.

$$\pi = 3{,}1416,\quad \tfrac{1}{2}\pi = 1{,}5708,\quad \pi = 3\tfrac{1}{7},\quad \tfrac{1}{2}\pi = 1\tfrac{4}{7},$$

$$\pi = \frac{355}{113} = 3 + a - b,\quad a = \tfrac{1}{7},\quad b = \tfrac{1}{113}a,$$

$$\sqrt{4\pi} = 3{,}544907701811 = 3\tfrac{1}{2} + a + b + c + d,$$

wo $a = \frac{4}{90}$, $b = \frac{1}{100}a$, $c = \frac{4}{100}b$, $d = \frac{7}{100}c$.

Beispiele.

1) Der Durchmesser sey 140 Fuss, wie gross ist der Umfang?

genau:	genähert:
1 . . . 3,14159265	$3 \times 140 = 420$
4 . . . 1,25663706	a . . . . $+ 20$
$P = 439{,}822971$	$b = \frac{1}{113}a \quad - 0{,}177$
	$P = 439{,}823.$

2) Der Inhalt sey 325 □Fuss, wie gross ist der Umfang?

$\sqrt{F}$ =	18,02775
3.....	5408325
5......	901387
4.......	72111
4........	7211
9........	1622
07........	13
7.........	1
P =	63,90670

$\sqrt{F}$ =	18,02775
3.........	5408325
$\frac{1}{2}$..........	901387
$a = \frac{4}{90}$.....	80123
$b = \frac{1}{100}a$....	801
$c = \frac{4}{100}b$.....	32
$d = \frac{7}{100}c$......	2
P =	63,90670

$F = 81225$

$\sqrt{F}$ =	285
3....	855
$\frac{1}{2}$....	142,5
a.....	12,6666
b.......	1267
c.........	51
d..........	3
P =	1010,2987.

57.

Den Durchmesser des Kreises aus dem Umfang oder dem Inhalt zu berechnen.

Man hat $P = \pi D$, $F = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2$, also $D = \frac{1}{\pi} P = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot \sqrt{F}$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861837$, genähert $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$, oder $\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22} + \frac{1}{7812}$, oder $= \frac{1}{3} - a - b - c + d$, wo $a = \frac{1\frac{1}{2}}{100}$, $b = \frac{1}{50000}$, $c = \frac{1}{5}b$, $d = \frac{1}{8}c$,

$\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128379167095\dot{5}\dot{1} = 1\frac{1}{8} + a + b + c$, wo $a = \frac{1}{300}$, $b = \frac{4}{300}a$, $c = \frac{3}{100}b$.

Beispiele.

1) Der Umfang sey 1200 Fuss, wie gross ist der Durchmesser?

1....	318309886
2....	63661977
D =	381,971863

	1200
7..	8400
2..	4200
11..	381,8182
7812	1536
D =	381,9718

P =	1200
$\frac{1}{3}$...	400
a..	— 18
b...	— 0,024
c.......	— 48
d.......	+ 6
D =	381,9718

2) Der Inhalt sey 81225 □Fuss, wie gross ist der Durchmesser?

$\sqrt{F} = 285$		$\sqrt{F} =$	285
	1128379167	$\frac{1}{8}$	35,625
2....	2256758334	a	95
8.....	902703333	b	1267
5......	56418958	c	38
$D =$	321,5880625	$D =$	321,58805

3) Der Inhalt sey 12100 □Fuss, wie gross ist der Durchmesser?

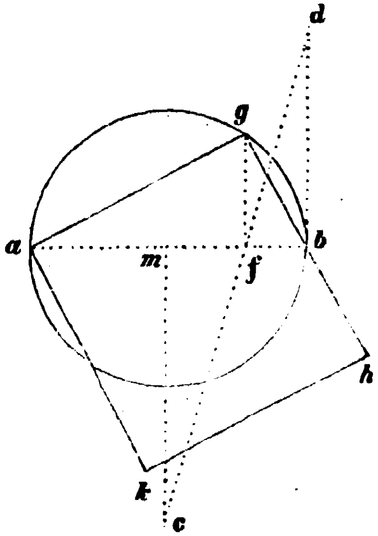
$\sqrt{F} = 110$		$\sqrt{F} =$	110
	1128379	$\frac{1}{8}$	13,75
	112838	a	3667
$D =$	124,1217	b	49
		c	1
		$D =$	124,1217

58.

Den Inhalt eines Kreises aus dem Halbmesser, Durchmesser oder Umfang zu bestimmen.

$F = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$ $= \frac{1}{4\pi} \cdot P^2$. Man nimmt π, wie (V. 56.), $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785\dot{3}981\dot{6}$, genähert $= 0{,}7854$, oder $= \frac{11}{14} - \frac{1}{3164}$, oder $= a + b - c - d$, wo $a = \frac{7}{9}$, $b = \frac{1}{100}a$, $c = \frac{2}{100}b$, $d = \frac{1}{100}c$,

$\frac{1}{4\pi} = 0{,}0795774\dot{7}15459\dot{4}$, oder genähert $= \frac{7}{88} + \frac{1}{31233}$, oder $= \frac{1}{12} - \frac{1}{400} - \frac{1}{800} - a - b + c$,



wo $a = \frac{1}{7000000}$, $b = \frac{1}{5}a$, $c = \frac{1}{8}b$.

Zur genäherten Quadratur, d. h. Verwandlung des Kreises in ein Quadrat von gleichem Inhalt, mache man $mc = 4$ Theile $\frown bd = 3$ Theile, ab, cd schneiden einander in f. Man errichte fg senkrecht auf ab bis an den Kreis, beschreibe über ag ein Quadrat $aghk$, so ist es nahe dem Kreise gleich, da $ag^2 = af \cdot ab = \frac{11}{14} D^2$.

Beispiele.

1) Der Halbmesser sey 85 oder der Durchmesser 170 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

$r^2 =$	7225
	314159265
7 . . .	2199114855
2	62831853
2	6283185
5	1570796
$F =$	22698,00689

	7225
3	21675
$a = \frac{1}{7}$ . . .	1032,14
$b = \frac{1}{113} a$	— 9,13
F =	22698,01

$D^2 =$	28900
7 . . .	202300
8	23120
5	1445
4	1156
$F =$	22698,06

	78539816
2 . . .	157079632
8	62831853
9	7068583
$F =$	22698,0068

1	28900
1	28900
	317900
2	158950
7	22707,14
3164	— 9,13
F =	22698,01

	28900
7	202300
9	22477,777
$b = \frac{1}{100} a$ . . .	+ 224,778
$c = \frac{2}{100} b$	— 4,495
$d = \frac{1}{100} c$	— 45
F =	22698,015

2) Der Umfang sey 534 Fuss, wie gross ist der Inhalt?

$P^2 =$	285156
	7957747
2	15915494
8	6366198
5	397887
1	7958
5	3979
6	477
$F =$	22691,993

	285156
$\frac{1}{12}$	23763
$\frac{1}{400}$	— 712,89
$\frac{1}{800}$	— 356,445
$a = \frac{1}{200000}$	— 1,425
$b = \frac{1}{5} a$	— 285
$c = \frac{1}{8} b$	+ 35
F =	22691,990

59.

Die Länge eines Kreisbogens zu berechnen.

Nach III. 22. verhält sich der Bogen zum Quadranten wie der Mittelpunctswinkel zu einem rechten Winkel, oder der Bogen zum Umfang wie der Mittelpunctswinkel zu vier rechten Winkeln. Es sey der Mittelpunctswinkel $= m$, der Bogen $= B$, der Umfang $= P$, der Halbmesser $= r$, der rechte Winkel $= R$, so ist $B = P \cdot \frac{m}{4R}$, oder für m Grade, $B = \frac{\pi}{180} \cdot r \cdot m$, für m Minuten $B = \frac{\pi}{10800}\, r \cdot m$, für m Sekunden $B = \frac{\pi}{648000} \cdot r \cdot m$,

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329252, \quad \frac{\pi}{10800} = 0{,}000290888208$$
$$\frac{\pi}{648000} = 0{,}0000048481368.$$

Beispiele.

1) Den Winkel zu finden, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist.
Man setzt $B = r$, woraus $\frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}2957795$

$$\frac{10800'}{\pi} = 3437'{,}74677, \quad \frac{648000}{\pi} = 206264''{,}806.$$

2) Für verschiedene regelmässige Vielecke das Verhältniss des Bogens zur Sehne zu finden. Man wendet hier das Verhältniss des Durchmessers zur Polygonseite in V. 51. an.

Beim Halbkreise ist $B = \frac{1}{2}\pi \cdot D = 1{,}5708$ der Sehne.

Beim Dreieck ist für $m = 120^0$, $B = \frac{1}{3}\pi D$, $D = 1{,}15470$, also $B = 1{,}209199$ der Sehne.

Beim Quadrat ist für $m = 90^0$, $B = \frac{1}{4}\pi D$, $D = 1{,}41421$, also $B = 1{,}110720$ der Sehne.

Beim Fünfeck ist für $m = 72^0$, $B = \frac{1}{5}\pi D$, $D = 1{,}70130$, also $B = 1{,}068959$ der Sehne.

Beim Sechseck ist für $m = 60^0$, $B = \frac{1}{6}\pi D$, $D = 2$, also $B = 1{,}047197$ der Sehne.

3) Wie gross ist die Länge eines Bogens von $87^0\ 12'\ 24''$, bei einem Durchmesser von 174 Fuss? der Winkel $m = 5232'{,}4$, $r = 87$.

0,0002908882	0,025307273
8… 0,023271056	5….. 126536365
7……. 2036217	2……. 5061455
0,025307273	3…….. 759218
	2……… 50614
	4……… 10123
	B = 132,417775

60.

Den Inhalt eines Kreissectors zu berechnen.

Nach V. 52. ist der Inhalt des Sectors gleich dem Product des Bogens mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, also wenn S der Sector, B der Bogen, D der Durchmesser, P der Umfang, R der rechte Winkel, m der Mittelpunctswinkel, r der Halbmesser, $S = \frac{1}{4} D \cdot B = D \cdot P \cdot \frac{m}{16 R} = \pi r^2 \cdot \frac{m}{4 R}$,
also für m Grade $S = \frac{\pi}{360} \cdot r^2 \cdot m$,

für m Minuten $S = \frac{\pi}{21600} \cdot r^2 \cdot m$,

$\frac{\pi}{360} = 0{,}00872664626$, $\frac{\pi}{21600} = 0{,}000145444104$.

Beispiel.

Wie gross ist der Inhalt des Sectors für den Halbmesser 87 Fuss, und dem Mittelpunctswinkel $87^0\ 12'\ 24'' = 5232',4$?

$r^2 = 7569$	1…. 396040356
$m = 5232{,}4$	4…. 158416142
39604035,6	5….. 19802018
	4…… 1584161
	4……. 158416
	4…….. 15842
	1……….. 396
	04……….. 16
	S = 5760,17347 □Fuss.

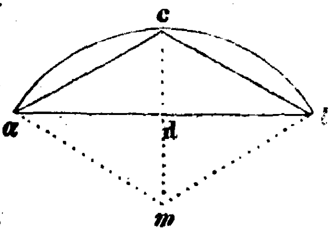
61.

Den Inhalt eines Kreissegments zu berechnen.

Die Sehne theilt den Kreis in zwei Segmente, wovon das eine kleiner, das andre grösser als der Halbkreis ist. Das kleinere Segment wird erhalten, wenn man das Centraldreieck vom Sector abzieht. Es kann verlangt werden, entweder der absolute Inhalt des Segments in Quadratmaassen, oder das Verhältniss desselben zur Kreisfläche, oder das Verhältniss desselben zu dem Dreieck, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beispiele.

1) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des gleichseitigen Dreiecks ruht.

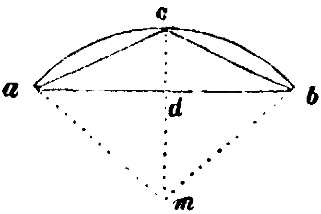


Kreisfläche $= \pi r^2$, Sector $macb = \frac{1}{3}\pi r^2$, $\triangle amb = ad \cdot md = \frac{1}{4}r^2 \cdot \sqrt{3} = \triangle acb$, also Segment $acb = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2 \cdot \sqrt{3}$, Verhältniss zur Kreisfläche $= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{3}$, Verhältniss zum $\triangle\ acb = \frac{4}{9}\pi\ \sqrt{3} - 1$.

$$
\begin{array}{rl}
\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} & = 0{,}4330127019 \\
\frac{1}{\pi} & = 0{,}3183098862 \\
\hline
\text{Prod.} & = 0{,}1378322239 \\
\frac{1}{3} & = 0{,}3333333333 \\
\hline
\text{Segm.} & = 0{,}1955011094 \text{ des Kreises}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{3} & = 1{,}7320508075 \\
\frac{4}{9}\pi & = 1{,}3962634016 \\
\hline
\text{Prod.} & = 2{,}4183991522 \\
 & \quad 1 \\
\hline
 & = 1{,}4183991522 \text{ des } \triangle.
\end{array}
$$

2) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des Quadrats ruht.



Kreisfläche $= \pi r^2$, Sector $macb = \frac{1}{4}\pi r^2$, $\triangle amb = \frac{1}{2}r^2$, $ad = r \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}r\ \sqrt{2}$, $cd = r\ (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}r\ (2 - \sqrt{2})$, $\triangle\ acb = r^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}\ (2 - \sqrt{2}) = r^2 \cdot \frac{1}{2}\ (\sqrt{2} - 1) = r^2 \cdot \frac{1}{2\ (\sqrt{2} + 1)}$, Segment $acb = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$, Verhältniss zur Kreisfläche $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$, Verhältniss zum $\triangle\ acb = \frac{1}{2}\pi\ (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1)$.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = 0{,}1591549431$

Diff. $0{,}0908450569$

Verhältniss des Segments zur Kreisfläche.

$\pi = 3{,}14159265359$

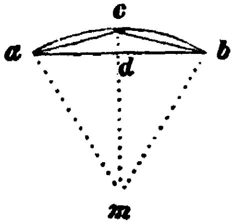
$\frac{1}{2}\pi - 1 = 0{,}57079632679$

$\sqrt{2} + 1 = 2{,}41421356237$

Prod. $1{,}37802423350$

Verhältniss des Segments zum $\triangle\, acb$.

3) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des regelmässigen Sechsecks ruht.



Kreisfläche $= \pi r^2$, Sector $macb = \frac{1}{6}\pi r^2$, $ad = \frac{1}{2} r$, $md = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$, $\triangle\, amb = \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$, $cd = \frac{1}{2} r (2 - \sqrt{3})$, $\triangle\, acb = \frac{1}{4} r^2 (2 - \sqrt{3})$ $= r^2 \cdot \frac{1}{4(2 + \sqrt{3})}$, Segment $acb = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 \cdot \sqrt{3}$, Verhältniss zur Kreisfläche $= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{3}$, Verhältniss zum $\triangle\, acb = (\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$.

$\frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}4330127019$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098862$

Prod. $= 0{,}1378322239$

$\frac{1}{6} = 0{,}1666666666$

Diff. $= 0{,}0288344427$

Verhältniss des Segments zur Kreisfläche.

$\pi = 3{,}1415926536$

$2\pi = 6{,}2831853072$

$\frac{2}{3}\pi = 2{,}0943951024$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508075$

$0{,}3623442949$

$2 + \sqrt{3} = 3{,}7320508075$

Prod. $= 1{,}3522873180$

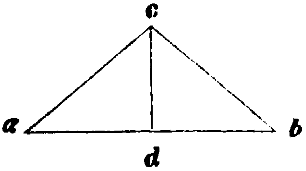
Verhältniss des Segments zum $\triangle\, acb$.

Anhang.

In der Baukunst, Mechanik u. s. w. kommt öfters der Fall vor, dass die Länge eines Bogens, oder der Inhalt eines Segments aus der Grundlinie und Höhe durch eine genäherte Rechnung gefunden werden soll. Die hierzu erforderlichen Regeln können nur durch Hülfe der höhern Geometrie gefunden werden. Daher gebe ich sie hier, ohne Beweise, zur Belehrung der Fähigen, und zu practischem Gebrauch.

62.

Die Länge der Dachlinie.



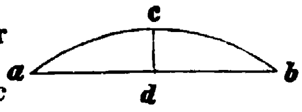
D. h. die Summe der beiden Seiten ac, cb des gleichschenkligen Dreiecks. Diese Summe sey $= B$, $\frac{4\,cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, und $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w., wo $a = \frac{1}{2} E \cdot ab$, $b = \frac{1}{4} E \cdot a$, $c = \frac{3}{6} E \cdot b$, $d = \frac{5}{8} E \cdot c$, u. s. w. Die Zähler der Brüche sind die ungraden Zahlen, die Nenner um 3 grösser.

Beispiel. Die Grundlinie $ab = 120$, die Höhe $cd = 24$, der Exponent $E = \frac{4 \cdot 24 \cdot 24}{120 \cdot 120} = \frac{4}{25}$.

$$\begin{array}{lr} ab & = 120 \\ a \cdots & + \;\; 9{,}6 \\ b \cdots\cdots & - \;\; 384 \\ c \cdots\cdots & + \;\; 31 \\ d \cdots\cdots & - \;\; 3 \\ \hline & 129{,}244 \end{array}$$

63.

Die Länge des Kreisbogens.



Der Bogen $= B$, $\frac{4\,cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, $B = ab + a - b + c - d + f - g$, u. s. w., wo $a = \frac{2}{3} E \cdot ab$, $b = \frac{1}{5} E \cdot a$, $c = \frac{3}{7} E \cdot b$, $d = \frac{5}{9} E \cdot c$, u. s. w. Die Zähler und Nenner sind ungrade Zahlen, deren Unterschied immer 4 ist.

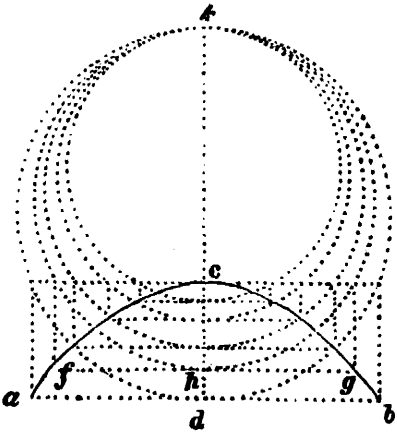
Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$.

$$\begin{array}{lr} ab & = 120 \\ a \cdots & + \;\; 12{,}8 \\ b \cdots\cdots & - \;\; 4096 \\ c \cdots\cdots & + \;\; 281 \\ d \cdots\cdots & - \;\; 25 \\ f \cdots\cdots & + \;\; 2 \\ \hline B & = 132{,}4162 \end{array}$$

64.

Die Länge des parabolischen Bogens.

Hier sind die Quadrate der Parallelsehnen den Abständen vom Scheitel proportionirt. Man macht $ad^2 = ck \cdot cd$, $fh^2 = ck \cdot ch$ u. s. w., so ist $\frac{fg^2}{ab^2} = \frac{ch}{cd}$.



Der Bogen $acb = B$, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w., wo $a = \frac{2}{3}E \cdot ab$, $b = \frac{3}{5}E \cdot a$, $c = \frac{10}{7}E \cdot b$, $d = \frac{35}{18}E \cdot c$, $f = \frac{126}{55}E \cdot d$, die Brüche haben die Form: $\frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 5}$, $\frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 7}$, $\frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 9}$, $\frac{4 \cdot 7 \cdot 9}{10 \cdot 11}$, $\frac{4 \cdot 9 \cdot 11}{12 \cdot 13}$ u. s. w.

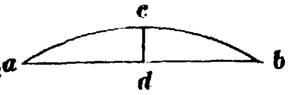
Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$.

$ab \ldots$		120
$a \ldots$	+	12,8
$b \ldots$	—	1,230
$c \ldots$	+	281
$d \ldots$	—	87
$f \ldots$	+	32
$g \ldots$	—	13
$h \ldots$	+	5
B	=	131,788

65.

Die Länge des Bogens der Kettenlinie.

Es ist diejenige Linie, in welcher sich Gewölbsteine durch ihre Schwere im Gleichgewicht erhalten, und welche eine an ihren Enden befestigte Schnur annimmt.



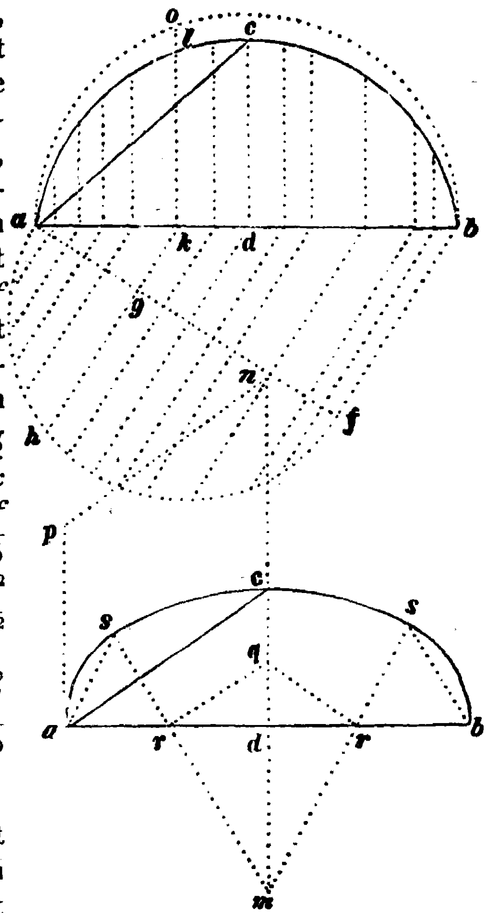
Der Bogen $= B$, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, so ist $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w., wo $a = \frac{2}{3}E \cdot ab$, $b = \frac{7}{15}E \cdot a$, $c = \frac{139}{147}E \cdot b$, $d = \frac{2473}{2085}E \cdot c$.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$.

$$\begin{array}{lr} ab \ldots & 120 \\ a \ldots & +\ 12{,}8 \\ b \ldots\ldots & -\ 955 \\ c \ldots\ldots & +\ 144 \\ d \ldots\ldots & -\ 27 \\ f \ldots\ldots & +\ 5 \\ \hline B = & 131{,}967 \end{array}$$

66.

Umfang der Ellipse.



Die grosse Axe sey ab, die in ihrer Mitte senkrecht errichtete halbe kleine Axe sey cd. Man ziehe in beliebiger Richtung $af = 2\,cd$, und beschreibe über af einen Halbkreis. In einem beliebigen Punct g errichtet man gh senkrecht auf af bis an den Halbkreis, zieht $gk \parallel fb$, $kl = gh$ senkrecht auf ab, so ist l ein Punct der Ellipse. Da $\frac{ag}{ak} = \frac{af}{ab} = \frac{cd}{ad} = \frac{fg}{bk} = \frac{af}{ab} = \frac{cd}{ad}$, also $\frac{ag \cdot fg}{ak \cdot bk} = \frac{cd^2}{ad^2}$ $= ag \cdot fg = gh^2 = kl^2$, $ak \cdot bk = ko^2$, so ist $\frac{kl}{ko} = \frac{cd}{ad}$.

Annähernd beschreibt man die Ellipse durch zwei Kreisbögen. Man beschreibt über ab ein gleichseitiges $\triangle\ anb$, errichtet $ap = ad$ senkrecht auf ab, nimmt $dq = ad - cd$, zieht $qr \parallel np$, beschreibt über rr ein gleichseitiges $\triangle\ rmr$, beschreibt aus r mit dem Halbmesser ra den Kreisbogen as, aus m mit dem Halbmesser $ms = mc$ den Kreisbogen scs.

Der Umfang der halben Ellipse $acb = B$ wird nach Euler aus der Sehne ac des elliptischen Quadranten berechnet.
$B = a - b - c - d - f - g \ldots\ldots$, wo $\dfrac{ab^2 - 4cd^2}{ab^2 + 4cd^2} = E$,
$a = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \pi \cdot ac = 2{,}221441469 \ldots\ldots ac$,
$b = \dfrac{1}{4 \cdot 4} E^2 \cdot a$, $c = \dfrac{3 \cdot 5}{8 \cdot 8} E^2 \cdot b$, $d = \dfrac{7 \cdot 9}{12 \cdot 12} E^2 \cdot c$, $f = \dfrac{11 \cdot 13}{16 \cdot 16} E^2 \cdot d$

Beispiel. Es sey $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{21}{29}$, $E^2 = \frac{441}{841}$, $ac = \sqrt{4176} = 64{,}6220$, $ac \times 2{,}22144 \ldots = 143{,}554$.

$a \ldots$	143,554
$b \ldots$	— 4,705
$c \ldots\ldots$	— 578
$d \ldots\ldots$	— 133
$f \ldots\ldots$	— 39
$g \ldots\ldots$	— 13
$h \ldots\ldots$	— 5
$B =$	138,081.

67.

Inhalt der halben Ellipse.

Da (V. 66.) $\dfrac{kl}{ko} = \dfrac{cd}{ad}$, so ist auch das Verhältniss der halben Ellipse acb, zu dem über ab beschriebenen Halbkreise, $= \dfrac{cd}{ad}$. Aber (V. 58.) der Kreis $= \frac{1}{4}\pi \cdot ab \cdot ad$, also die halbe Ellipse $= \frac{1}{4}\pi \cdot ab \cdot cd$.

Beispiel. Es sey $ab = 120$ Fuss, $cd = 24$ Fuss, so ist $ab \cdot cd = 2880$.

$\frac{1}{4}\pi =$	0,78539816
2	157079632
8	62831853
8	6283185
Inhalt $F =$	2261,9467 □Fuss.

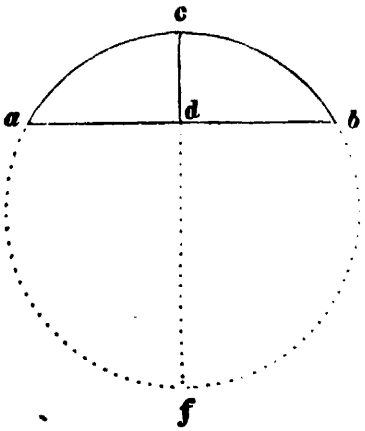
68.

Inhalt des Kreissegments.

Aus der Grundlinie ab, und Höhe cd, findet man die Sehne ac des halben Bogens, und hieraus in ziemlicher Annäherung das Segment $F = \frac{4}{10} cd\,(ab + \frac{4}{3} ac)$.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $ac = \sqrt{4176} = 64{,}622$

$$\begin{array}{rcr} ac & = & 64{,}622 \\ \frac{1}{3}ac & = & 21{,}541 \\ \hline & & 206{,}163 \\ \frac{4}{10}cd & = & 9{,}6 \\ \hline \text{Inhalt } F & = & 1979{,}161. \end{array}$$



Genauer ist die Annäherung, wenn man den Bogen $acb = B$ (V. 59. 63.) berechnet:

$$F = \tfrac{1}{4}cd\,(B + ab) + \frac{ab^2}{16\,cd}\,(B - ab).$$

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $B = 132{,}4162$, hieraus:

$$\begin{array}{r} 132{,}4162 \\ 120 \\ \hline 252{,}4162 \\ 12{,}4162 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 252{,}4162 \\ \frac{1}{4}cd \cdots & 6 \\ \hline & 1514{,}4972 \\ & 465{,}6075 \\ \hline F = & 1980{,}1047 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 12{,}4162 \\ \dfrac{ab^2}{16\,cd} \cdots & 37{,}5 \\ \hline & 465{,}6075 \end{array}$$

Wenn $E = \dfrac{4\,cd^2}{ab^2}$, $F = a + b - c + d - f + g - h$, so ist $a = \frac{2}{3}ab \cdot cd$, $b = \frac{1}{5}E \cdot a$, $c = \frac{1}{7}E \cdot b$, $d = \frac{3}{9}E \cdot c$, $f = \frac{5}{11}E \cdot d$, $g = \frac{7}{13}E \cdot f$, $h = \frac{9}{15}E \cdot g$ u. s. w.

Wenn $E = \dfrac{4\,cd^2}{ab^2 + 4\,cd^2}$, $F = a + b + c + d + f + g + h$, so ist $a = \frac{2}{3}ab \cdot cd$, $b = \frac{1}{5}E \cdot a$, $c = \frac{6}{7}E \cdot b$, $d = \frac{8}{9}E \cdot c$, $f = \frac{10}{11}E \cdot d$, $g = \frac{12}{13}E \cdot f$ u. s. w.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, erstes $E = \frac{4}{25}$, zweites $E = \frac{4}{29}$.

Erste Reihe.		Zweite Reihe.	
$a \cdots$	1920	$a \cdots$	1920
$b \cdots$	+ 61,44	$b \cdots$	52,96552
$c \cdots$	— 1,40434	$c \cdots$	6,26193
$d \cdots$	+ 7490	$d \cdots$	76775
$f \cdots$	— 545	$f \cdots$	9627
$g \cdots$	+ 47	$g \cdots$	1225
$h \cdots$	— 4	$h \cdots$	158
		$k \cdots$	20
		$l \cdots$	3
$F =$	1980,10554	$F =$	1980,10553

Wenn man durch F das Verhältniss des Segments acb zur ganzen Kreisfläche $acbf$ bezeichnet, und $E = \frac{4cd^2}{ab^2} = \frac{cd}{df}$, so ist

$$F = a + b - c + d - f + g - h \text{ u. s. w.}$$

$a = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{E\sqrt{E}}{(E+1)^2}$, $\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\pi} = 1{,}697652726$,
$b = \frac{1}{5} E \cdot a$, $c = \frac{1}{7} E \cdot b$, $d = \frac{3}{9} E \cdot c$, $f = \frac{5}{11} E \cdot d$, $g = \frac{7}{13} E \cdot f$ u. s. w.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$, $E + 1 = \frac{29}{25}$, $E\sqrt{E} = \frac{8}{125}$, $\frac{E\sqrt{E}}{(E+1)^2} = \frac{40}{841}$.

	1,6976527263
40....	67,906109052
841...	0,080744481

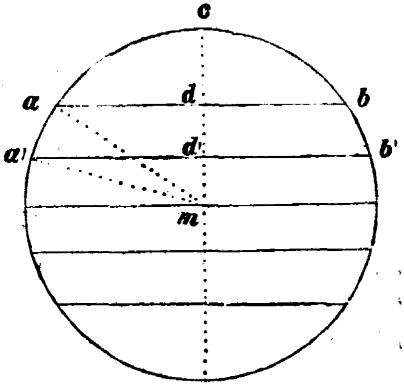
a...		0,080744481
b....	+	2583823
c......	—	59059
d.......	+	3150
f........	—	229
g.........	+	20
h.........	—	17
F =		0,083272169

Nach dem Verhältniss der Höhe zum Halbmesser $\frac{cd}{r} = \frac{2cd}{cf} = h$, habe ich folgende Tafel für das Verhältniss des Segments zur Kreisfläche berechnet:

h	F	h	F	h	F	h	F
0,01	0,000599	0,11	0,021532	0,21	0,055905	0,31	0,098637
2	1692	12	24496	22	59849	32	0,103276
3	3105	13	27578	23	63873	33	107973
4	4773	14	30772	24	67972	34	112727
5	6660	15	34073	25	72146	35	117537
6	8741	16	37478	26	76393	36	122402
7	0,010999	17	40981	27	80710	37	127320
8	13417	18	44577	28	85094	38	132290
9	15985	19	48267	29	89545	39	137309
0,10	0,018693	0,20	0,052044	0,30	0,094060	0,40	0,142378

h	F	h	F	h	F	h	F
0,41	0,147495	0,56	0,229208	0,71	0,318001	0,86	0,411165
42	152658	57	234940	72	324104	87	417472
43	157866	58	240703	73	330224	88	423789
44	163119	59	246495	74	336363	89	430113
45	168415	60	252315	75	342519	90	436444
46	173752	61	258164	76	348691	91	442781
47	179131	62	264039	77	354878	92	449125
48	184549	63	269941	78	361081	93	455473
49	190006	64	275868	79	367299	94	461826
0,50	0,195501	65	0,281820	0,80	0,373530	0,95	0,468182
0,51	0,201032	0,66	0,287794	0,81	0,379774	0,96	0,474542
52	206600	67	293793	82	386030	97	480904
53	212202	68	299814	83	392298	98	487268
54	217837	69	305856	84	398577	99	493634
55	223507	0,70	0,311918	0,85	0,404866	1,00	0,500000

Nach dieser Tafel kann man leicht einen Kreis durch parallele Sehnen in gleiche Theile theilen. Bei der Einschaltung wird man zu grösserer Genauigkeit auch auf die zweiten Differenzen Rücksicht nehmen.



Beispiel. Der Kreis sey in 6 gleiche Theile zu theilen, also $F = \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$ und $F' = \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$

44..	163119		
		5296	
45..	168415		41
		5337	
46..	173752		

Setzt man $x = 0{,}67063$
so ist $1 - x = 0{,}32937$

$$x \cdot 5296 = 3552$$
$$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 41 = -5$$
$$3547$$
$$163119$$
$$F = 0{,}166666$$

also $h = \frac{cd}{mc} = 0{,}4467063$

$\angle\, cma = 56^0 24',4$

73..	330224		
		6139	
74..	336363		17
		6156	
75..	342519		

Setzt man $x = 0{,}50678$
so ist $1 - x = 0{,}49322$

$$x \cdot 6139 = 3111$$
$$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 17 = -2$$
$$3109$$
$$330224$$
$$F' = 0{,}333333$$

also $h = \frac{cd'}{mc} = 0{,}7350678$

$\angle\, cma' = 74^0 38',25$

Nach dem Verhältniss der Höhe des Segments zur halben Grundlinie $\frac{cd}{ad} = \frac{2cd}{ab} = \sqrt{E} = h$, habe ich folgende Tafel berechnet, welche das Verhältniss F des Segments zum Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe angiebt.

h	F	h	F	h	F	h	F
0,00	1,3333333	0,25	1,3498542	0,50	1,3977975	0,75	1,4730935
1	1,3333599	26	1,3511897	51	1,4003163	76	1,4766043
2	1,3334399	27	1,3525756	52	1,4028787	77	1,4801506
3	1,3335733	28	1,3540117	53	1,4054843	78	1,4837321
4	1,3337599	29	1,3554978	54	1,4081328	79	1,4873484
5	1,3339997	0,30	1,3570336	0,55	1,4108239	0,80	1,4909992
0,06	1,3342928	0,31	1,3586189	0,56	1,4135573	0,81	1,4946843
7	1,3346391	32	1,3602535	57	1,4163326	82	1,4934033
8	1,3350384	33	1,3619372	58	1,4191496	83	1,5021558
9	1,3354908	34	1,3636696	59	1,4220079	84	1,5059416
0,10	1,3359962	0,35	1,3654505	0,60	1,4249072	0,85	1,5097605
0,11	1,3365544	0,36	1,3672796	0,61	1,4278471	0,86	1,5136120
12	1,3371654	37	1,3691567	62	1,4308274	87	1,5174958
13	1,3378291	38	1,3710815	63	1,4338477	88	1,5214117
14	1,3385454	39	1,3730538	64	1,4369077	89	1,5253594
0,15	1,3393142	0,40	1,3750733	0,65	1,4400070	0,90	1,5293385
0,16	1,3401352	0,41	1,3771396	0,66	1,4431454	0,91	1,5333488
17	1,3410084	42	1,3792525	67	1,4463225	92	1,5373900
18	1,3419337	43	1,3814117	68	1,4495379	93	1,5414618
19	1,3429109	44	1,3836169	69	1,4527914	94	1,5455638
0,20	1,3439398	0,45	1,3858678	0,70	1,4560827	0,95	1,5496959
0,21	1,3450203	0,46	1,3881642	0,71	1,4594113	0,96	1,5538577
22	1,3461521	47	1,3905057	72	1,4627770	97	1,5580489
23	1,3473352	48	1,3928919	73	1,4661795	98	1,5622692
24	1,3485693	49	1,3953226	74	1,4696184	99	1,5665185
0,25	1,3498542	0,50	1,3977975	0,75	1,4730935	1,00	1,5707963

Um diese Tafel mit aller Genauigkeit anzuwenden, nimmt man auch auf die zweiten Differenzen Rücksicht.

Beispiele.

1) Die Grundlinie $ab = 120$, die Höhe $cd = 24$, wie gross ist das Segment?

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4. = h$.

Die Tafel giebt für $h = 0{,}40 \ldots\ldots$ 1,3750733
das $\triangle\, acb = ad \cdot cd = 60 \cdot 24 \ldots\ldots$ 1440
das Product giebt das Segment $\ldots\ldots = 1980{,}1055$

2) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des gleichseitigen Dreiecks ruht.

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = h = 0{,}577350269$. Wenn also $ab = 120$ Fuss, so ist $cd = 34{,}641016$, $\triangle\, acb = 2078{,}46097$.

57..	1,4163326			
		28170		
58..	1,4191496		413	
		28583		
59..	1,4220079			

Hier ist $x = 0{,}7350269$
$1 - x = 0{,}2649731$
also $x \cdot 28170 = 20705$
$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 413 = -40$
20665
1,4163326
$F = 1{,}4183991$

1,4183991
$\triangle = 2078{,}46097$
Inhalt $= 2948{,}087$ □Fuss.

3) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des Quadrats ruht.

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414213562.. = h$. Wenn also $ab = 120$ Fuss, so ist $cd = 24{,}8528..$ $\triangle\, acb = 1491{,}168824$.

41..	1,3771396			
		21129		
42..	1,3792525		463	
		21592		
43..	1,3814117			

Hier ist $x = 0{,}4213562$
$1 - x = 0{,}5786438$
also $x \cdot 21129 = 8902$
$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 463 = -56$
8846
1,3771396
$F = 1{,}3780242$.

1,3780242
$\triangle = 1491{,}168824$
Inhalt $= 2054{,}866$ □Fuss.

4) Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des regelmässigen Sechsecks ruht.

Hier ist $\frac{cd}{ad} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949192.. = h$.

Wenn also $ab = 120$ Fuss, so ist $cd = 16{,}07695$, $\triangle\, acb = 964{,}61709$.

$$\begin{array}{lll} 26 \ldots & 1{,}3511897 & \\ & & 13859 \\ 27 \ldots & 1{,}3525756 & \qquad 502 \\ & & 14361 \\ 28 \ldots & 1{,}3540117 & \end{array}$$

Hier ist $x = 0{,}7949192$

$1 - x = 0{,}2050808$

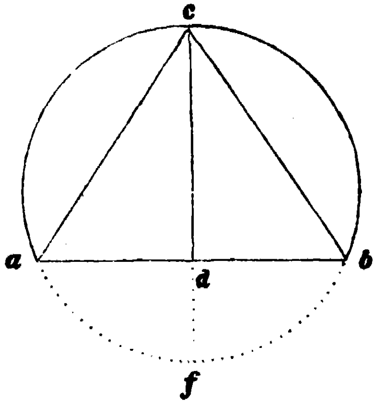
also $x \cdot 13859 = 11017$

$$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 502 = -41$$

$$\overline{10976}$$

$$\begin{array}{rl} & 1{,}3511897 \\ & 10976 \\ \hline F = & 1{,}3522873 \\ \triangle = & 964{,}61709 \\ \hline \text{Inhalt} = & 1304{,}439 \ \square\text{Fuss.} \end{array}$$

Durch Hülfe der Tafel kann man auch solche Segmente berechnen, welche grösser als der Halbkreis sind.



Beispiel. Es sey $ab = 120$, $cd = 90$ Fuss, so ist $\frac{df}{ad} = \frac{ad}{cd} = \frac{2}{3}$, $df = 40$, $cf = 130$, $cf^2 = 16900$.

$$\begin{array}{lll} 66 \ldots & 1{,}4431454 & \\ & & 31771 \\ 67 \ldots & 1{,}4463225 & \qquad 383 \\ & & 32154 \\ 68 \ldots & 1{,}4495379 & \end{array}$$

Hier ist $x = \frac{2}{3}$, $1 - x = \frac{1}{3}$

$x \cdot 31771 = 21181$

$$\frac{x(1-x)}{2} \cdot 383 = -43$$

$$\overline{21138}$$

$$\begin{array}{rl} & 1{,}4431454 \\ & 21138 \\ \hline & 1{,}4452592 \\ ad \cdot df = & 2400 \\ \hline \text{Segm. } afb = & 3468{,}622 \\ \frac{1}{4}\pi \cdot cf^2 = & 13273{,}229 \\ \hline \text{Segm. } acb = & 9804{,}607 \ \square \text{ F.} \end{array}$$

Die vorstehende Tafel ist in ihrer ersten Hälfte von $h = 0$ bis $h = 0{,}5$ nach der oben gegebenen Formel für $\sqrt{E} = h$ berechnet:

$$F = \frac{4}{3} + \frac{4}{3 \cdot 5} h^2 - \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} h^4 + \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 9} h^6 - \frac{4}{7 \cdot 9 \cdot 11} h^8 \ldots$$

Von $h = 0{,}5$ bis $h = 0{,}75$ setzte ich $h = 0{,}5 + x$ und entwickelte folgende Formel, nach welcher ich die Rechnung führte:

$$\begin{array}{rll} F = & 1{,}3977975 & 5625502 \\ + & 0{,}2496907 & 5247783 \ . \ x \\ + & 0{,}2193513 & 3608383 \ . \ x^2 \\ - & 0{,}0522632 & 9093752 \ . \ x^3 \\ - & 0{,}0082385 & 37866999 \ . \ x^4 \end{array}$$

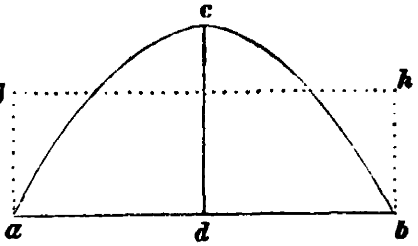
$$
\begin{aligned}
&+ 0{,}0140466\ 9644823 \,.\, x^5 \\
&- 0{,}0042180\ 6345191 \,.\, x^6 \\
&- 0{,}0024453\ 8801708 \,.\, x^7 \\
&+ 0{,}0028477\ 0841571 \,.\, x^8 \\
&- 0{,}0006004\ 6445179 \,.\, x^9 \\
&- 0{,}0008870\ 1953795 \,.\, x^{10} \\
&+ 0{,}0008049\ 4434632 \,.\, x^{11} \\
&- 0{,}0000649\ 0486311 \,.\, x^{12} \\
&- 0{,}0003633\ 1951106 \,.\, x^{13}
\end{aligned}
$$

Von $h = 0{,}75$ bis $h = 1$ setzte ich $h = 1 - u$ und führte die Rechnung nach der Formel:

$$
\begin{aligned}
F = {}& 1{,}5707963\ 2679489 \\
&- 0{,}4292036\ 7320510 \,.\, u \\
&+ 0{,}1415926\ 5358979 \,.\, u^2 \\
&+ 0{,}0457223\ 1371802 \,.\, u^3 \\
&+ 0{,}0092177\ 2221164 \,.\, u^4 \\
&- 0{,}0012544\ 5426267 \,.\, u^5 \\
&- 0{,}0023608\ 8237160 \,.\, u^6 \\
&- 0{,}0012444\ 1925800 \,.\, u^7 \\
&- 0{,}0002860\ 1730282 \,.\, u^8 \\
&+ 0{,}0001174\ 9809711 \,.\, u^9
\end{aligned}
$$

69.

Inhalt des parabolischen Segments.



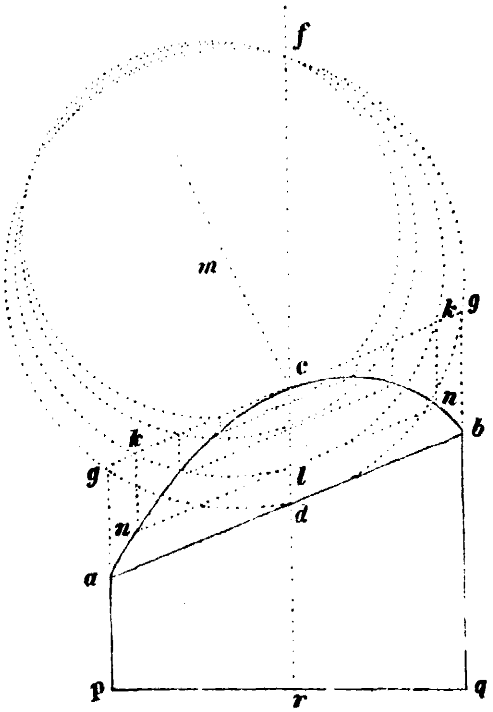
Der Inhalt des parabolischen Segments, dessen Axe cd die Grundlinie oder Sehne ab senkrecht halbirt, ist genau gleich $\frac{4}{3}$ des $\triangle\, acb$ von gleicher Grundlinie und Höhe, oder $\frac{2}{3}$ des Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe. Man macht also $bh = ag = \frac{2}{3} cd$, so ist Segment $acb = abgh$.

Beispiel. Es sey $ab = 120$ Fuss, $cd = 24$ Fuss, so ist $bh = 16$ Fuss, Segm. $acb = 16 \cdot 120 = 1920$ □Fuss.

70.

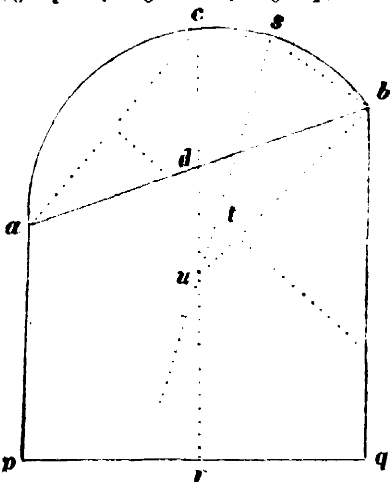
Trapezium mit schiefem parabolischen Segment.

Die schiefe Sehne ab des Bogens acb sey von der Axe cd in d in zwei gleiche Theile $da = db$ getheilt. Man ziehe gcg ⫽ adb, mache $gc = ad = bd$, beschreibe einen



Kreis, welcher durch die Puncte gdg geht, dessen Mittelpunct also in der Linie cm liegt, welche auf gcg senkrecht ist. Dieser Kreis schneidet die Axe dc in f. Man beschreibe nun beliebige andre Kreise, welche ihren Mittelpunct in cm haben und immer durch den Punct f gehen. Diese Kreise schneiden die Axe in l, die Linie gcg in k. Man ziehe $kn \mathrel{\widehat{=}} cd$, $ln \mathrel{\widehat{=}} ad$, so sind n die Puncte der Parabel, und es ist $ad^2 = cd \cdot cf$, $ln^2 = cl \cdot cf$, also $\frac{ln^2}{ad^2} = \frac{cl}{cd}$, d. h. die Quadrate der von der Axe halbirten Sehnen verhalten sich wie die Abschnitte der Axe (Abscissen). Der Inhalt dieses parabolischen Segments ist genau gleich $\frac{4}{3}$ des $\triangle\, acb$, oder $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms $abgg$. Es sey nun pq senkrecht auf der Axe cdr, so ist das Trapezium $padr = pr\,(\frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}dr)$, Segm. $acd = pr \cdot \frac{2}{3}cd$, Trap. $rdbq = rq\,(\frac{1}{2}dr + \frac{1}{2}bq)$, Segm. $dcb = rq \cdot \frac{2}{3}cd$. Aber $pr = rq = \frac{1}{2}pq$, also $pacbq = \frac{1}{2}pq\,(\frac{1}{2}ap + dr + \frac{4}{3}cd + \frac{1}{2}bq) = \frac{1}{2}pq\,(\frac{1}{2}ap - \frac{1}{3}dr + \frac{4}{3}cr + \frac{1}{2}bq) = pq\,(\frac{1}{6}ap + \frac{4}{6}cr + \frac{1}{6}bq)$.

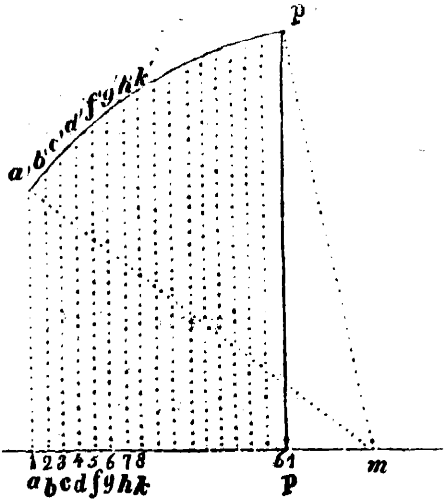
Beispiel. Es sey die Grundlinie $pq = 18$ Fuss, die Höhen $ap = 15$, $cr = 18$, $bq = 17$ Fuss, so ist die mittlere Höhe $= \frac{15 + 72 + 17}{6} = 17\frac{1}{3}$ Fuss, also der Inhalt $18 \cdot 17\frac{1}{3} = 312$ □Fuss.



Auf eine genäherte Art zeichnet man den Bogen durch zwei Kreisbögen, indem man einen beliebigen Punct s wählt, durch welchen der Bogen gehen soll, durch die Puncte acs einen Kreisbogen zieht, dessen Mittelpunct t ist, und durch die Puncte sb einen Bogen beschreibt, dessen Mittelpunct u in der graden Linie st liegt.

71.

Inhalt eines Trapeziums, dessen Bogen eine beliebige unbekannte Krümmung hat.



Man theilt die Grundlinie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, welche sich durch 2, 3, 4, 5 u. s. w. theilen lässt, z. B. in 60 gleiche Theile. In den Theilungspuncten errichtet man senkrechte Höhen aa', bb', cc' u. s. w. bis an den Bogen und misst sie aus. Als Beispiel diene folgende Tafel, wo die Grundlinie $ap = 600$ Zoll, also jeder Theil $ab = bc = cd \cdots = 10$ Zoll. Die Tafel giebt die gemessenen Höhen aa' bei No. 1, bb' bei No. 2 u. s. w. in Zollen.

№		№		№		№		№		№	
1	600	11	714	21	800	31	866	41	916	51	954
2	613	12	724	22	807	32	872	42	921	52	957
3	626	13	733	23	814	33	877	43	925	53	960
4	638	14	742	24	82[illegible]	34	882	44	929	54	963
5	650	15	751	25	828	35	888	45	933	55	966
6	661	16	760	26	835	36	893	46	937	56	968
7	672	17	768	27	842	37	898	47	940	57	971
8	683	18	776	28	843	38	903	48	944	58	973
9	694	19	784	29	854	39	907	49	947	59	975
10	704	20	792	30	860	40	912	50	951	60	978
										61	980

Erste Art.

Nach (V. 70.) multiplicirt man den Abschnitt ac mit $\frac{1}{6}aa' + \frac{4}{6}bb' + \frac{1}{6}cc'$, den Abschnitt cf mit $\frac{1}{6}cc' + \frac{4}{6}dd'$

$+ \frac{1}{6} ff'$ u. s. w. Da aber $ac = cf = fh$ u. s. w., so ist es kürzer, zu der Summe der 1sten und 61sten Höhe, die 4fache Summe der 2ten, 4ten, 6ten ... 60sten Höhe, und die 2fache Summe der 3ten, 5ten, 7ten ... 59sten Höhe zu addiren und die ganze Summe mit $\frac{1}{6}$ ac zu multipliciren, nach dem Schema

1,	4,	1					
		1,	4,	1			
				1,	4,	1	
1,	4,	2,	4,	2,	4,	2	

Die Summe der 1sten und 61sten	1580
» » » 2ten, 4ten ... 60sten = 25247 mit 4 ..	100988
» » » 3ten, 5ten ... 59sten = 24453 mit 2 ...	48906
	151474
multiplicirt mit $\frac{1}{6} ac$	$3\frac{1}{3}$
Inhalt □Zoll	$504913\frac{1}{3}$

Zweite Art, nach Newton.

Man bildet Gruppen von vier Höhen, deren Grundlinien $ad = dh$ u. s. w. 3 Theile enthalten, und wendet das Schema $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ an, also

1,	3,	3,	1						
			1,	3,	3,	1			
						1,	3,	3,	1 ....
1,	3,	3,	2,	3,	3,	2,	3,	3,	2 ....

Die Summe der 1sten und 61sten	1580
» » » 2, 3, 5, 6, 8, 9 .. 59, 60 = 33663 × 3 =	100989
» » » 4, 7, 10 .. 58 = 16037 × 2 ..... =	32074
	134643
multiplicirt mit $\frac{1}{8} ad$	$3\frac{3}{4}$
Inhalt □Zoll	$504911\frac{1}{2}$

Dritte Art, nach Cotes.

Man nimmt bei je fünf Höhen das Schema $7 + 32 + 12 + 32 + 7 = 90$, bei je sechs Höhen $19 + 75 + 50 + 50 + 75 + 19 = 288$, bei je sieben Höhen $41 + 216 + 27 + 272 + 27 + 216 + 41 = 840$ u. s. w. Wählt man fünf Höhen, so ist das Schema

7,	32,	12,	32,	7,					
				7,	32,	12,	32,	7	u. s. w.
7,	32,	12,	32,	14,	32,	12,	32,	14	u. s. w.

Die Summe der 1sten und 61sten	$= 1580 \times 7$ ..		11060
» » » 2, 4, 6, 8...60	$= 25247 \times 32$		807904
» » » 3, 7, 11, 15..59	$= 12624 \times 12$		151488
» » » 5, 9, 13, 17..57	$= 11829 \times 14$		165606
			1136058
multiplicirt mit $\frac{1}{90} af =$	....		$\frac{4}{9}$
		Inhalt □Zoll	$504914\frac{2}{3}$

Vierte Art, nach Gauss.

Man theilt die Grundlinie einer Gruppe, z. B. af, in die Hälfte in c, aber in b und d nicht in gleiche Theile, sondern in ungleiche Theile, so dass $cb = cd = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot ac = 0{,}7746 \times ac$ sey. Man misst bloss die drei Höhen in b, c, d, und multiplicirt af mit $\frac{5}{18} bb' + \frac{8}{18} cc' + \frac{5}{18} dd'$. In dem obigen Beispiel ist $af = 40$, $ac = cf = 20$, also $bc = cd = 15\frac{1}{2}$, also $bb' = 606$, $cc' = 626$, $dd' = 644$. Man hat also $5 \cdot bb' + 8 \cdot cc' + 5 \cdot dd' = 11258$, dieses mit $\frac{1}{18} af = \frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt den Inhalt von $afa'f' = 25018$ □Zoll. Wendet man dieses Verfahren auf alle 15 Gruppen an, so entsprechen

die Puncte b den Abständen $4\frac{1}{2}$, $44\frac{1}{2}$, $84\frac{1}{2}$, ... bis $564\frac{1}{2}$
» » c » » 20, 60, 100, ... bis 580
» » d » » $35\frac{1}{2}$, $75\frac{1}{2}$, $115\frac{1}{2}$ .... $595\frac{1}{2}$

Summe der $bb' = 12475$, der $dd' = 12769$,

beide zusammen...	25244×5	$= 126220$
Summe der $cc' =$	12624×8	100992
		227212
multiplicirt mit $\frac{1}{18} af =$	....	$2\frac{2}{9}$
	Inhalt □Zoll	504915

Probe.

Die Zahlen der obigen Tafel berechnete ich so, dass $ma = 800$, $aa' = 600 = ap$, $mp = 200$, und dass die Puncte $a'b'c'$ ... in einem aus dem Mittelpunct m mit dem Halbmesser $ma' = mp' = 1000$ beschriebenen Kreisbogen liegen. Z. B. $ab = 10$, also $mb = 790$, $mb' = 1000$, also $bb' = \sqrt{375900} = 613$ u. s. w. Zuletzt ist $pp' = \sqrt{960000} = 979{,}7959$, $\angle\, pmp' = 78^0 27'{,}7825$, $\angle\, ama' = 36^0 52'{,}1938$, also $\angle\, a'mp' = 41^0 35'{,}5887$, oder $= 2495'{,}5887$. Also (V. 60.)

$$\frac{\pi r^2}{21600} = 145{,}444104$$

$$\angle\, m = 2495{,}5887$$

$$\text{Sector } a'mp' = 362968{,}66$$

$$\triangle\ ama' = 800 \cdot 300 = +\ 240000$$

$$\triangle\ pmp' = 100 \cdot 979{,}7959 = -\ \ 97979{,}59$$

$$\text{genauer Inhalt} = 504989$$

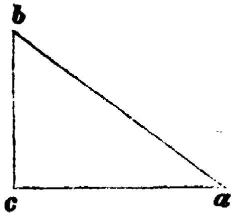
$$\text{obiger genäherter Inhalt} = 504915$$

$$\text{Fehler} \quad 74 = \tfrac{1}{6824}.$$

Sechster Cursus.

Trigonometrie.

1.



Die trigonometrischen Zahlen hängen von der Grösse des Winkels ab, und werden durch die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt.

Der *Sinus* heisst das Verhältniss der Gegenkathete zur Hypotenuse, $sin\ a = \frac{b\,c}{a\,b}$.

Der *Cosinus* heisst das Verhältniss der Nebenkathete zur Hypotenuse, $cos\ a = \frac{c\,a}{a\,b}$.

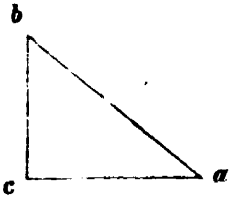
Die *Tangens* heisst das Verhältniss der Gegenkathete zur Nebenkathete, $tg\ a = \frac{b\,c}{c\,a}$.

Die *Cotangens* heisst das Verhältniss der Nebenkathete zur Gegenkathete, $cot\ a = \frac{c\,a}{b\,c}$.

Die *Secans* heisst das Verhältniss der Hypotenuse zur Nebenkathete, $sec\ a = \frac{a\,b}{c\,a}$.

Die *Cosecans* heisst das Verhältniss der Hypotenuse zur Gegenkathete, $cosec\ a = \frac{a\,b}{b\,c}$.

2.



Die Summe der Quadrate des Sinus und Cosinus ist gleich 1. Das Product der Tangens und Cotangens ist gleich 1. Das Product der Secans und des Cosinus ist gleich 1. Das Product der Cosecans und des Sinus ist gleich 1.

Denn da $sin\ a = \frac{bc}{ab}$, $cos\ a = \frac{ca}{ab}$, so ist $sin^2\ a = \frac{bc^2}{ab^2}$, $cos^2\ a = \frac{ca^2}{ab^2}$, also $sin^2\ a + cos^2\ a = \frac{bc^2 + ca^2}{ab^2}$. Aber (II. 45.) $bc^2 + ca^2 = ab^2$. Also $sin^2\ a + cos^2\ a = 1$.

Ferner da $tg\ a = \frac{bc}{ca}$, $cot\ a = \frac{ca}{bc}$, so ist $tg\ a \cdot cot\ a = \frac{bc \cdot ca}{ca \cdot bc} = 1$. Da $sec\ a = \frac{ab}{ca}$, $cos\ a = \frac{ca}{ab}$, so ist $sec\ a \cdot cos\ a = \frac{ab \cdot ca}{ca \cdot ab} = 1$. Da $cosec\ a = \frac{ab}{bc}$, $sin\ a = \frac{bc}{ab}$, so ist $cosec\ a \cdot sin\ a = \frac{ab \cdot bc}{bc \cdot ab} = 1$. Auch ist:

$$tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a},\quad cot\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

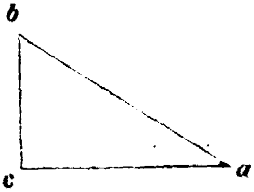
$$cos^2\ a = 1 - sin^2\ a,\quad sin^2\ a = 1 - cos^2\ a,$$

$$tg\ a = \frac{1}{cot\ a},\quad cot\ a = \frac{1}{tg\ a},\quad sec\ a = \frac{1}{cos\ a},$$

$$cos\ a = \frac{1}{sec\ a},\quad cosec\ a = \frac{1}{sin\ a},\quad sin\ a = \frac{1}{cosec\ a}.$$

Durch diese Gleichungen können aus einer trigonometrischen Zahl alle übrigen gefunden werden. Z. B. Es sey $sin\ a = x$, so ist $cos\ a = \sqrt{1 - x^2}$, $tg\ a = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $cot\ a = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, $sec\ a = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $cosec\ a = \frac{1}{x}$.

3.



Wenn zwei Winkel zusammen einen rechten Winkel ausmachen, so ist der Sinus des einen dem Cosinus des andern gleich, die Tangens des einen der Cotangens des andern gleich, die Secans des einen der Cosecans des andern gleich.

Denn es sey $a + b = R$, so ist

$$sin\ a = \frac{bc}{ab},\quad cos\ b = \frac{bc}{ab},\quad \text{also } sin\ a = cos\ b.$$

$$cos\ a = \frac{ca}{ab},\quad sin\ b = \frac{ca}{ab},\quad \text{also } cos\ a = sin\ b.$$

$$tg\ a = \frac{bc}{ca},\quad cot\ b = \frac{bc}{ca},\quad \text{also } tg\ a = cot\ b.$$

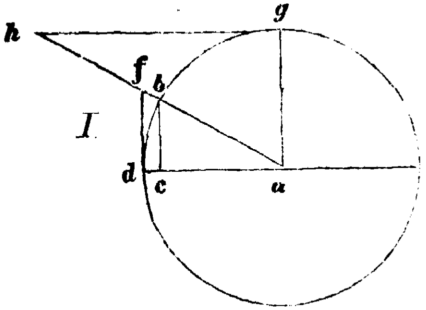
$$\cot a = \frac{ca}{bc},\quad \operatorname{tg} b = \frac{ca}{bc},\quad \text{also } \cot a = \operatorname{tg} b,$$

$$\sec a = \frac{ab}{ca},\quad \operatorname{cosec} b = \frac{ab}{ca},\quad \text{also } \sec a = \operatorname{cosec} b.$$

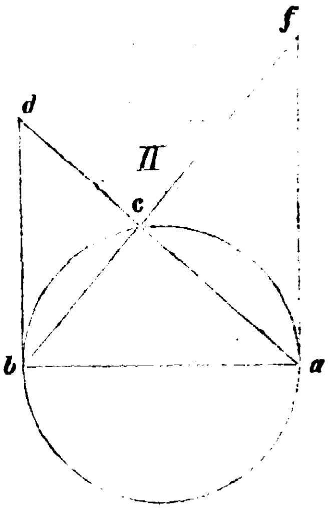
$$\operatorname{cosec} a = \frac{ab}{bc},\quad \sec b = \frac{ab}{bc},\quad \text{also } \operatorname{cosec} a = \sec b.$$

4.

Die trigonometrischen Zahlen können als Sehnen, Tangenten, Secanten des Kreises dargestellt werden, wenn man den Halbmesser oder Durchmesser zur Einheit annimmt.



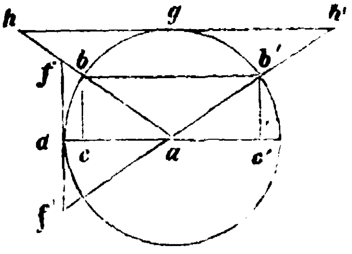
Es sey in I. der Halbmesser $ab = ad = ag = r$ die Einheit, so ist $bc = r \cdot \sin a$, $ca = r \cdot \cos a$, $df = r \cdot \operatorname{tg} a$, $gh = r \cdot \cot a$, $af = r \cdot \sec a$, $ah = r \cdot \operatorname{cosec} a$.



Es sey in II. der Durchmesser $ab = D$ die Einheit, so ist $bc = D \cdot \sin a$, $ac = D \cdot \cos a$, $bd = D \cdot \operatorname{tg} a$, $af = D \cdot \cot a$, $ad = D \cdot \sec a$, $bf = D \cdot \operatorname{cosec} a$.

5.

Wenn ein spitzer und ein stumpfer Winkel einander zu zwei rechten Winkeln ergänzen, so sind ihre gleichnamigen trigonometrischen Zahlen an Werth gleich, aber nur der Sinus und die Cosecans des stumpfen Winkels sind positiv, hingegen der Cosinus, die Tangens, Cotangens und Secans des stumpfen Winkels sind negativ.



Denn es sey der Halbmesser des Kreises $= r$ zur Einheit angenommen, der Winkel $bac = a$, $\angle b'ac = a'$ und $a + a' = 2R$, so ist (4) $r \cdot \sin a = bc$, $r \cdot \sin a' = b'c'$, bc und $b'c'$ sind einander gleich und liegen auf einer Seite des Halbkreises nach einerlei Richtung, haben also einerlei Vorzeichen, daher $\sin a' = \sin a$, $r \cdot \cos a = ca$, $r \cdot \cos a' = c'a$, die Abschnitte $ca = c'a$ liegen auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts, haben also entgegengesetzte Vorzeichen, also ist $\cos a' = - \cos a$.

$$r \cdot tg\ a = df, \quad r \cdot tg\ a' = df', \quad df' = - df,$$
$$r \cdot cot\ a = gh, \quad r \cdot cot\ a' = gh', \quad gh' = - gh,$$
also $tg\ a' = - tg\ a$, $cot\ a' = - cot\ a$,

$r \cdot sec\ a = af$, $r \cdot sec\ a' = af'$, $r \cdot cosec\ a = ah$, $r \cdot cosec\ a' = ah'$.

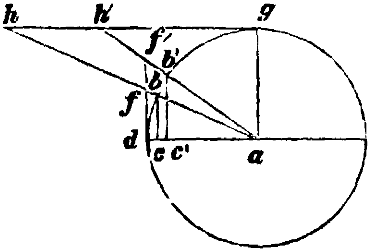
Da $sec\ a' = \frac{1}{\cos a'}$, $cosec\ a' = \frac{1}{\sin a'}$, und da $\cos a'$ das entgegengesetzte Zeichen von $\cos a$, $\sin a'$ dasselbe Zeichen wie $\sin a$ hat, so muss auch $sec\ a'$ das entgegengesetzte Zeichen von $sec\ a$, und $cosec\ a'$ dasselbe Zeichen wie $cosec\ a$ haben. Also

$$cosec\ a' = cosec\ a, \quad sec\ a' = - sec\ a.$$

Um die trigonometrische Zahl eines stumpfen Winkels zu finden, zieht man denselben von 180° ab, und nimmt davon die gleichnamige Zahl, oder man zieht 90° von dem stumpfen Winkel ab, und nimmt davon die wechselnamige Zahl. Wenn also $a' > R$ und $< 2R$, so ist

$$\sin a' = \cos (a' - R), \quad \cos a' = - \sin (a' - R),$$
$$tg\ a' = - cot\ (a' - R), \quad cot\ a' = - tg\ (a' - R),$$
$$sec\ a' = - cosec\ (a' - R), \quad cosec\ a' = sec\ (a' - R).$$

6.



Bei einem spitzen Winkel ändern sich die trigonometrischen Zahlen in der Art, dass der grössere Winkel einen grösseren Sinus, eine grössere Tangens und Secans, hingegen einen kleinern Cosinus, eine kleinere Cotangens und Cosecans hat.

Denn wenn $\angle dab' > dab$ ist, so ist $b'c' > bc$, $df' > df$, $af' > af$, dagegen $ac' < ac$, $gh' < gh$, $ah' < ah$. Wenn also $a' > a$, so ist $\sin a' > \sin a$, $tg\ a' > tg\ a$, $sec\ a' > sec\ a$. Hingegen $\cos a' < \cos a$, $cot\ a'$,

$< \cot a$, $\operatorname{cosec} a' < \operatorname{cosec} a$. Bei einem spitzen Winkel ist der Sinus zwischen 0 und 1, der Cosinus zwischen 1 und 0, die Tangens zwischen 0 und ∞, die Cotangens zwischen ∞ und 0, die Secans zwischen 1 und ∞, die Cosecans zwischen ∞ und 1. Für die vollen Quadranten haben die trigonometrischen Zahlen folgende Werthe:

	0	R	$2R$	$3R$	$4R$	$5R$	
sin	0	1	0	— 1	0	1	
cos	1	0	— 1	0	1	0	
tg	0	∞	0	∞	0	∞	u. s. w.
cot	∞	0	∞	0	∞	0	
sec	1	∞	— 1	∞	1	∞	
cosec	∞	1	∞	— 1	∞	1	

Bei jedem Durchgange durch 0 oder ∞ ändert sich das Vorzeichen aus dem positiven in das negative, oder aus dem negativen in das positive.

7.

Die trigonometrischen Tafeln geben die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen aller spitzen Winkel unmittelbar für die einzelnen Minuten. Für Theile der Minute findet man sie durch Einschaltung, indem man die Aenderung des Logarithmus der Aenderung des Winkels proportionirt annimmt.

Beispiel. Es seyen die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen für den Winkel $38^0 47' 39'',5$, oder $38^0 47',6583$ zu finden.

lg sin $38^0 47'$	9,7968359
lg sin $38^0 48'$	9,7969930
	1571
mit 0,6583	+ 1034
lg sin	9,7969393
lg cos $38^0 47'$	9,8918274
lg cos $38^0 48'$	9,8917258
	1016
mit 0,6583	— 669
lg cos	9,8917605

lg tg $38^0 47'$	9,9050085
lg tg $38^0 48'$	9,9052672
	2587
mit 0,6583	+ 1703
lg tg	9,9051788
lg cot $38^0 47'$	0,0949915
lg cot $38^0 48'$	0,0947328
	2587
mit 0,6583	— 1703
lg cot	0,0948212

Mit 5stelligen Logarithmen:

	log sin	*log tg*	*log cot*	*log cos*
$38^0 47'$	9,79684	9,90501	0,09499	9,89183
diff. $1'$...	+ 15	+ 26	— 26	— 10
$0',66$.....	+ 10	+ 17	— 17	— 7
$38^0 47',66$	9,79694	9,90518	0,09482	9,89176

Die Summe von *log tg a* und *log cot a* ist immer $= 0$, und ihre Aenderungen sind einander gleich und entgegengesetzt.

Den Sinus und die Tangens eines sehr kleinen Winkels kann man ohne erheblichen Fehler dem Verhältnisse des Bogens zum Halbmesser gleich setzen, und daher die Grade mit $\frac{\pi}{180}$, die Minuten mit $\frac{\pi}{10800}$, die Secunden mit $\frac{\pi}{648000}$ multipliciren. Es ist aber (V. 59.) $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$, $\log = 8{,}2418774$, $\frac{\pi}{10800} = 0{,}0002908882$, $\log = 6{,}4637261$, $\frac{\pi}{648000} = 0{,}0000048481368$, $\log = 4{,}6855749$.

Z. B. Am 5. Febr. 1841 war die Mondesparallaxe $60'35'',87 = 3635'',87$

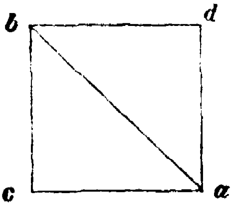
$$\begin{array}{ll} \log 3635'',87 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3{,}5606083 \\ \log \frac{\pi}{648000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{4{,}6855749} \\ \log \sin = \log tg \ldots\ldots\ldots & 8{,}2461832. \end{array}$$

Genauer ist es, zu dem *log sin* oder *log tg* des nächstkleinern Winkels den *log* des Verhältnisses des gegebenen Winkels zum nächstkleinern zu addiren. Z. B.

$3635'',87$....	3,5606083	3635,87	3,56061
3635	3,5605044	3600	3,55630
	1039		431
log sin $1^0 0' 35''$	8,2460568	*log sin* $1^0 0'$...	8,24186
log tg $1^0 0' 35''$	8,2461242	*log tg* $1^0 0'$....	8,24192
log sin	8,2461607	*log sin*	8,24617
log tg	8,2462281	*log tg*	8,24623

Wie man für alle Grade des Quadranten rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten finden kann, und wie man aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks auf eine genäherte Art ohne Tafeln den Winkel berechnen kann, wird im Anhange Aufg. 69. 70. gezeigt werden.

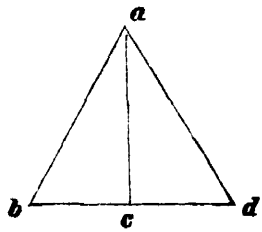
8.



Für einen Winkel von $45^0 = \frac{1}{2} R$, *ist der Sinus und Cosinus* $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, *die Tangens und Cotangens* $= 1$, *die Secans und Cosecans* $= \sqrt{2}$.

$\angle\, bac = a = \frac{1}{2} R$, $ab^2 = 2bc^2 = 2ca^2$, also $\sin a = \frac{bc}{ab} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos a = \frac{ca}{ab} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $tg\ a = \frac{bc}{ca} = 1$, $\cot a = \frac{ca}{bc} = 1$, $\sec a = \frac{ab}{ca} = \sqrt{2}$, $cosec\ a = \frac{ab}{bc} = \sqrt{2}$.

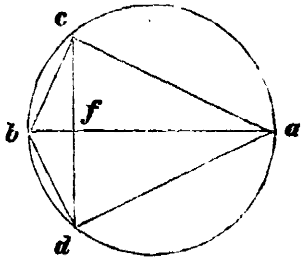
9.



Für einen Winkel von $30^0 = \frac{1}{3} R$, *ist der Sinus* $= \frac{1}{2}$, *der Cosinus* $= \sqrt{\frac{3}{4}}$, *die Tangens* $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, *die Cotangens* $= \sqrt{3}$, *die Secans* $= \sqrt{\frac{4}{3}}$, *die Cosecans* $= 2$.

Es sey $ab = bd = da$, so ist $2bc = bd = ab$, also $ca^2 = ab^2 - bc^2 = 4bc^2 - bc^2 = 3bc^2$. Es sey $\angle\, bac = 30^0 = \frac{1}{3} R = a$, so ist $\sin a = \frac{bc}{ab} = \frac{1}{2}$, $\cos a = \frac{ca}{ab} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $tg\ a = \frac{bc}{ca} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\cot a = \frac{ca}{bc} = \sqrt{3}$, $\sec a = \frac{ab}{ca} = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $cosec\ a = \frac{ab}{bc} = 2$.

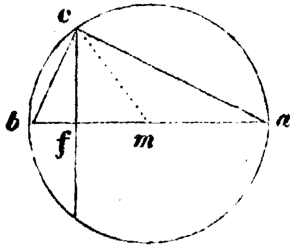
10.



Der Sinus des doppelten Winkels ist gleich dem doppelten Product des Sinus und Cosinus des einfachen Winkels.

In dem rechtwinkligen $\triangle\, abc$ fälle man cf senkrecht auf ab, so ist $\frac{bc}{cf} = \frac{ab}{ca}$, also $bc \cdot ca = ab \cdot cf$. Beschreibt man über dem Durchmesser $ab = D$ einen Kreis, welcher von cf in d geschnitten wird, so ist, wenn $\angle\, bac = a$, $\angle\, cad = 2a$. (VI. 4.), $\frac{bc}{D} = \sin a$, $\frac{ca}{D} = \cos a$, $\frac{cd}{D} = \sin 2a$, also $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, oder $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$.

11.

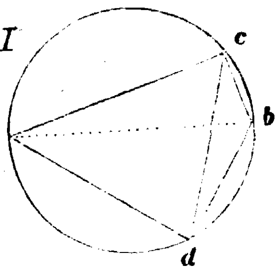


Der Cosinus des doppelten Winkels ist gleich dem Unterschied der Quadrate des Cosinus und Sinus des einfachen Winkels.

Man beschreibt über $ab = D$ als Durchmesser einen Halbkreis, dessen Mittelpunct m ist, fället cf senkrecht auf ab, so ist $\angle\, bac = a$, $\angle\, cmf = 2a$, so ist (VI. 4.) $\sin a = \frac{bc}{D}$, $\cos a = \frac{ca}{D}$, $\cos 2a = \frac{mf}{mc} = \frac{2\,mf}{D}$. Aber $bc^2 = ab \cdot bf$, $ca^2 = fa \cdot ab$, also $ca^2 - bc^2 = fa \cdot ab - ab \cdot bf$. Aber $fa = \frac{1}{2} D + mf$, $bf = \frac{1}{2} D - mf$, also $fa - bf = 2\,mf$. Also $ca^2 - bc^2 = 2\,mf \cdot D$. Dividirt man mit D^2, so ist $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. Aber auch (VI. 2.) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. Also $2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a$, $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$, oder $2 \cos^2 \frac{1}{2} a = 1 + \cos a$, $2 \sin^2 \frac{1}{2} a = 1 - \cos a$.

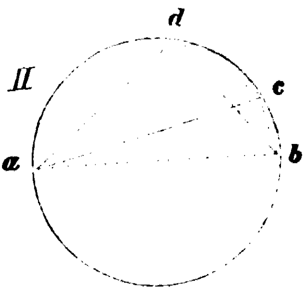
12.

I



Der Sinus der Summe oder des Unterschiedes zweier Winkel ist gleich der Summe oder dem Unterschied der Producte des Sinus des einen Winkels mit dem Cosinus des andern Winkels.

II



Der Durchmesser des Kreises sey $ab = D$, so ist (V. 30.)
in I... $D \cdot cd = db \cdot ca + ad \cdot bc$,
in II... $D \cdot cd = db \cdot ca - ad \cdot bc$.
Wenn nun $\angle\, bad = a$, $\angle\, bac = b$, so ist nach (VI. 4.) $db = D \cdot \sin a$, $ad = D \cdot \cos b$, $bc = D \cdot \sin b$, $ca = D \cdot \cos a$, und in I. $D \sin (a + b) = cd$, in II. $D \sin (a - b) = cd$. Hieraus folgt durch Division mit D^2

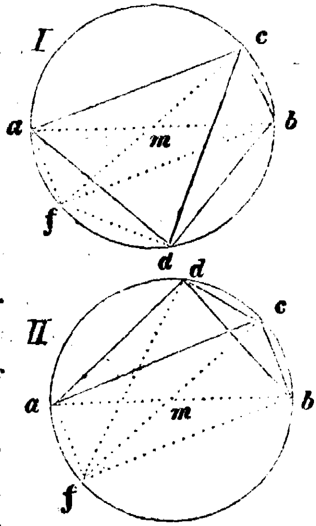
$$\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b,$$
$$\sin (a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$$

Diese beiden Gleichungen sind einander correlativ, und zeigen, dass der Sinus eines negativen Winkels negativ, der Cosinus eines negativen Winkels positiv ist.

Beispiel. $a = 38^0 47'$, $b = 15^0 32'$.

sin a	9,79684	*cos a*	9,89183	0,60350
cos b	9,98384	*sin b*	9,42781	0,20876
	9,78068		9,31964	0,81226
	0,60350		0,20876	0,39474
			sin $(a + b)$	9,90969 $= 54^0 19'$
			sin $(a - b)$	9,59632 $= 23^0 15'$.

13.



Der Cosinus der Summe oder des Unterschiedes zweier Winkel ist gleich dem Unterschied oder der Summe der Producte der Cosinus und der Sinus der Winkel.

Der Durchmesser des Kreises sey $ab = cf = D$, so ist (V. 30.)
in I. $D \cdot df = ad \cdot bf - db \cdot af$
$= ad \cdot ca - db \cdot bc$
in II. $D \cdot df = ad \cdot bf + db \cdot af$
$= ad \cdot ca + db \cdot bc$.

Wenn nun $\angle bad = a$, $\angle bac = b$, so ist (VI. 4.) $db = D \cdot \sin a$, $ad = D \cdot \cos a$, $bc = D \cdot \sin b$, $ca = D \cdot \cos b$, und in I. $df = D \cdot \cos (a + b)$, in II. $df = D \cdot \cos (a - b)$. Hieraus folgt durch Division mit D^2

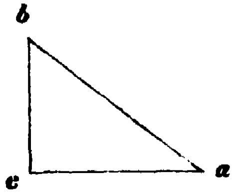
$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

Diese beiden Gleichungen sind einander correlativ und zeigen, dass der Sinus eines negativen Winkels negativ, der Cosinus eines negativen Winkels positiv ist.

Beispiel. $a = 38^0 47'$, $b = 15^0 32'$.

cos a	9,89183	*sin a*	9,79684	0,75105
cos b	9,98384	*sin b*	9,42781	0,16775
	9,87567		9,22465	0,58330
	0,75105		0,16775	0,91880
			cos $(a + b)$	9,75690 $= 54^0 19'$
			cos $(a - b)$	9,96322 $= 23^0 15'$.

14.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Product der Hypotenuse mit dem Sinus eines Winkels der Gegenkathete gleich, und das Product der Hypotenuse mit dem Cosinus eines Winkels der Nebenkathete gleich.

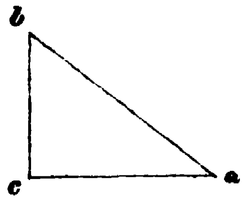
Denn da $\sin a = \frac{bc}{ab}$, $\cos a = \frac{ca}{ab}$, so ist $bc = ab \cdot \sin a$, $ca = ab \cdot \cos a$.

Beispiel. $ab = 95$ Fuss 7 Zoll $= 1147$ Zoll, $a = 48^0 57' 15'' = 48^0 57',25$.

$\sin 48^0 57'$	9,87745		$\cos 48^0 57'$	9,81738
0,25	+ 3		0,25	— 4
$\sin a$	9,87748		$\cos a$	9,81734
ab	3,05956		ab	3,05956
bc	2,93704		ca	2,87690

$bc = 865'',04 = 72'1'',04$ $\quad ca = 753'',18 = 62'9'',18$.

15.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse gleich der Gegenkathete dividirt mit dem Sinus des Winkels, oder gleich der Nebenkathete dividirt mit dem Cosinus des Winkels.

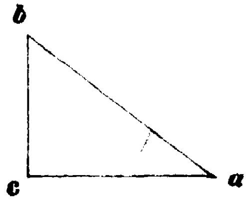
Denn da $\frac{bc}{ab} = \sin a$, $\frac{ca}{ab} = \cos a$, so ist $bc = ab \cdot \sin a$, $ca = ab \cdot \cos a$, also $ab = \frac{bc}{\sin a} = \frac{ca}{\cos a}$.

Beispiel. $bc = 75$ Saschen 6 Fuss $= 531$ Fuss, $a = 27^0 51' 32''$, $b = 62^0 8' 28''$.

$\sin 27^0 51'$	9,66946		$\cos 62^0 8'$	9,66970
32''	+ 13		28''	— 11
$\sin a$	9,66959		$\cos b =$	9,66959
bc	2,72509			
ab	3,05550			

$ab = 1136,32 = 162$ Saschen 2 Fuss 3,8 Zoll.

16.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Gegenkathete gleich der Nebenkathete multiplicirt mit der Tangens des Winkels.

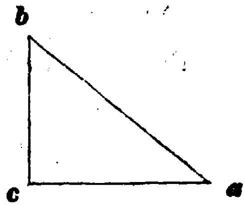
Denn da $\frac{bc}{ca} = tg\ a$, so ist $bc = ca \cdot tg\ a$.

Beispiel. ca = 56 Saschen 3 Fuss 9 Zoll = 395,75 Fuss, $a = 32^0 28' 27''$.

$tg\ 32^0 28'$	9,80363
$27''$	+ 12
$tg\ a$	9,80375
ca	2,59743
bc	2,40118

bc = 251,87 = 35 Saschen 6 Fuss $10\frac{1}{2}$ Zoll.

17.



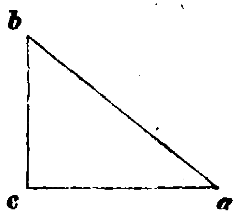
In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Sinus des Winkels gleich der Gegenkathete dividirt mit der Hypotenuse, und der Cosinus des Winkels gleich der Nebenkathete dividirt mit der Hypotenuse.

Nämlich $\frac{bc}{ab} = sin\ a = cos\ b$, und $\frac{ca}{ab} = cos\ a = sin\ b$.

Beispiel. bc = 12 Saschen 4 Fuss 7 Zoll = 1063 Zoll, ab = 18 Saschen 5 Fuss 9 Zoll = 1581 Zoll.

bc	3,02653	$a = 42^0 14\frac{13}{14}'$
ab	3,19893	$= 42^0 14',9$
$sin\ a$	9,82760	
$sin\ 42^0 14'$	9,82747	
$1' = diff.\ 14$	13	

18.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Tangens des Winkels gleich der Gegenkathete dividirt mit der Nebenkathete.

Nämlich $tg\ a = cot\ b = \frac{bc}{ca}$,

$tg\ b = cot\ a = \frac{ca}{bc}$.

Beispiel. bc = 145 Ketten 22 Fuss = 145,44, ca = 198 Ketten 39 Fuss = 198,78.

bc	2,16268	$a = 36^0 11\frac{12}{27}'$
ca	2,29838	$= 36^0 11',44.$
$tg\ a$	9,86430	
$36^0 11'$	9,86418	
$1' =$ *diff.* 27.....	12	

19.

Um in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Kathete und Hypotenuse die andre Kathete trigonometrisch zu bestimmen, sucht man zuerst aus ihnen den Winkel (VI. 17.), *dann aus der Kathete und dem Winkel die andre Kathete* (VI. 16.), *oder aus der Hypotenuse und dem Winkel die andre Kathete* (VI. 14.).

Nämlich $\frac{ca}{ab} = \cos a$, $ca \cdot tg\, a = bc$, $ab \cdot \sin a = bc$.
Zur Probe ist $bc^2 = ab^2 - ca^2 = (ab - ca)(ab + ca)$.

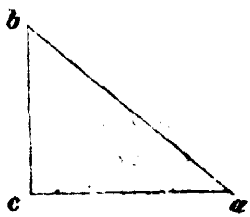
Beispiel. ca = 3 Werst 358 Saschen = 3,716, ab = 4 Werst 426 Saschen = 4,852.

ca	0,57008	$a = 40^0 0',9$		
ab	0,68592	$bc = 3,1198$		
$\cos a$	9,88416	= 3 Werst 59,9 Saschen		
$tg\ a$	9,92404			
$\sin a$	9,80820			
bc	0,49412			

Probe.

ab	4,853
ca	3,716
$ab - ca$	1,136
$ab + ca$	8,568
	0,05538
	0,93288
bc^2	0,98826
bc	0,49413

20.



Um in einem rechtwinkligen Dreiecke aus den beiden Katheten die Hypotenuse trigonometrisch zu bestimmen, sucht man zuerst aus ihnen den Winkel (VI. 18.), *dann aus der einen oder andern und dem Winkel die Hypotenuse* (VI. 15.).

Nämlich $\frac{bc}{ca} = tg\ a$, $ab = \frac{bc}{\sin a} = \frac{ca}{\cos a}$. Zur Probe ist $ab^2 = bc^2 + ca^2$.

Beispiel. $bc = 8$ Fuss 5 Zoll $= 101$ Zoll, $ca = 9$ Fuss $7\frac{1}{2}$ Zoll $= 115{,}5$ Zoll.

bc	2,00432				*Probe.*
ca	2,06258			bc^2	10201
$tg\ a$	9,94174	$a = 41^0 10',12$		ca^2	13340,25
$sin\ a$	9,81841	$ab = 153{,}43$		ab^2	23541,25
$cos\ a$	9,87667	$= 12$ Fuss 9,43 Zoll		ab^2	4,37183
ab	2,18591			ab	2,18591

21.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der mit der Hypotenuse dividirte Unterschied der Hypotenuse und Nebenkathete, dem doppelten Quadrat des Sinus des halben Winkels, dem sogenannten Sinusversus gleich.

Nämlich $\frac{ab - ca}{ab} = 1 - \frac{ca}{ab} = 1 - cos\ a$. Aber (VI. 11.) $1 - cos\ a = 2\ sin^2 \frac{1}{2} a$, also $\frac{ab - ca}{ab} = 2\ sin^2 \frac{1}{2} a$.

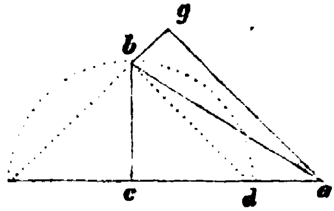
Zur Probe ist $bc^2 = (ab - ca) \cdot (ab + ca)$, und hieraus $sin\ a = \frac{bc}{ab}$, $tg\ a = \frac{bc}{ca}$.

Beispiel. $ca = 860$ Meilen, $ab = 860\frac{1}{4}$ Meilen.

$ab - ca$	9,39794		*Probe.*		
ab	2,93462	$ab - ca$	9,39794	$sin\ a$	8,38214
	6,46332	$ab + ca$	3,23559	$sin\ 82'$	8,37750
$lg\ 2$	0,30103	bc^2	2,63353	$82'$	1,91381
	6,16229	bc	1,31676	a	1,91845
$sin\ \frac{1}{2}a$	8,08114	ab	2,93462	$tg\ a$	8,38226
$sin\ 41'$	8,07650	ca	2,93450	$tg\ 82'$	8,37762
$lg\ 41$	1,61278	$sin\ a$	8,38214	82	1,91381
$\frac{1}{2}a$	1,61742	$tg\ a$	8,38226	a	1,91845
$lg\ 2$	0,30103				
a	1,91845				

$a = 82',88$
$a = 1^0 22' 53''$

22.



In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Unterschied der Katheten dividirt mit der Summe der Katheten gleich der Tangens der

Ergänzung des kleinern Winkels zu einem halben rechten Winkel.

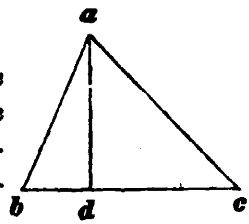
Man mache $cd = cf = bc$, so ist $ad = ca - bc$, $af = ca + bc$. Man ziehe $ag \overset{\frown}{=} db$, so ist $\angle gac = bdf = \frac{1}{2}R = 45^0$, $\angle bag = 45^0 - bac = 45^0 - a$. Es ist $\frac{ca - bc}{ca + bc} = \frac{ad}{af} = \frac{bg}{fg} = \frac{bg}{ag} = tg\ bag$, also $\frac{bc}{ca} = tg\ a$, so ist $\frac{1 - tg\ a}{1 + tg\ a} = tg\ (45^0 - a)$. Dieser Satz wird gebraucht, wenn von zwei Zahlen p, q nur die Logarithmen gegeben sind und man daraus den Logarithmus von dem Verhältniss $\frac{p - q}{p + q}$ finden will.

Beispiel. $log\ p = 3{,}82456$, $log\ q = 3{,}18795$.

$p \cdot\cdot$	3,82456	$a =$	$13^0\ 0',05$
$q \cdot\cdot$	3,18795	$45^0 - a =$	$31^0 59{,}95$
$tg\ a$	9,36339	$tg =$	9,79578

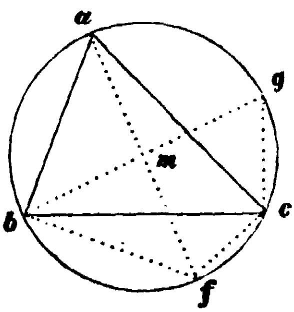
also $lg \frac{p - q}{p + q} = 9{,}79578$.

23.



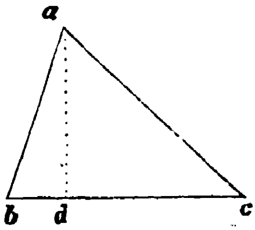
In einem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel. Jede Seite mit dem Sinus des Gegenwinkels dividirt, giebt den Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Man fälle ad senkrecht auf bc, so ist (VI. 14.) $ad = ab \cdot sin\ b$, $ad = ca \cdot sin\ c$, also $ab \cdot sin\ b = ca \cdot sin\ c$, oder $\frac{ca}{ab} = \frac{sin\ b}{sin\ c}$.



Man beschreibt um das $\triangle\ abc$ einen Kreis, und zieht den Durchmesser $af = D$, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle\ abf$ (VI. 15.) $D = \frac{ab}{sin\ afb} = \frac{ab}{sin\ c}$; in dem rechtwinkligen $\triangle\ acf$ $D = \frac{ca}{sin\ afc} = \frac{ca}{sin\ b}$. Zieht man den Durchmesser $bg = D$, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle\ bcg$, $D = \frac{bc}{sin\ bgc} = \frac{bc}{sin\ a}$. Also ist $D = \frac{bc}{\sin a} = \frac{ca}{\sin b} = \frac{ab}{\sin c}$, und hieraus $\frac{ab}{bc} = \frac{\sin c}{\sin a}$, $\frac{bc}{ca} = \frac{\sin a}{\sin b}$, $\frac{ca}{ab} = \frac{\sin b}{\sin c}$.

24.



In einem Dreieck ist jede Seite gleich der Summe der Producte der Nebenseiten mit den Cosinus der Winkel.

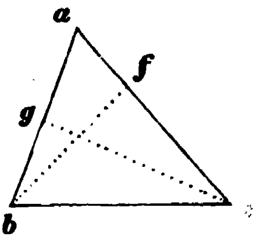
Man fälle ad senkrecht auf bc, so ist (VI. 14.) $bd = ab \cdot \cos b$, $cd = ca \cdot \cos c$, also $bc = ab \cdot \cos b + ca \cdot \cos c$.

Wenn b ein stumpfer Winkel ist, so ist das erste Glied negativ (VI. 5.). Wenn c ein stumpfer Winkel ist, so ist das zweite Glied negativ. Dieser Satz 24. dient, um von der nach 23. geführten Rechnung die Probe zu machen. Die Sätze 23. und 24. enthalten die Grundgleichungen der Trigonometrie, nämlich:

$bc \cdot \sin b = ca \cdot \sin a$, $\quad bc \cdot \sin c = ab \cdot \sin a$.

$bc \cdot \cos b = ab - ca \cdot \cos a$, $\quad bc \cdot \cos c = ca - ab \cdot \cos a$.

25.



Aus einer Seite eines Dreiecks und den Winkeln die andern beiden Seiten, den Inhalt, und den Durchmesser des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Nach (VI. 23.) multiplicirt man die gegebene Seite mit dem Sinus des Gegenwinkels der gesuchten Seite, und dividirt mit dem Sinus des Gegenwinkels der gegebenen Seite. Auf diese Art berechnet man der Reihe nach aus der 1sten Seite die 2te, aus der 2ten die 3te, aus der 3ten wieder die erste, um eine Probe der Addition und Subtraction zu haben. Zur Probe der Richtigkeit der gebrauchten Sinus wendet man den Satz VI. 24. an. Um den Inhalt F zu finden, ist $bf = bc \cdot \sin c$, und $F = \frac{1}{2} ca \cdot bf$, oder $cg = bc \cdot \sin b$, und $F = \frac{1}{2} ab \cdot cg$. Den Durchmesser D berechnet man nach (VI. 23.).

Beispiel 1. bc = 87 Ketten 37 Fuss = 87,74

$a = 64^0 34' 19''$

$b = 61^0 58' 13''$

$c = 53^0 27' 28''$

$\overline{\quad 180^0 \quad}$

bc	1,94320
sin b	9,94581
sin a	9,95575
ca	1,93326
sin c	9,90494
sin b	9,94581
ab	1,89239
sin a	9,95575
sin c	9,90494
bc	1,94320

bc	1,94320
sin c	9,90494
ca	1,93326
½	9,69897
F	3,48037
bc	1,94320
sin b	9,94581
ab	1,89239
½	9,69897
F	3,48037

Probe.

ab	1,89239
cos b	9,67203
	1,56442
ca	1,93326
cos c	9,77482
	1,70808

$ab \cdot \cos b = 36,68$
$ca \cdot \cos c = 51,06$
$bc = 87,74$

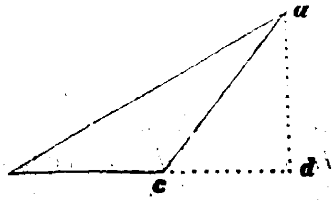
bc	1,94320
sin a	9,95575
D	1,98745

ca	1,93326
sin b	9,94581
D	1,98745

ab	1,89239
sin c	9,90494
D	1,98745

ca = 85,756 = 85 Ketten 37,8 Fuss,
ab = 78,053 = 78 Ketten 2,6 Fuss,
D = 97,152 = 97 Ketten 7,6 Fuss,
F = 3022,53 □Ketten.

Beispiel 2. *bc* = 633 Saschen 5 Fuss = 4436′



$a = 33^0 10'3''$
$b = 33^0 21'16''$
$c = 113^0 28'41''$
180^0

bc	3,64699
sin b	9,74022
sin a	9,73806
ca	3,64915
sin c	9,96247
sin b	9,74022
ab	3,87140
sin a	9,73806
sin c	9,96247
bc	3,64699

bc	3,64699
sin c	9,96247
ca	3,64915
½	9,69897
F	6,95758
bc	3,64699
sin b	9,74022
ab	3,87140
½	9,69897
F	6,95758
lg 117600 =	5,07041
F	1,88717

Probe.

ab	3,87140
cos b	9,92184
bd	3,79324
ca	3,64915
cos c	9,60032
cd	3,24947

$ab \cdot \cos b = 6212,1$
$ca \cdot \cos a = 1776,1$
$bc = 4436$

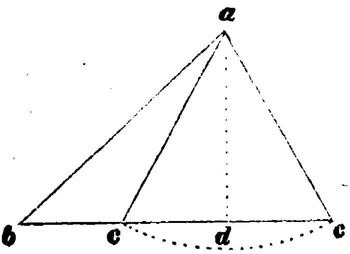
bc	3,64699
sin a	9,73806
D	3,90893

ca	3,64915
sin b	9,74022
D	3,90893

ab	3,87140
sin c	9,96247
D	3,90893

ca = 4458,1 Fuss = 636 Saschen 6,1 Fuss,
ab = 7437,0 Fuss = 1062 Saschen 3,0 Fuss,
D = 8108,3 Fuss = 1158 Saschen 2,3 Fuss,
F = 77,12 Dessätinen.

26.



Aus zwei Seiten eines Dreiecks und einem Gegenwinkel das Dreieck zu berechnen.

Es seyen gegeben ca, ab, b, so ist (VI. 23.) $\sin c = \frac{ab \cdot \sin b}{ca}$.
Die Auflösung ist also nur dann möglich, wenn $ab \cdot \sin b$, d. h. ad kleiner als der Nenner ca ist, weil $\sin c$ immer ein ächter Bruch seyn muss. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, und zugleich ca als die Gegenseite des gegebenen Winkels b kleiner als die Nebenseite ab ist, so sind zwei Dreiecke möglich (I. 35. 37.), indem man (VI. 5.) zu $\sin c$ entweder den spitzen Winkel c, oder seinen stumpfen Nebenwinkel nimmt. Aus c ergiebt sich nun weiter der dritte Winkel a, und dann

$$bc = \frac{ca \cdot \sin a}{\sin b} = \frac{ab \cdot \sin a}{\sin c}.$$

Beispiel. ca = 503 Saschen 5 Fuss = 3526′, ab = 529 Saschen 4 Fuss = 3707′, $b = 58^0 59' 18''$.

ab	3,56902
$\sin b$	9,93301
ca	3,54728
$\sin c$	9,95475

I.

b	$58^0 59',3$
c	$64^0 17',8$
a	$56^0 42',9$
	180^0

I.

ca	3,54728
$\sin c$	9,95475
$\sin b$	9,93301
ab	3,56902
$\sin a$	9,92218
$\sin c$	9,95475
bc	3,53645
$\sin b$	9,93301
$\sin a$	9,92218
ca	3,54728

Probe.

bc	3,53645
$\cos b$	9,71199
	3,24844 . . 1771,9
ca	3,54728
$\cos a$	9,73942
	3,28670 . . 1935,1
ab	= 3707

II.

b	$58^0 59',3$
c	$115^0 42',2$
a	$5^0 18',5$
	180^0

II.

ca	3,54728
$\sin c$	9,95475
$\sin b$	9,93301
ab	3,56902
$\sin a$	8,96621
$\sin c$	9,95475
bc	2,58048
$\sin b$	9,93301
$\sin a$	8,96621
ca	3,54728

Probe.

bc	2,58048	
$\cos b$	9,71199	
	2,29247	..196,1
ca	3,54728	
$\cos a$	9,99814	
	3,54542	..3510,9
ab	$=$	3707

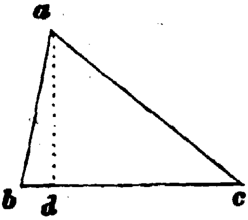
I.

$bc = 3439,1$
$= 491$ Saschen 2,1 Fuss.

II.

$bc = 380,6$
$= 54$ Saschen 2,6 Fuss.

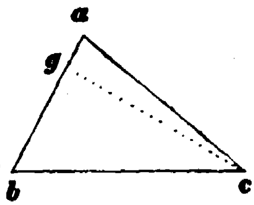
27.



Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product des Sinus eines Winkels und seiner beiden Nebenseiten.

Nach III. 8. ist der Inhalt $F = \frac{1}{2} bc \cdot ad$; aber (VI. 14.) $ad = ab \cdot \sin b = ca \cdot \sin c$, also
$F = \frac{1}{2} ab \cdot bc \cdot \sin b = \frac{1}{2} bc \cdot ca \cdot \sin c = \frac{1}{2} ca \cdot ab \sin a.$

28.



In einem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Product dieser Seiten und des Cosinus ihres Zwischenwinkels.

Nach VI. 23. 24. sind die Grundgleichungen

$$bc \cdot \sin b = ca \cdot \sin a$$
$$bc \cdot \cos b = ab - ca \cdot \cos a.$$

Aber (VI. 2.) $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

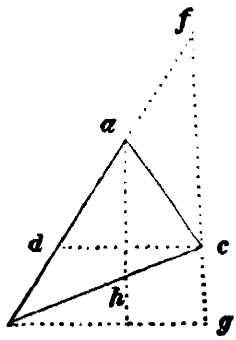
Wenn man also die obigen Gleichungen ins Quadrat erhebt und die Quadrate addirt, so ergiebt sich:

$$bc^2 = ca^2 + ab^2 - 2ca \cdot ab \cdot \cos a,$$
$$ca^2 = ab^2 + bc^2 - 2ab \cdot bc \cdot \cos b,$$
$$ab^2 = bc^2 + ca^2 - 2bc \cdot ca \cdot \cos c.$$

Wenn der Winkel stumpf ist, so ist (VI. 5.) dessen Cosinus negativ, und das dritte Glied muss daher addirt werden.

29.

Die Summe zweier Seiten verhält sich zu ihrem Unterschiede wie die Tangens der halben Summe der Gegenwinkel zu der Tangens ihres halben Unterschiedes.



Es sey $ca < ab$, man mache $ad = af = ca$, verbinde cd, cf, ziehe $bg \parallel cd$, $ah \parallel cf$, so ist $\angle fcd = fgb = cgb = R$, und ah halbirt den Winkel a.

Setzt man $bac = a$, $abc = b$, $acb = c$, so ist $\angle cah = \frac{1}{2}a$, $\angle acd = adc = fbg = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b$, $\angle dcb = cbg = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$.

Aber $fg = bg \cdot tg\, fbg$,
$cg = bg \cdot tg\, cbg$.

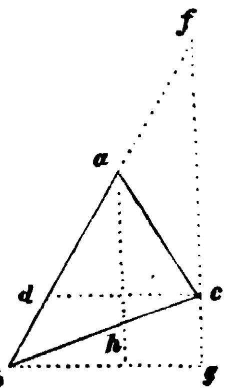
Also $\frac{fg}{cg} = \frac{tg\, fbg}{tg\, cbg}$. Aber $\frac{fg}{cg} = \frac{fb}{db} = \frac{ab + ca}{ab - ca}$.

Also $ab + ca : ab - ca = tg\, fbg : tg\, cbg$,

oder $ab + ca : ab - ca = tg\, \frac{c + b}{2} : tg\, \frac{c - b}{2}$.

Da $\angle fbg + \frac{1}{2}a = R$, $\angle cbg + ahc = R$, so ist $tg\, fbg = cot\, \frac{1}{2}a = \frac{1}{tg\, \frac{1}{2}a}$, $tg\, cbg = cot\, ahc = \frac{1}{tg\, ahc}$.
also ist auch $ab - ca : ab + ca = tg\, \frac{1}{2}a : tg\, ahc$,
oder $tg\, ahc = tg\, \frac{1}{2}a \cdot \frac{ab + ca}{ab - ca}$, $ahc - \frac{1}{2}a = b$.
Diese letztere Form ist für die Berechnung die bequemste.

30.



Das Product der Summe zweier Seiten und des Sinus ihres halben Zwischenwinkels ist gleich dem Product der dritten Seite mit dem Sinus des Neigungswinkels der halbirenden.

Das Product des Unterschiedes zweier Seiten und des Cosinus ihres halben Zwischenwinkels ist gleich dem Product der dritten Seite und des Cosinus des Neigungswinkels der halbirenden.

Es sey $ca < ab$, man mache $ad = af = ca$, verbinde cd, cf, ziehe $bg \parallel cd$, $ah \parallel fcg$, so halbirt ah

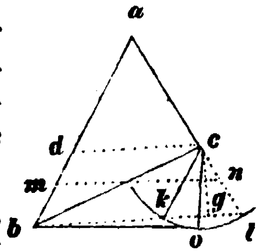
den Winkel a, und $\angle\, ahc$ ist der Neigungswinkel der halbirenden gegen die dritte Seite bc. Hier ist

$$bg = bc \cdot \sin bcg = bf \cdot \sin bfg,$$
$$cg = bc \cdot \cos bcg = bd \cdot \cos bfg.$$

Aber $\angle\, bfg = \frac{1}{2}a$, $\angle\, bcg = ahc$, $bf = ab + ca$, $bd = ab - ca$, also

$$bc \cdot \sin ahc = (ab + ca) \sin \tfrac{1}{2}a,$$
$$bc \cdot \cos ahc = (ab - ca) \cos \tfrac{1}{2}a.$$
$$\angle\, ahc = b + \tfrac{1}{2}a.$$

31.



Das Quadrat des Unterschiedes zweier Seiten ist kleiner als das Quadrat der dritten Seite, um das 4fache Product der beiden Seiten und des Quadrats des Sinus des halben Zwischenwinkels.

Es sey $ca < ab$, man mache $ad = ca$, verbinde cd, ziehe $bl \parallel cd$, cg senkrecht auf bl oder cd, $ck \parallel ab$, so sind die gleichschenkligen Dreiecke acd, alb, clk einander ähnlich, und es ist
$bc^2 = bg^2 + cg^2$, $cl^2 = lg^2 + cg^2$, also
$bc^2 - cl^2 = bg^2 - lg^2 = (bg - lg)(bg + lg)$.
Aber $cl = ck = bd = ab - ca$,
$bg - lg = bk = cd = 2ca \cdot \sin \frac{1}{2}a$,
$bg + lg = bl = 2ab \cdot \sin \frac{1}{2}a$,
also $bc^2 - (ab - ca)^2 = 4ca \cdot ab \sin^2 \frac{1}{2}a$.

Beschreibt man aus c mit dem Halbmesser ck oder cl einen Kreisbogen, an welchen man die Berührende bo zieht, und zieht man eine Linie $mn = bo$ parallel mit bl oder cd, so ist $bc^2 - (ab - ca)^2 = bo^2 = mn^2$.

In dem rechtwinkligen Dreieck bco ist

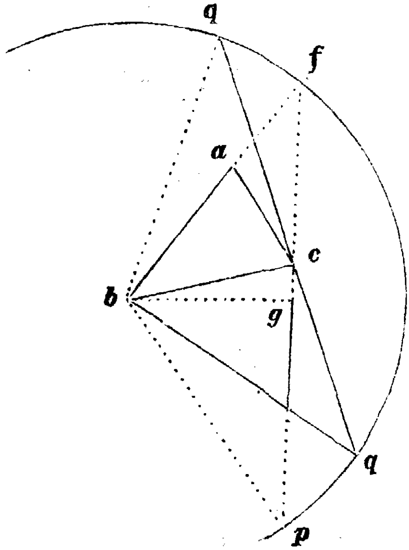
$$tg\, bco = \frac{bo}{co} = \frac{\sqrt{ca \cdot ab \cdot 2 \sin \frac{1}{2}a}}{ab - ca}, \text{ und } bc = \frac{ab - ca}{\cos bco},$$

oder $$bc = ab - ca + (ab - ca) \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} bco}{\cos bco}.$$

32.

Das Quadrat der Summe zweier Seiten ist grösser als das Quadrat der dritten Seite um das 4fache Product der beiden Seiten und des Quadrats des Cosinus des halben Zwischenwinkels.

Man mache $af = ca$, verbinde fcg, ziehe bg senkrecht auf fcg, beschreibe aus b mit dem Halbmesser bf einen Kreis, welcher die fc in p schneidet, errichte auf bc in c eine Senkrechte, welche diesen Kreis in q schneidet, so ist $ab + ca = bf = bp$,

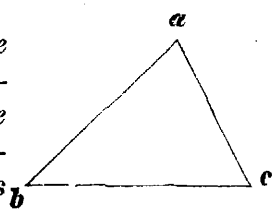


$bf^2 = bg^2 + fg^2$,
$bc^2 = bg^2 + cg^2$,
also $bf^2 - bc^2 = fg^2 - cg^2$
$= (fg - cg)(pg + cg)$,
also $(ab + ca)^2 - bc^2 =$
$fc \cdot cp$,
aber $fc = 2ca \cdot \cos \frac{1}{2}a$,
$cp = 2ab \cdot \cos \frac{1}{2}a$,
also $(ab + ca)^2 - bc^2 =$
$4ca \cdot ab \cdot \cos^2 \frac{1}{2}a$.
Da $cq^2 = fc \cdot cp$, so ist auch $(ab + ca)^2 - bc^2$
$= cq^2$.
Hier ist $cq = \sqrt{fc \cdot cp}$
$= \sqrt{ca \cdot ab} \cdot 2\cos \frac{1}{2}a$.
In dem rechtwinkligen Dreieck bcq ist

$$\sin cbq = \frac{cq}{bq} = \frac{\sqrt{ab \cdot ca} \cdot 2\cos \frac{1}{2}a}{ab + ca},\ bc = (ab + ca) \cos cbq,$$

oder auch $bc = ab + ca - (ab + ca)\, 2 \sin^2 \frac{1}{2} cbq$.

33.



Wenn man von dem halben Umfange des Dreiecks jede der beiden Seiten abzieht, und das Product dieser beiden Reste mit dem Product der beiden Seiten dividirt, so ergiebt sich das Quadrat des Sinus des halben Zwischenwinkels.

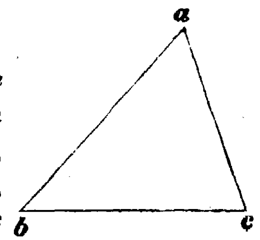
Nach VI. 31. ist $bc^2 - (ab - ca)^2 = 4ca \cdot ab \cdot \sin^2 \frac{1}{2}a$. Setzt man $ab + bc + ca = 2S$, so ist
$bc + ab - ca = 2S - 2ca$, $bc + ca - ab = 2S - 2ab$,
also $bc^2 - (ab - ca)^2 = 4(S - ab)(S - ca)$,

$$\text{also } \sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{(S - ab)(S - ca)}{ab \cdot ca} = C^2 \cdot \frac{bc}{S - bc},$$

wenn $(S - ab)(S - bc)(S - ca) = A^2$, $ab \cdot bc \cdot ca = N^2$,

$$\frac{A^2}{N^2} = C^2.$$

34.



Wenn man von dem halben Umfange eines Dreiecks eine Seite abzieht, diesen Rest mit dem halben Umfange multiplicirt, und mit den beiden andern Seiten dividirt, so ergiebt sich das Quadrat des Cosinus des halben Zwischenwinkels dieser beiden Seiten.

Nach VI. 32. ist $(ab + ca)^2 - bc^2 = 4\,ca \cdot ab \cdot cos^2 \frac{1}{2} a$.

Setzt man $ab + bc + ca = 2S$, so ist $ab + ca - bc = 2S - 2bc$, also $(ab + ca)^2 - bc^2 = 4S(S - bc)$,

also $cos^2 \frac{1}{2} a = \dfrac{S(S - bc)}{ab \cdot ca} = K^2 \cdot (S - bc)\, bc$,

wenn $S = B^2$, $ab \cdot bc \cdot ca = N^2$, $\dfrac{B^2}{N^2} = K^2$.

35.

Die Cotangens des halben Winkels ist dem Ueberschuss des halben Umfangs über die Gegenseite proportionirt.

Denn nach VI. 33. ist $sin^2 \frac{1}{2} a = \dfrac{(S - ab)(S - ca)}{ab \cdot ca}$,

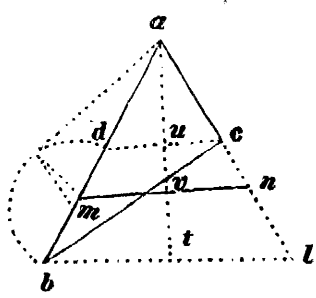
nach VI. 34. ist $cos^2 \frac{1}{2} a = \dfrac{S(S - bc)}{ab \cdot ca}$,

nach VI. 2. ist $\dfrac{cos \frac{1}{2} a}{sin \frac{1}{2} a} = cot \frac{1}{2} a$. Also ist $cot^2 \frac{1}{2} a = \dfrac{S(S - bc)}{(S - ab)(S - ca)} = \dfrac{S}{(S - ab)(S - bc)(S - ca)} (S - bc)^2$.

Setzt man also $\dfrac{S}{(S - ab)(S - bc)(S - ca)} = E^2$, so ist $cot \frac{1}{2} a = E(S - bc)$, $cot \frac{1}{2} b = E(S - ca)$, $cot \frac{1}{2} c = E(S - ab)$.

Hier ist (V. 6.) $\dfrac{1}{E} = r$, der Halbmesser des innern eingeschriebenen Kreises.

36.



Wenn man von dem halben Umfange eines Dreiecks jede Seite abzieht, so ist die Quadratwurzel aus dem Producte des halben Umfanges mit diesen drei Resten dem Inhalte des Dreiecks gleich.

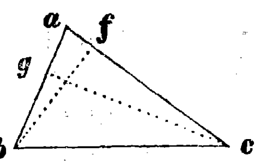
Der halbe Umfang sey S, so ist nach VI. 33. 34.
$ab^2 \cdot ca^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} a \cdot \cos^2 \frac{1}{2} a = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$.
Aber (VI. 10.) $2 \sin \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} a = \sin a$,
und (VI. 27.) $\frac{1}{2} ca \cdot ab \cdot \sin a = F$;
also $F^2 = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$.

Anders. Man mache $ad = ca$, ziehe cd, ferner $bl \parallel cd$. Man nehme $am^2 = ca \cdot ab$, ziehe $mn \parallel cd \parallel bl$, so ist auch $mn^2 = cd \cdot bl$, und $av^2 = at \cdot au$.

Nach VI. 31. ist $bc^2 - (ab - ca)^2 = cd \cdot bl$,
nach VI. 32. ist $(ab + ca)^2 - bc^2 = 4 at \cdot au$,
nach VI. 33. ist $bc^2 - (ab - ca)^2 = 4(S - ab)(S - ca)$,
nach VI. 34. ist $(ab + ca)^2 - bc^2 = 4S(S - bc)$,
also ist $\frac{1}{4} cd \cdot bl \cdot at \cdot au = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$,
oder $\frac{1}{4} mn^2 \cdot av^2 = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$,
aber $\frac{1}{2} mn \cdot av = \triangle\, amn$, und (III. 72.) $\triangle\, amn = abc$,
also $F^2 = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$.

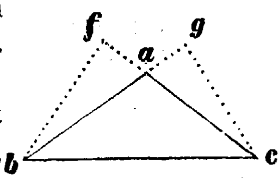
Noch anders. $bc^2 - (ab - ca)^2 = 4 du \cdot bt$,
$(ab + ca)^2 - bc^2 = 4 au \cdot at$,
$bc^2 - (ab - ca)^2 = 4(S - ab)(S - ca)$,
$(ab + ca)^2 - bc^2 = 4S(S - bc)$,
also $du \cdot bt \cdot au \cdot at = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$,
aber $F = du \cdot at$, $F = au \cdot bt$,
also $F^2 = S(S - ab)(S - bc)(S - ca)$.

37.



Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der ersten Art zu berechnen.

Durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke, oder, was dasselbe sagt, durch Anwendung der Grundgleichungen (VI. 23. 24.).



Es seyen ca, ab, b gegeben, so ist
$bc \cdot \sin b = ca \cdot \sin a = cg$,
$bc \cdot \cos b = ab - ca \cdot \cos a = bg$.

Hieraus $tg\, b = \frac{cg}{bg}$, und dann $bc = \frac{cg}{\sin b} = \frac{bg}{\cos b}$,
$bc \cdot \sin c = ab \cdot \sin a = bf$,
$bc \cdot \cos c = ca - ab \cdot \cos a = cf$.

Hieraus $tg\, c = \frac{bf}{cg}$, und dann $bc = \frac{bf}{\sin c} = \frac{cf}{\cos c}$.

Wenn a ein stumpfer Winkel ist, so wird das zweite Glied in bg und cf positiv, weil der Cosinus eines stumpfen Winkels negativ ist (VI. 5.).

Beispiel 1. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 72^0 4',21$.

ca	3,75082	ab	3,86404	a	$= 72^0\ 4',21$
$sin\ a$	9,97838	$sin\ a$	9,97838	b	$= 43^0 51',8$
cg	3,72920	bf	3,84242	c	$= 64^0\ 4',06$
ca	3,75082	ab	3,86404		180^0
$cos\ a$	9,48834	$cos\ a$	9,48834		
ag	3,23916	af	3,35238	bc	$= 7735,8$
ab	7312	ca	5634		
ag	1734,44	af	2251,0		
bg	5577,56	cf	3383,0		
bg	3,74644	cf	3,52930		
$tg\ b$	9,98276	$tg\ c$	0,31312		
$sin\ b$	9,84069	$sin\ c$	9,95391		
$cos\ b$	9,85793	$cos\ c$	9,64079		
bc	3,88851	bc	3,88851		

$b = 43^0 51',8$ $\qquad$ $c = 64^0 4',06$

Beispiel 2. $ab = 7312$, $ca = 5634$,
$a = 107^0 55',79$.

ca	3,75082	ab	3,86404	a	$= 107^0 55',79$
$sin\ a$	9,97838	$sin\ a$	9,97838	b	$= 30^0 38',93$
cg	3,72920	bf	3,84242	c	$= 41^0 25',32$
ca	3,75082	ab	3,86404		180^0
$cos\ a$	9,48834	$cos\ a$	9,48834		
ag	3,23916	af	3,35238	bc	$= 10515,5$
ab	7312	ca	5634		
ag	1734,44	af	2251,0		
bg	9046,44	cf	7885,0		
bg	3,95648	cf	3,89680		
$tg\ b$	9,77272	$tg\ c$	9,94562		
$sin\ b$	9,70737	$sin\ c$	9,82059		
$cos\ b$	9,93465	$cos\ c$	9,87497		
bc	4,02183	bc	4,02183		

$b = 30^0 38',93$ $\qquad$ $c = 41^0 25',32$

38.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der zweiten Art zu berechnen.

Man berechnet die dritte Seite nach VI. 28., und hieraus die beiden Winkel durch VI. 23.

Beispiel 1. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 72^0 4',21$.

2 =	0,3010300	bc^2	7,7770124	a =	72^0 4',21
ab	3,8640362	bc	3,8885062	b =	$43^0 51'$,7498
ca	3,7508168	sin a	9,9783788	c =	64^0 4',0407
cos a	9,4883420	D	3,9101274		180^0
	7,4042250	ca	3,7508168		
	25364423	ab	3,8640362	bc =	7735,817
ab^2	53465344	sin b	9,8406894	D =	8130,69
ca^2	31741956	sin c	9,9539088		
bc^2	59842877				

Beispiel 2. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 107^0 55'$,79.

2 =	0,3010300	bc^2	8,0436441	a =	$107^0 55'$,79
ab	3,8640362	bc	4,0218220	b =	$30^0 38'$,9076
ca	3,7508168	sin a	9,9783788	c =	$41^0 25'$,3033
cos a	9,4883420	D	4,0434432		180^0
	7,4042250	ca	3,7508168		
	25364423	ab	3,8640362	bc =	10515,309
ab^2	53465344	sin b	9,7073736	D =	11052,06
ca^2	31741956	sin c	9,8205930		
bc^2	110571723				

39.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der dritten Art zu berechnen.

Durch Anwendung der Sätze VI. 29. 30.

Man setzt $(ab + ca) \sin \frac{1}{2} a = A$, $(ab - ca) \cos \frac{1}{2} a = B$, $tg\, x = \frac{A}{B}$, dann ist $bc = \frac{A}{\sin x}$ oder $bc = \frac{B}{\cos x}$, und $b = x - \frac{1}{2} a$, $c = 2R - \frac{1}{2} a - x$.

Beispiel 1. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 72^0 4',21$.

ab 7312	$ab + ca$ 4,11213	$x = 79^0 53',86$
ca 5634	$\sin \frac{1}{2}a$ 9,76959	$\frac{1}{2}a = 36^0\ 2',10$
$ab + ca$ 12946	A 3,88172	$b = 43^0 51',76$
$ab - ca$ 1678	$ab - ca$ 3,22479	$a = 72^0\ 4',21$
$\frac{1}{2}a$ $36^0 2',105$	$\cos \frac{1}{2}a$ 9,90776	$c = 64^0\ 4',03$
	B 3,13255	$bc = 7735,8$
	$tg\, x$ 0,74917	
	$\sin x$ 9,99321	
	$\cos x$ 9,24404	
	bc 3,88851	

Beispiel 2. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 107^0 55',79$.

ab 7312	$ab + ca$ 4,11213	$x = 84^0 36',80$
ca 5634	$\sin \frac{1}{2}a$ 9,90776	$\frac{1}{2}a = 53^0 57',89$
$ab + ca$ 12946	A 4,01989	$b = 30^0 38',91$
$ab - ca$ 1678	$ab - ca$ 3,22479	$a = 107^0 55',79$
$\frac{1}{2}a$ $53^0 57',895$	$\cos \frac{1}{2}a$ 9,76959	$c = 41^0 25',30$
	B 2,99438	180^0
	$tg\, x$ 1,02552	$bc = 10515,3$
	$\sin x$ 9,99808	
	$\cos x$ 8,97256	
	bc 4,02182	

40.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der vierten Art zu berechnen.

Wenn die Seiten nicht selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, so wendet man VI. 22. 29. an. Es sey ca die kleinere, ab die grössere Seite, so setzt man $\frac{ca}{ab} = tg\, y$, $45^0 + y = z$, $tg \frac{1}{2}a \cdot tg\, z = tg\, x$, dann ist $x - \frac{1}{2}a = b$, $bc = \frac{ca \cdot \sin a}{\sin b}$.

Beispiel. $\log ab = 3,86404$, $\log ca = 3,75082$, $a = 72^0 4',21$, $\frac{1}{2}a = 36^0 2',105$.

ca 3,75082	$tg \frac{1}{2}a$ 9,86182	ca 3,75082
ab 3,86404	$tg\, z$ 0,88736	$\sin a$ 9,97838
$tg\, y$ 9,88678	$tg\, x$ 0,74918	$\sin b$ 9,84069
		bc 3,88851

$y = 37^0 36',9 \qquad x = 79^0 53',88$

$z = 82^0 36',9 \qquad \tfrac{1}{2}a = 36^0\ 2',11 \qquad bc = 7735,8$

$b = 43^0 51',77$

41.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der fünften Art zu berechnen.

Man berechnet die Gegenseite aus dem Unterschiede der Nebenseiten nach VI. 31.

$$\frac{\sqrt{ca \cdot ab} \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} a}{ab - ca} = tg\ x, \quad bc = \frac{ab - ca}{\cos x}.$$

Wenn der Zwischenwinkel sehr klein ist, so erhält man dadurch den Ueberschuss der Gegenseite über den Unterschied der Nebenseiten sehr genau.

$$bc = ab - ca + (ab - ca) \cdot \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x}{\cos x}.$$

Beispiel 1. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 72^0 4',21$.

ab	3,86404
ca	3,75082
	7,61486
$\sqrt{ab \cdot ca}$	3,80743
$2 =$	0,30103
$\sin \tfrac{1}{2} a$	9,76959
$ab - ca$	3,22479
$tg\ x$	0,65326
$\cos x$	9,33628
bc	3,88851

$x = 77^0 28',35$

Beispiel 2. $ab = 7312$, $ca = 5634$, $a = 1^0 5',6$, $\tfrac{1}{2} a = 32',8$.

ab	3,86404
ca	3,75082
	7,61486
$\sqrt{ab \cdot ca}$	3,80743
$2 =$	0,30103
$\sin \tfrac{1}{2} a$	7,97959
$ab - ca$	3,22479
$tg\ x$	8,86326

$x = 4^0 10' 28,6$

$\tfrac{1}{2} x = 2^0\ 5' 14,3$

$\sin \tfrac{1}{2} x$	8,56137
$\sin \tfrac{1}{2} x$	8,56137
$2 =$	0,30103
$\sec x$	0,00115
$ab - ca$	3,22479
	0,64971
	4,4639
$ab - ca$	1678
$bc =$	1682,4639

42.

Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Dreieck nach der sechsten Art zu berechnen.

Man berechnet die Gegenseite aus der Summe der Nebenseiten nach VI. 32.

$$\frac{\sqrt{ca \cdot ab} \cdot 2 \cos \tfrac{1}{2} a}{ab + ca} = \sin x, \quad bc = (ab + ca) \cdot \cos x.$$

Bei der dritten Art berechnet man die Cosinus der halben Winkel nach VI. 34. Man setzt $\frac{S}{ab \cdot bc \cdot ca} = K^2$, so ist:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = K^2 (S - bc)\, bc, \quad \cos^2 \tfrac{1}{2}b = K^2 (S - ca)\, ca,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2}c = K^2 \cdot (S - ab) \cdot ab.$$

Beispiel.

bc	7736
ca	5634
ab	7312
$2S$	20683
S	10341
$S - bc$	2605
$S - ca$	4707
$S - ab$	3029

S	4,01456
bc	3,88852
ca	3,75082
ab	3,86404
K^2	2,51118

K^2	2,51118
ab	3,86404
$S - ab$	3,48130
	9,85652
$\cos \frac{1}{2}c$	9,92826

K^2	2,51118
bc	3,88852
$S - bc$	3,41581
	9,81551
$\cos \frac{1}{2}a$	9,90775
K^2	2,51118
ca	3,75082
$S - ca$	3,67274
	9,93474
$\cos \frac{1}{2}b$	9,96737

Diese beiden Arten müssen immer gleichzeitig angewendet werden. Denn wenn ein spitzer Winkel kleiner als ein halber rechter ist, so wird er genauer durch den Sinus gefunden als durch den Cosinus; wenn er aber grösser als ein halber rechter ist, so wird er genauer durch den Cosinus als durch den Sinus gefunden.

Bei der vierten Art berechnet man die Sinus der ganzen Winkel, den Inhalt des Dreiecks $= F$, den Durchmesser des umschriebenen Kreises $= D$. Nämlich nach

V. 4. und VI. 36. $4S \cdot (S - ab) \cdot (S - bc) \cdot (S - ca) = 4F^2$,

V. 5. . . . . $\frac{ab \cdot bc \cdot ca}{2F} = D, \qquad \frac{1}{D} = G,$

VI. 23. 27. $\sin a = G \cdot bc, \quad \sin b = G \cdot ca, \quad \sin c = G \cdot ab.$

bc	7736
ca	5634
ab	7312
$2S$	20682
S	10341
$S-bc$	2605
$S-ca$	4707
$S-ab$	3029

S	4,01456
$S-bc$	3,41581
$S-ca$	3,67274
$S-ab$	3,48130
$4 =$	0,60206
$4F^2$	15,18647
$2F$	7,59324

$2F$	7,59324
bc	3,88852
ca	3,75082
ab	3,86404
G	6,08986
D	3,91014

G	6,08986
bc	3,88852
ca	3,75082
ab	3,86404
$\sin a$	9,97838
$\sin b$	9,84068
$\sin c$	9,95390

Da jeder Sinus einem spitzen oder stumpfen Winkel entsprechen kann (VI. 5.), so nimmt man die Gegenwinkel der beiden kleinern gegebenen Seiten immer spitz, wodurch sich von selbst ergiebt, ob der dritte Winkel spitz oder stumpf sey.

Diese vierte Art wird unsicher, wenn der Winkel einem rechten nahe ist, weil dann eine geringe Aenderung des Sinus einer beträchtlichen Aenderung des Winkels entspricht.

Bei der fünften Art berechnet man die Cotangenten der halben Winkel durch den Halbmesser r des innern eingeschriebenen Kreises, nach VI. 35. Man setzt

$$\frac{S}{(S-bc)\,(S-ca)\,(S-ab)} = E^2 = \frac{1}{r^2}, \text{ so ist}$$

$$cot\,\tfrac{1}{2}a = E\,(S-bc), \qquad cot\,\tfrac{1}{2}b = E\,(S-ca),$$

$$cot\,\tfrac{1}{2}c = E\,(S-ab).$$

bc	7736	S	4,01456
ca	5634	$S-bc$	3,41581
ab	7312	$S-ca$	3,67274
$2S$	20682	$S-ab$	3,48130
S	10341	E^2	3,44471
$S-bc$	2605	E	6,72235
$S-ca$	4707	r	3,27765
$S-ab$	3029		

E	6,72235		
$S-bc$	3,41581		
$S-ca$	3,67274		
$S-ab$	3,48130		
$cot\,\frac{1}{2}a$	0,13816	$\frac{1}{2}a$	$= 36^0\ 2',17$
$cot\,\frac{1}{2}b$	0,39509	$\frac{1}{2}b$	$= 21^0 55',89$
$cot\,\frac{1}{2}c$	0,20365	$\frac{1}{2}c$	$= 32^0\ 2',0$

Diese fünfte Art ist die genaueste. Denn sowohl wenn der Winkel in der Nähe von 0 oder $2R$, als auch, wenn er in der Nähe von R oder $3R$ ist, ändern sich die Tangens und Cotangens stärker als die Sinus und Cosinus.

45.

Aus den drei Seiten des Dreiecks die Winkel nach der sechsten Art zu berechnen.

Man wendet VI. 31. an, und setzt $\frac{ab-ca}{bc} = cos\,x$, dann ist $sin\,\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\,tg\,x \cdot \frac{ab-ca}{\sqrt{ab\cdot ca}}$, $\sqrt{ca\cdot ab} = A$.

Beispiel. $ab = 7312$, $bc = 7736$, $ca = 5634$.

ab	3,86404
bc	3,88852
ca	3,75082
	7,61486
	7,75256
	7,63934
A	3,80743
B	3,87628
C	3,81967

$ab - ca$	3,22479
bc	3,88852
$\cos x$	9,33627
$tg\ x$	0,65326
$\frac{1}{2}$	9,69897
$ab - ca$	3,22479
A	3,80743
$\sin \frac{1}{2}a$	9,76959

$\frac{1}{2}a = 36^0 2',12$

$bc - ab$	2,62737
ca	3,75082
$\cos x$	8,87665
$tg\ x$	1,12221
$\frac{1}{2}$	9,69897
$bc - ab$	2,62737
B	3,87628
$\sin \frac{1}{2}b$	9,57227

$\frac{1}{2}b = 21^0 55',84$

$bc - ca$	3,32263
ab	3,86404
$\cos x$	9,45859
$tg\ x$	0,52268
$\frac{1}{2}$	9,69897
$bc - ca$	3,32263
C	3,81967
$\sin \frac{1}{2}c$	9,72461

$\frac{1}{2}c = 32^0 2',0$

46.

Aus den drei Seiten des Dreiecks die Winkel nach der siebenten Art zu berechnen.

Man wendet VI. 32. an, und setzt $\dfrac{bc}{ab + ca} = \cos x$,

dann ist $\cos \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sin x \cdot \dfrac{ab + ca}{A}$, $\sqrt{ca \cdot ab} = A$.

Beispiel. $ab = 7312$, $bc = 7736$, $ca = 5634$.

ab	3,86404
bc	3,88852
ca	3,75082
	7,61486
	7,75256
	7,63934
A	3,80743
B	3,87628
C	3,81967

bc	3,88852
$ab + ca$	4,11213
$\cos x$	9,77639
$\sin x$	9,90407
$\frac{1}{2}$	9,69897
$ab + ca$	4,11213
A	3,80743
$\cos \frac{1}{2}a$	9,90774

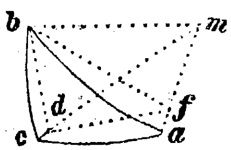
$\frac{1}{2}a = 36^0 2',3$

ca	3,75082	ab	3,86404
$ab + bc$	4,17748	$bc + ca$	4,12613
$\cos x$	9,57334	$\cos x$	9,73791
$\sin x$	9,96721	$\sin x$	9,92283
$\frac{1}{2}$	9,69897	$\frac{1}{2}$	9,69897
$ab + bc$	4,17748	$bc + ca$	4,12613
B	3,87628	C	3,81967
$\cos \frac{1}{2}b$	9,96738	$\cos \frac{1}{2}c$	9,92826

$\frac{1}{2}b = 21^0 55',8$ $\qquad$ $\frac{1}{2}c = 32^0 2',0$

Sphärische Trigonometrie.

47.



In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck giebt das Product des Sinus der Hypotenuse mit dem Sinus eines Winkels den Sinus der Gegenkathete; das Product des Sinus der Hypotenuse mit dem Cosinus eines Winkels ist gleich dem Product des Cosinus der Gegenkathete mit dem Sinus der Nebenkathete; der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Product der Cosinus der beiden Katheten.

Auf der Ebene mac sey die Ebene mbc senkrecht, mc ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie oder Kante (IV. 2.). Wenn diese Ebenen von einer dritten Ebene mab geschnitten werden, so haben diese drei Ebenen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct m (IV. 39.), welcher als der Mittelpunct einer Kugel angesehen werden kann, deren Halbmesser $ma = mb = mc = r$ sind. Die Puncte a, b, c bilden auf der Oberfläche dieser Kugel ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abc, dessen Winkel a, b, c, und dessen Seiten die Bögen ab, bc, ca sind (IV. 67.). Die Seite ab, welche dem Winkel c gegenüberliegt, heisst die Hypotenuse, die Nebenseiten bc, ca heissen die Katheten, und zwar ist bc die Gegenkathete von a, oder die Nebenkathete von b, und ca die Gegenkathete von b, oder die Nebenkathete von a.

Wenn man von b auf mc die Senkrechte bd fället, so ist (IV. 9.) bd auch auf der Ebene mca senkrecht. Wenn man von d auf ma die Senkrechte df fället, und bf verbindet, so ist (IV. 19.) auch bf auf ma senkrecht, und der Winkel bfd misst (IV. 22.) den Neigungswinkel oder Kantenwinkel der Ebenen mab, mac. Zieht man aus a in den Ebenen mab, mac berührende Linien an die Bögen ab, ac, so ist der Winkel, welchen diese auf ma senkrechten Berührungslinien mit einander bilden (IV. 67.), das Maass des Winkels a. Diese Berührungslinien sind den Linien fb, fd gegenseitig parallel, also ist (IV. 31.) ihr Winkel dem $\angle\, bfd$ gleich. Also ist $\angle\, a = bfd$. Aus gleichem Grunde ist $\angle\, c = R$. Da bei gleichen Halbmessern die Bögen das Maass der Centralwinkel sind, so ist $ab = \angle\, bmf$, $bc = \angle\, bmd$, $ca = dmf$. Es ist aber $bd = r \cdot \sin bmd$, also $= r \cdot \sin bc$; $bf = r \cdot \sin bmf$, also $= r \cdot \sin ab$, $bd = bf \cdot \sin bfd$, also $= bf \cdot \sin a$, also $= r \cdot \sin ab \cdot \sin a$. Hieraus folgt

$$\text{I.} \quad \sin ab \cdot \sin a = \sin bc.$$

Ferner ist $df = bf \cdot \cos bfd$, also $= bf \cdot \cos a$, also $= r \cdot \sin ab \cdot \cos a$, $md = r \cdot \cos bmd$, also $= r \cdot \cos bc$, $df = md \cdot \sin dmf$, also $= md \cdot \sin ca$, also $= r \cdot \cos bc \cdot \sin ca$. Hieraus folgt

$$\text{II.} \quad \sin ab \cdot \cos a = \cos bc \cdot \sin ca.$$

Endlich ist $mf = r \cdot \cos bmf$, also $= r \cdot \cos ab$, $mf = md \cdot \cos dmf$, also $= md \cdot \cos ca$, also $= r \cdot \cos bc \cdot \cos ca$. Hieraus folgt

$$\text{III.} \quad \cos ab = \cos bc \cdot \cos ca.$$

Wenn man aus a auf mb, mc senkrechte Linien zieht, so findet man für den Winkel b ganz ähnliche Gleichungen wie die I. II. für den Winkel a, nämlich

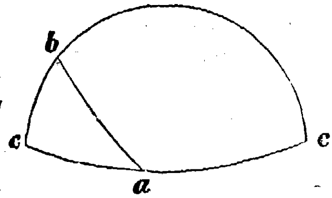
$$\text{IV.} \quad \sin ab \cdot \sin b = \sin ca.$$

$$\text{V.} \quad \sin ab \cdot \cos b = \cos ca \cdot \sin bc.$$

Dieses sind die Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie, da sich aus ihnen alle übrigen ableiten lassen.

Wenn man in diesen Gleichungen die Seiten sehr klein annimmt, so werden die Cosinus der Seiten $= 1$, die Sinus den Seiten proportionirt, und die Gleichungen verwandeln sich daher in die der ebenen Trigonometrie (VI. 14.). Seiten oder Winkel, welche durch ihre Sinus gefunden werden, haben immer (VI. 5.) einen doppelten Werth, nämlich einen welcher $< R$, und einen welcher $> R$ ist, so dass beide Werthe zusammen $2\,R$ machen. Die Sinus sind immer positiv, weil die Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke nicht über $2R$ gehen. Die Cosinus, Tangenten und Cotangenten sind positiv oder negativ, je nachdem die zugehörigen Seiten oder Winkel kleiner oder grösser als R sind.

48.



Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse und einem Winkel zu berechnen.

Es seyen ab und a gegeben, so folgt aus VI. 47. $\sin ab \cdot \sin a = \sin bc$, $\operatorname{tg} ab \cdot \cos a = \operatorname{tg} ca$, $\cos ab \cdot \operatorname{tg} a = \cot b$. Da $\cos bc = \cos a \cdot \frac{\sin ab}{\sin ca}$, so haben $\cos bc$ und $\cos a$ einerlei Vorzeichen. Wenn also $a <$ oder $> R$, so ist auch $bc <$ oder $> R$.

Beispiel. $ab = 98^0 14'$, $a = 35^0 27'$.

$\sin ab$	9,99550	$\operatorname{tg} ab$	— 0,83954	$\cos ab$	— 9,15596
$\sin a$	9,76342	$\cos a$	9,91096	$\operatorname{tg} a$	9,85247
$\sin bc$	9,75892	$\operatorname{tg} ca$	— 0,75050	$\cot b$	— 9,00843
$bc =$	$35^0 1',83$	$ca =$	$100^0 4',32$	$b =$	$95^0 49',30$

49.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus einem Winkel und der Nebenkathete zu berechnen.

Es seyen ca und a gegeben, so folgt aus VI. 47.

$$\sin ca \cdot \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} bc, \quad \frac{\operatorname{tg} ca}{\cos a} = \operatorname{tg} ab, \quad \cos ca \cdot \sin a = \cos b.$$

Beispiel. $ca = 108^0 54'$, $a = 95^0 23'$.

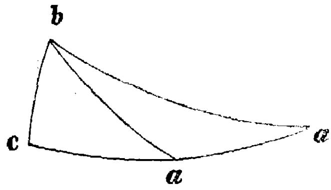
$\sin ca$	9,97593	$\operatorname{tg} ca$	— 0,46550	$\cos ca$	— 9,51043
$\operatorname{tg} a$	— 1,02579	$\cos a$	— 8,97229	$\sin a$	9,99808
$\operatorname{tg} bc$	— 1,00172	$\operatorname{tg} ab$	1,49321	$\cos b$	— 9,50851
$bc =$	$95^0 41',29$	$ab =$	$88^0 9',61$	$b =$	$108^0 48',81$

50.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus einem Winkel und der Gegenkathete zu berechnen.

Es seyen bc und a gegeben, so folgt aus VI. 47.

$$\frac{\operatorname{tg} bc}{\operatorname{tg} a} = \sin ca, \quad \frac{\sin bc}{\sin a} = \sin ab, \quad \frac{\cos a}{\cos bc} = \sin b.$$

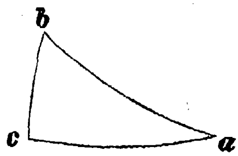


Da die gesuchten Stücke durch ihre Sinus bestimmt werden, so sind immer zwei Dreiecke möglich. Damit aber diese Sinus nicht > 1 werden, so muss, wenn $bc < R$, auch $a < R$, aber $> bc$ seyn; und wenn $bc > R$, auch $a > R$, aber $< bc$ seyn.

Beispiel. $bc = 108^0 40'$, $a = 93^0 31'$.

$tg\, bc$ — 0,47130	$sin\, bc$ 9,97653	$cos\, bc$ — 9,50523
$tg\, a$ — 1,21145	$sin\, a$ 9,99918	$cos\, a$ — 8,78774
$sin\, ca$ 9,25985	$sin\, ab$ 9,97735	$sin\, b$ 9,28251
$ca = 10^0 28',85$	$ab = 71^0 39',25$	$b = 11^0\ 2',95$
oder $= 169^0 31',15$	oder $= 108^0 20',75$	oder $= 168^0 57',05$

51.



Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse und einer Kathete zu berechnen.

Es seyen ca und ab gegeben, so folgt aus VI. 47.

$$\frac{cos\, ab}{cos\, ca} = cos\, bc, \quad \frac{sin\, ca}{sin\, ab} = sin\, b, \quad \frac{tg\, ca}{tg\, ab} = cos\, a.$$

Wenn ca und ab beide $< R$ sind, so muss $ca < ab$ seyn, damit die Sinus oder Cosinus der gesuchten Stücke nicht > 1 werden. Aus demselben Grunde muss, wenn ca und ab beide $> R$ sind, $ca > ab$ seyn; wenn $ca < R$ und $ab > R$ ist, $ca + ab < 2R$ seyn; wenn $ca > R$ und $ab < R$ ist, $ca + ab > 2R$ seyn. Der Winkel b, welcher durch seinen Sinus bestimmt wird, richtet sich (VI. 48.) nach seiner Gegenkathete ca.

Beispiel. $ca = 160^0 48'$, $ab = 21^0 46'$.

$cos\, ca$ — 9,97515	$sin\, ca$ 9,51702	$tg\, ca$ — 9,54187
$cos\, ab$ 9,96788	$sin\, ab$ 9,56917	$tg\, ab$ 9,60130
$cos\, bc$ — 9,99273	$sin\, b$ 9,94785	$cos\, a$ — 9,94057
$bc = 169^0 32',7$	$b = 117^0 31',2$	$a = 150^0 42',3$

52.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus beiden Katheten zu berechnen.

Es seyen bc, ca gegeben, so folgt aus VI. 47.

$$\cos bc \cdot \cos ca = \cos ab, \quad \frac{tg\, bc}{\sin ca} = tg\, a, \quad \frac{tg\, ca}{\sin bc} = tg\, b.$$

Beispiel. $bc = 58^0 17'$, $ca = 158^0 19'$.

$\cos bc$	9,72075	$tg\, bc$	0,20900	$\sin bc$	9,92976
$\cos ca$	— 9,96813	$\sin ca$	9,56759	$tg\, ca$	— 9,59946
$\cos ab$	— 9,68888	$tg\, a$	9,64141	$tg\, b$	— 9,66970
ab	$= 119^0 14',6$	a	$= 23^0 39',0$	b	$= 154^0 56',9$

53.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus beiden Winkeln zu berechnen.

Es seyen a, b gegeben, so folgt aus VI. 47.

$$\cot a \cdot \cot b = \cos ab, \quad \frac{\cos a}{\sin b} = \cos bc, \quad \frac{\cos b}{\sin a} = \cos ca.$$

Damit die Cosinus der gesuchten Stücke nicht grösser als 1 werden, so muss,

wenn $a < R$ und $b < R$ ist, $a + b > R$ seyn;
wenn $a > R$ und $b > R$ ist, $a + b < 3R$ seyn;
wenn $a > R$ und $b < R$ ist, $a - b < R$ seyn;
wenn $a < R$ und $b > R$ ist, $b - a < R$ seyn.

Beispiele. $a = 55^0 18'$, $b = 54^0 32'$.

$\cot a$	9,84038	$\cos a$	9,75533	$\sin a$	9,91495
$\cot b$	9,85273	$\sin b$	9,91087	$\cos b$	9,76360
$\cos a$	9,69311	$\cos bc$	9,84446	$\cos ca$	9,84865
ab	$= 60^0 26',5$	bc	$= 45^0 39',3$	ca	$= 45^0 6',6$

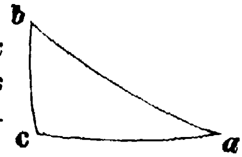
$a = 155^0 31'$ $b = 104^0 44'$

$\cot a$	— 0,34163	$\cos a$	— 9,95908	$\sin a$	9,61745
$\cot b$	— 9,41990	$\sin b$	9,98548	$\cos b$	— 9,40538
$\cos ab$	9,76153	$\cos bc$	— 9,97360	$\cos ca$	— 9,78793
ab	$= 54^0 43',6$	bc	$= 160^0 13',4$	ca	$= 127^0 51',3$

$a = 154^0 27'$ $b = 73^0 58'$

$\cot a$	— 0,32053	$\cos a$	— 9,95531	$\sin a$	9,63478
$\cot b$	9,45845	$\sin b$	9,98277	$\cos b$	9,44122
$\cos ab$	— 9,77898	$\cos bc$	— 9,97254	$\cos ca$	9,80644
ab	$= 126^0 57',1$	bc	$= 159^0 50',4$	ca	$= 50^0 10',8$

54.



Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck in dem Falle zu berechnen, wenn die Sinus und Cosinus der gesuchten Stücke der Einheit sehr nahe kommen.

In diesem Falle wird nämlich die Bestimmung der gesuchten Stücke unsicher. Man bestimmt alsdann diejenigen Stücke, welche durch die Tangens oder Cotangens gefunden werden, und hieraus die übrigen ebenfalls durch die Tangens oder Cotangens. Wenn aber alle gesuchten Stücke durch den Sinus oder Cosinus bestimmt werden, so leitet man Ausdrücke für den halben Winkel ab. Dieses geschieht durch nachstehende Formeln, welche sich leicht aus VI. **11. 12. 13.** beweisen lassen:

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = tg^2 \tfrac{1}{2} a, \quad \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = tg^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} a)$$
$$= \cot^2 (45^0 + \tfrac{1}{2} a),$$
$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = tg \frac{b - a}{2} \cdot tg \frac{b + a}{2},$$
$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{tg \frac{1}{2} (a - b)}{tg \frac{1}{2} (a + b)},$$
$$\frac{tg\, a - tg\, b}{tg\, a + tg\, b} = \frac{\sin (a - b)}{\sin (a + b)}, \quad \frac{1 - \cot a \cdot \cot b}{1 + \cot a \cdot \cot b} = - \frac{\cos (a + b)}{\cos (a - b)}.$$

Beispiele.

VI. 48. Gegeben die Hypotenuse $ab = 91^0 15'$ und ein Winkel $a = 88^0 34'$.

Hier ist $tg\, ab \cdot \cos a = tg\, ca$, und daraus $\sin ca \cdot tg\, a = tg\, bc$, oder $\cos ab \cdot tg\, a = \cot b$, und daraus $tg\, ab \cdot \cos b = tg\, bc$.

$\sin ab$	9,99990	$tg\, ab$	— 1,66114	$\cos a$	— 8,33875
$\sin a$	9,99986	$\cos a$	8,39818	$tg\, a$	1,60168
$\sin bc$	9,99976	$tg\, ca$	— 0,05932	$\cot b$	— 9,94043
$bc = 88^0 6'$ unsicher		$\sin ca$	9,87712	$\cos b$	— 9,81767
		$tg\, a$	1,60168	$tg\, ab$	— 1,66114
$ca = 131^0 6',0$		$tg\, bc$	1,47880	$tg\, bc$	1,47881
$b = 131^0 5',0$					
$bc = 88^0 5',89$					

In diesem Falle kann man auch rechnen nach der Formel: $\sin (ab - bc) = \sin ab \cdot \cos a \cdot tg \frac{1}{2} b$.

$tg\ \frac{1}{2} b$	0,34214
$cos\ a$	8,39818
$sin\ ab$	9,99990
$sin\ (ab - bc)$	8,74022
$ab - bc =$	$3^0\ 9',11$
ab	$91^0 15'$
$bc =$	$88^0\ 5',89$

VI. 49. Gegeben ein Winkel $a = 90^0 37'$ und die Nebenkathete $ca = 179^0 58'$.

Hier ist $sin\ ca \cdot tg\ a = tg\ bc$, und hieraus $\frac{tg\ ca}{sin\ bc} = tg\ b$, oder $\frac{tg\ ca}{cos\ a} = tg\ ab$, und hieraus $cos\ ab \cdot tg\ a = cot\ b$.

$cos\ ca$ —	9,99999	$sin\ ca$	6,76476	$tg\ ca$ —	6,76476
$sin\ a$	9,99997	$tg\ a$ —	1,96806	$cos\ a$ —	8,03192
$cos\ b$ —	9,99996	$tg\ bc$ —	8,73282	$tg\ ab$	8,73284
$b = 179^0 20'$ unsicher.		$sin\ bc$	8,73219	$cos\ ab$	9,99936
		$tg\ ca$ —	6,76476	$tg\ a$ —	1,96806
		$tg\ b$ —	8,03257	$cot\ b$ —	1,96742

$bc = 176^0 54',36$
$ab = \quad 3^0\ 5',65$
$b = 179^0 22',95$

VI. 50. Gegeben ein Winkel $a = 66^0 21'$ und die Gegenkathete $bc = 66^0 18'$.

Man setze $a + bc = 2S$, $\quad a - bc = 2d$,

aus $\frac{tg\ bc}{tg\ a} = sin\ ca$, wird $\frac{sin\ 2d}{sin\ 2S} = cot^2\ (45^0 + \frac{1}{2} ca)$,

aus $\frac{sin\ bc}{sin\ a} = sin\ ab$, wird $\frac{tg\ d}{tg\ S} = cot^2\ (45^0 + \frac{1}{2} ab)$,

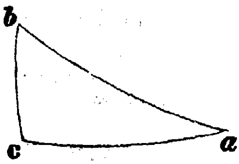
aus $\frac{cos\ a}{cos\ bc} = sin\ b$, wird $tg\ d \cdot tg\ S = cot^2\ (45^0 + \frac{1}{2} b)$.

$tg\ bc$	0,35757	$sin\ bc$	9,96174	$cos\ bc$	9,60417
$tg\ a$	0,35860	$sin\ a$	9,96190	$cos\ a$	9,60331
$sin\ ca$	9,99897	$sin\ ab$	9,99984	$sin\ b$	9,99914

$ca = 86^0 3'$ unsicher, $ab = 88^0 27'$ unsicher, $b = 86^0 24'$ unsich.

a	$66^0 21'$	$\sin 2d$	6,94085	$tg\ d$	6,63982
bc	$66^0 18'$	$\sin 2S$	9,86659	$tg\ S$	0,35808
$2d$	$0^0\ 3'$		7,07426	subtr.	6,28174
$2S$	$132^0 39'$	$\cot$	8,53713	add.	6,99790
d	$0^0\ 1',5$		$88^0 1',63$	$\cot$	8,14087
S	$66^0 19',5$	$ca =$	$86^0 3',26$	$\cot$	8,49895
					$89^0 12',45$
					$88^0 11',58$
				$ab =$	$88^0 24',90$
				$b =$	$86^0 23',16$

VI. 51. Gegeben die Hypotenuse $ab = 1^0 23'$ und eine Kathete $ca = 1^0 9'$.



Man setze $ab + ca = 2S$,
$ab - ca = 2d$,

aus $\dfrac{\cos\ ab}{\cos\ ca} = \cos\ bc$, wird $tg\ d \cdot tg\ S = tg^2\ \frac{1}{2} bc$,

aus $\dfrac{\sin\ ca}{\sin\ ab} = \sin\ b$, wird $\dfrac{tg\ d}{tg\ S} = \cot^2\ (45^0 + \frac{1}{2} b)$,

aus $\dfrac{tg\ ca}{tg\ ab} = \cos\ a$, wird $\dfrac{\sin\ 2d}{\sin\ 2S} = tg^2\ \frac{1}{2} a$.

$\cos\ ca$	9,99991	$\sin\ ca$	8,30255	$tg\ ca$	8,30263
$\cos\ ab$	9,99987	$\sin\ ab$	8,38276	$tg\ ab$	8,38289
$\cos\ bc$	9,99996	$\sin\ b$	9,91979	$\cos\ a$	9,91974
$bc =$	$0^0 46'$ unsicher	$b =$	$56^0 14',3$	$a =$	$33^0 46',2$

ab	$1^0 23'$	$\sin 2d$	7,60985	$tg\ d$	7,30882
ca	$1^0\ 9'$	$\sin 2S$	8,64543	$tg\ S$	8,34461
$2d$	$0^0 14'$		8,96442	add.	5,65343
$2S$	$2^0 32'$	tg	9,48221	subtr.	8,96421
d	$0^0\ 7'$		$16^0 53',09$	tg	7,82671
S	$1^0 16'$	$a =$	$33^0 46',18$	$\cot$	9,48210
		$b =$	$56^0 14',30$		$0^0 23'\ 4''$
		$bc =$	$0^0 46'\ 8''$		$73^0\ 7',15$

VI. 52. Gegeben die beiden Katheten $bc = 0^0 46'$, $ca = 1^0 9'$.

Hier ist $\frac{tg\ bc}{sin\ ca} = tg\ a$, und daraus $\frac{tg\ ca}{cos\ a} = tg\ ab$,
oder $\frac{tg\ ca}{sin\ bc} = tg\ b$, und daraus $\frac{tg\ bc}{cos\ b} = tg\ ab$.

cos bc	9,99996	*tg bc*	8,12651	*sin bc*	8,12647
cos ca	9,99991	*sin ca*	8,30255	*tg ca*	8,30263
cos ab	9,99987	*tg a*	9,82396	*tg b*	0,17616
$ab = 1^0 24'$ unsicher.		*cos a*	9,92013	*cos b*	9,74401
		tg ca	8,30263	*tg bc*	8,12651
$a = 33^0 41',67$		*tg ab*	8,38250	*tg ab*	8,38250
$b = 56^0 18',85$					
$ab = 1^0 22',93$					

VI. 53. Gegeben die beiden Winkel $a = 54^0 39'$, $b = 35^0 38'$.

Man setze $a + b - 90^0 = 2S$, $90^0 - a + b = 2d$,
aus $cot\ a \cdot cot\ b = cos\ ab$ wird $\frac{sin\ 2S}{sin\ 2d} = tg^2\ \frac{1}{2} ab$,
aus $\frac{cos\ a}{sin\ b} = cos\ bc$ wird $\frac{tg\ S}{tg\ d} = tg^2\ \frac{1}{2} bc$,
aus $\frac{cos\ b}{sin\ a} = cos\ ca$ wird $tg\ S \cdot tg\ d = tg^2\ \frac{1}{2} ca$.

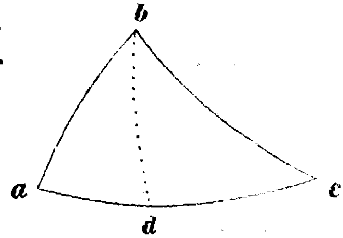
cot a	9,85086	*cos a*	9,76236	*sin a*	9,91149
cot b	0,14460	*sin b*	9,76537	*cos b*	9,90996
cos ab	9,99546	*cos bc*	9,99699	*cos a*	9,99847

$ab = 8^0 16'$ unsicher, $bc = 6^0 44'$ unsicher, $ca = 4^0 48'$ unsich.

a	$54^0 39'$	*sin 2S*	7,69417	*tg S*	7,39314
b	$35^0 38'$	*sin 2d*	9,97563	*tg d*	9,85313
2S	$0^0 17'$		7,71854	subtr.	7,54001
2d	$70^0 59'$	*tg*	8,85927	add.	7,24628
S	$0^0\ 8',5$		$4^0\ 8',20$	*tg*	8,77000
d	$35^0 29',5$	$ab =$	$8^0 16',40$	*tg*	8,62314
		$bc =$	$6^0 44',38$		$3^0 22',19$
		$ca =$	$4^0 48',52$		$2^0 24',26$

55.

In einem sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel.



Man fälle aus b den Bogen bd eines grössten Kreises senkrecht auf ca, so ist (VI. 47.)

$$\sin ab \cdot \sin a = \sin bd,$$
$$\sin bc \cdot \sin c = \sin bd.$$

Hieraus folgt

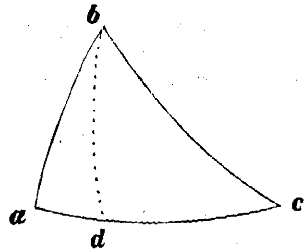
$$\sin bc \cdot \sin c = \sin ab \cdot \sin a,$$

eben so
$$\sin bc \cdot \sin b = \sin ca \cdot \sin a,$$
$$\sin ab \cdot \sin b = \sin ca \cdot \sin c,$$

oder
$$\frac{\sin ab}{\sin c} = \frac{\sin bc}{\sin a} = \frac{\sin ca}{\sin b}.$$

Wenn die Seiten sehr klein sind, so sind sie den Sinus proportionirt, und es entsteht der Satz VI. 23.

56.



In einem sphärischen Dreieck ist bei zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das Product des Sinus der ersten Seite mit dem Cosinus der zweiten Seite, weniger dem Product des Cosinus der ersten Seite mit dem Sinus der zweiten Seite und dem Cosinus des Zwischenwinkels, gleich dem Product des Sinus der dritten Seite mit dem Cosinus des Gegenwinkels der zweiten Seite.

Es sey ca die erste, ab die zweite Seite, a der Zwischenwinkel, so ist bc die dritte Seite, c der Gegenwinkel der zweiten Seite. Man fälle den Bogen bd senkrecht auf ca, so ist (VI. 47.) $\sin bc \cdot \cos c = \cos bd \cdot \sin cd.$

Aber $cd = ca - ad$, also (VI. 12.)

$$\sin cd = \sin ca \cdot \cos ad - \cos ca \cdot \sin ad,$$

also

$$\sin bc \cdot \cos c = \sin ca \cdot \cos ad \cdot \cos bd - \cos ca \cdot \sin ad \cdot \cos bd,$$

aber (VI. 47.) $\cos ad \cdot \cos bd = \cos ab,$

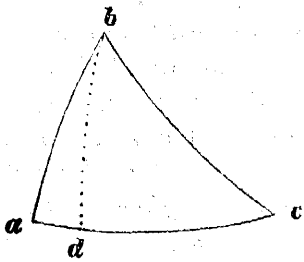
$$\cos bd \cdot \sin ad = \sin ab \cos a,$$

also $\sin bc \cdot \cos c = \sin ca \cdot \cos ab - \cos ca \cdot \sin ab \cdot \cos a,$

ebenso $\sin bc \cdot \cos b = \sin ab \cdot \cos ca - \cos ab \cdot \sin ca \cdot \cos a.$

Wenn die Seiten sehr klein sind, so sind sie den Sinus proportionirt, ihre Cosinus sind gleich 1, und es entsteht der Satz VI. 24.

57.



In einem sphärischen Dreieck ist bei zwei Seiten und dem Zwischenwinkel der Cosinus der dritten Seite gleich dem Product des Cosinus der ersten Seite mit dem Cosinus der zweiten Seite, nebst dem Product der Sinus dieser Seiten und des Cosinus des Zwischenwinkels.

Es seyen ca, ab die erste und zweite Seite, a der Zwischenwinkel, bc die dritte Seite, der Bogen bd senkrecht auf ca, so ist (VI. 47.)

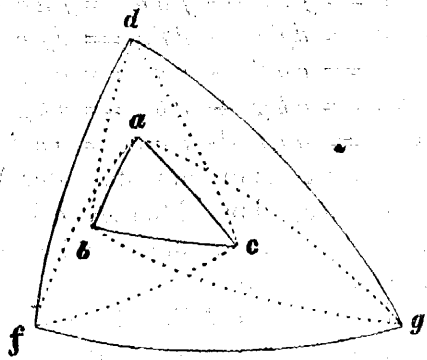
$$\cos bc = \cos bd \cdot \cos cd,\quad cd = ca - ad,$$

VI. 13. $\cos cd = \cos ca \cdot \cos ad + \sin ca \cdot \sin ad,$

VI. 47. $\cos ad \cdot \cos bd = \cos ab,\ \cos bd \cdot \sin ad = \sin ab \cdot \cos a,$

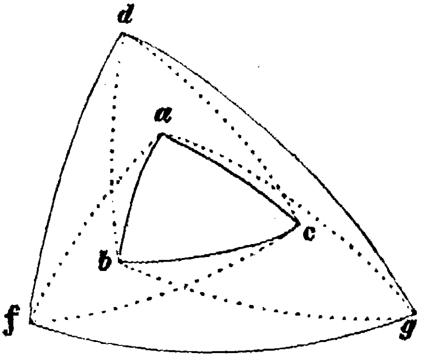
also $\cos bc = \cos ca \cdot \cos ab + \sin ca \cdot \sin ab \cdot \cos a.$

58.



Zu jedem sphärischen Dreieck gehört ein sphärisches Polardreieck, und diese beiden Dreiecke stehen in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass jede Ecke des einen der Pol der Gegenseite des andern ist, und jeder Winkel des einen die Gegenseite des andern zu zwei rechten ergänzt.

Es seyen bd, cd zwei auf bc senkrechte Kreise, welche einander in d schneiden, cf, af zwei auf ca senkrechte Kreise, ag, bg zwei auf ab senkrechte Kreise, so sind (IV. 66.) die Seiten $bd = cd = cf = af = ag = bg = R$, die Winkel $dbc = dcb = fca = fac = gab = gba = R$, die Ecken d, f, g die Pole von bc, ca, ab, und diese Seiten bc, ca, ab das Maass der Winkel an den Polen $bc = bdc$, $ca = cfa$, $ab = agb$, indem bc ein Bogen des Aequators von d, und db, dc dessen Meridiane; ca ein Bogen des Aequators von f, und fc, fa dessen Meridiane; ab ein Bogen des Aequators von g, und ag, bg dessen Meridiane sind. Da $af = ag = R$, so sind die Winkel $afg = agf = R$; da $bg = bd = R$, so sind die Winkel



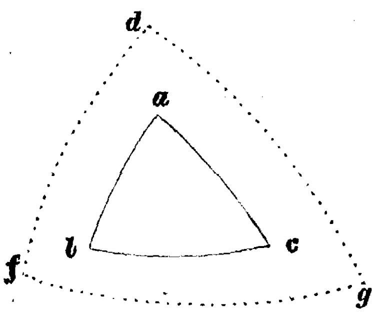
$bgd = bdg = R$; da $cd = cf = R$, so sind die Winkel $cdf = cfd = R$. Also sind die Ecken a, b, c die Pole von fg, gd, df, und diese Seiten fg, gd, df das Maass der Winkel an den Polen $fg = fag$, $gd = gbd$, $df = dgf$, indem fg ein Bogen des Aequators von a, und af, ag dessen Meridiane; gd ein Bogen des Aequators von b, und bg, bd dessen Meridiane; df ein Bogen des Aequators von c, und cd, cf dessen Meridiane. In jeder Ecke kommen zwei rechte Winkel vor, nämlich in a $bag = caf = R$, in b $cbd = abg = R$, in c $acf = bcd = R$, in d $fdc = gdb = R$, in f $gfa = dfc = R$, in g $dgb = fga = R$. Hieraus folgt:

$$agb = dgb - dga = dgb + fga - dgf = 2R - dgf,$$
$$bdc = fdc - fdb = fdc + gdb - gdf = 2R - gdf,$$
$$cfa = dfc - dfa = dfc + gfa - dfg = 2R - dfg,$$
$$fag = caf + gac = caf + bag - cab = 2R - cab,$$
$$gbd = abg + dba = abg + cbd - abc = 2R - abc,$$
$$dcf = acf + dca = acf + bcd - bca = 2R - bca.$$

Setzt man nun statt der Winkel agb, bdc, cfa, fag, gbd, dcf ihre Maasse ab, bc, ca, fg, gd, df, und bezeichnet man die Winkel der Dreiecke mit ihren Eckzeichen, so ist

$$ab + g = 2R, \quad bc + d = 2R, \quad ca + f = 2R,$$
$$fg + a = 2R, \quad gd + b = 2R, \quad df + c = 2R.$$

59.



In einem sphärischen Dreiecke ist bei zwei Winkeln und der Zwischenseite das Product des Sinus des ersten Winkels mit dem Cosinus des zweiten Winkels, nebst dem Product des Cosinus des ersten Winkels mit dem Sinus des zweiten Winkels und dem Cosinus der Zwischenseite, gleich dem Product des Sinus des dritten Winkels mit dem Cosinus der Gegenseite des zweiten Winkels.

Man bilde (VI. 58.) zu dem Dreieck abc das Polardreieck dfg, so ist (VI. 56.)

$$\sin fg \cdot \cos g = \sin gd \cos df - \cos gd \sin df \cdot \cos d.$$

Aber nach VI. 58. ist

$$fg + a = gd + b = df + c = 2R,$$
$$g + ab = d + bc = f + ab = 2R.$$

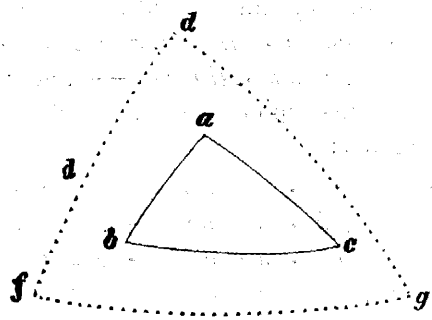
Setzt man nun (VI. 5.) statt der Sinus die Sinus ihrer Ergänzungen zu $2R$, statt der Cosinus die negativen Cosinus ihrer Ergänzungen zu $2R$, so ist

$$-\sin a \cdot \cos ab = -\sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos bc,$$

oder $\sin a \cdot \cos ab = \sin b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \cos bc,$

und $\sin a \cdot \cos ca = \sin c \cdot \cos b + \cos c \cdot \sin b \cdot \cos bc.$

60.



In einem sphärischen Dreieck ist bei zwei Winkeln und der Zwischenseite der Cosinus des dritten Winkels gleich dem Product der Sinus des ersten und zweiten Winkels und des Cosinus der Zwischenseite, weniger dem Product der Cosinus des ersten und zweiten Winkels.

Man bilde (VI. 58.) zu dem Dreieck abc das Polardreieck dfg, so ist (VI. 57.)

$$\cos fg = \cos gd \cdot \cos df + \sin gd \cdot \sin df \cdot \cos d.$$

Aber nach VI. 58. ist

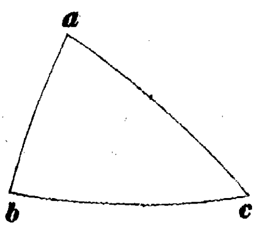
$$fg + a = gd + b = df + c = 2R,$$
$$g + ab = d + bc = f + ab = 2R.$$

Setzt man nun (VI. 5.) statt der Sinus die Sinus ihrer Ergänzungen zu $2R$, statt der Cosinus die negativen Cosinus ihrer Ergänzungen zu $2R$, so wird

$$-\cos a = \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos bc,$$

oder $\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos bc - \cos b \cdot \cos c.$

61.



In einem sphärischen Dreieck ist bei vier aufeinander folgenden Stücken das Product der Cotangente der Gegenseite mit dem Sinus der Nebenseite, weniger dem Product der Cotangente des Gegen-

winkels mit dem Sinus des Nebenwinkels, gleich dem Product des Cosinus der Nebenseite mit dem Cosinus des Nebenwinkels.

Bei vier auf einander folgenden Stücken liegen nämlich eine Seite und ein Winkel einander gegenüber, diese heissen die Gegenseite und der Gegenwinkel. Zwischen diesen liegt eine Seite und ein Winkel, diese heissen die Nebenseite und der Nebenwinkel.

Z. B. die auf einander folgenden Stücke seyen c, ca, a, ab, so ist ab die Gegenseite, c der Gegenwinkel, ca die Nebenseite, a der Nebenwinkel. Nun ist

VI. 55. $\sin bc \cdot \sin c = \sin ab \cdot \sin a$,

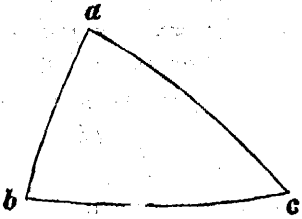
VI. 56. $\sin bc \cdot \cos c = \sin ca \cdot \cos ab - \cos ca \cdot \sin ab \cdot \cos a$.

Man multiplicirt die zweite Gleichung zu beiden Seiten mit $\sin a$, und dividirt mit der ersten Gleichung, so erhält man $\cot c \cdot \sin a = \cot ab \cdot \sin ca - \cos ca \cdot \cos a$, oder $\cot ab \cdot \sin ca - \cot c \cdot \sin a = \cos ca \cdot \cos a$.

Das sphärische Dreieck hat sechs solcher Gleichungen, nämlich:

$$\cot ab \cdot \sin ca - \cot c \cdot \sin a = \cos ca \cdot \cos a,$$
$$\cot ab \cdot \sin bc - \cot c \cdot \sin b = \cos bc \cdot \cos b,$$
$$\cot bc \cdot \sin ca - \cot a \cdot \sin c = \cos ca \cdot \cos c,$$
$$\cot bc \cdot \sin ab - \cot a \cdot \sin b = \cos ab \cdot \cos b,$$
$$\cot ca \cdot \sin bc - \cot b \cdot \sin c = \cos bc \cdot \cos c,$$
$$\cot ca \cdot \sin ab - \cot b \cdot \sin a = \cos ab \cdot \cos a.$$

62.



In einem sphärischen Dreieck aus den drei Seiten Gleichungen für die Winkel zu finden.

VI. 57. $\cos bc = \cos ca \cdot \cos ab + \sin ca \cdot \sin ab \cdot \cos a$.

VI. 13. $\cos(ab + ca) = \cos ab \cdot \cos ca - \sin ab \cdot \sin ca$,
$\cos(ab - ca) = \cos ab \cdot \cos ca + \sin ab \cdot \sin ca$.

Hieraus folgt:

$$\cos bc - \cos(ab + ca) = (1 + \cos a) \sin ca \cdot \sin ab,$$
$$\cos(ab - ca) - \cos bc = (1 - \cos a) \sin ca \cdot \sin ab.$$

Setzt man $ab + bc + ca = 2S$,

so ist entweder $bc = S - (S - bc)$ und $ab + ca = S + (S - bc)$, oder $bc = (S - ca) + (S - ab)$ und $ab - ca = (S - ca) - (S - ab)$, also ist $\cos bc - \cos(ab + ca) = 2 \sin S \cdot \sin(S - bc)$,

und $\cos(ab - ca) - \cos bc = 2 \sin(S - ca) \sin(S - ab)$.
Auch ist (VI. 11.) $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2}a$, $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2}a$.

Also erhält man:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin(S - ca) \cdot \sin(S - ab)}{\sin ca \cdot \sin ab},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin S \cdot \sin(S - bc)}{\sin ca \cdot \sin ab}.$$

Aber nach VI. 2. ist $\dfrac{\cos \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}a} = \cot \frac{1}{2}a$,
nach VI. 10. ist $\sin a = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}a \cdot \cos \frac{1}{2}a$. Setzt man also

$$\frac{\sin S}{\sin(S - ab) \cdot \sin(S - bc) \cdot \sin(S - ca)} = E^2,$$

$$4 \cdot \sin S \cdot \sin(S - ab) \sin(S - bc) \sin(S - ca) = A^2,$$

$$\sin ab \cdot \sin bc \cdot \sin ca = M,$$

so ist $\cot \frac{1}{2}a = E \cdot \sin(S - bc)$, $\cot \frac{1}{2}b = E \cdot \sin(S - ca)$,

$$\cot \tfrac{1}{2}c = E \cdot \sin(S - ab),$$

$$\sin a = \frac{A}{M} \cdot \sin bc, \quad \sin b = \frac{A}{M} \cdot \sin ca, \quad \sin c = \frac{A}{M} \cdot \sin ab.$$

Da aber (VI. 57.) $\cos a = \dfrac{\cos bc - \cos ca \cdot \cos ab}{\sin ca \cdot \sin ab}$,
so erhält man für die Grösse A noch folgende Ausdrücke:

$$A^2 = \sin^2 ca \cdot \sin^2 ab - (\cos bc - \cos ca \cdot \cos ab)^2,$$

$$A^2 = (1 - \cos^2 ca) \cdot (1 - \cos^2 ab) - (\cos bc - \cos ca \cdot \cos ab)^2,$$

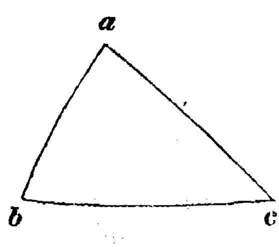
$$A^2 = 1 - (\cos^2 ab + \cos^2 bc + \cos^2 ca) + 2 \cos ab \cdot \cos bc \cdot \cos ca.$$

Nach IV. 46. ist immer $ab + bc + ca$, d. h. $2S$, kleiner als $4R$, also $S < 2R$, also $\sin S$ positiv.

Da $1 - \cos a$, $1 + \cos a$, $\sin ca$, $\sin ab$ immer positiv sind, so müssen auch in allen sphärischen Dreiecken $\cos bc - \cos(ca + ab)$ und $\cos(ab - ca) - \cos bc$, positive Zahlen seyn.

Wenn die Seiten sehr klein sind, so sind sie ihren Sinus proportionirt, und die obigen Gleichungen verwandeln sich dann in die Gleichungen der Sätze VI. 33. 34. 35. 36. 27.

63.



In einem sphärischen Dreieck aus den drei Winkeln Gleichungen für die Seiten zu finden.

Nach VI. 60. ist
$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos bc - \cos b \cdot \cos c$,

Aber nach VI. 13. $\cos(c+b) = \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c,$
$\cos(c-b) = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c.$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\cos a + \cos(c+b) = -(1-\cos bc)\sin b \cdot \sin c,$$
$$\cos a + \cos(c-b) = (1+\cos bc)\sin b \cdot \sin c.$$

Da (IV. 47.) $a+b+c > 2R,$
so sey $a+b+c = 2R + 2\triangle.$

Die Grösse $2\triangle$ heisst der sphärische Ueberschuss oder sphärische Excess. Nimmt man nun

$$a = R + \triangle - R + a - \triangle,$$
$$c + b = R + \triangle + R - a + \triangle,$$ so ist (VI. 13.)
$$\cos a + \cos(c+b) = 2\cos(R+\triangle) \cdot \cos(R-a+\triangle)$$
oder $\cos a + \cos(c+b) = -2\sin\triangle \cdot \sin(a-\triangle).$

Nimmt man $a = R - b + \triangle + R - c + \triangle,$
$c - b = R - b + \triangle - R + c - \triangle,$ so ist (VI. 13.)
$$\cos a + \cos(c-b) = 2 \cdot \cos(R-b+\triangle) \cdot \cos(R-c+\triangle),$$
oder $\cos a + \cos(c-b) = 2\sin(b-\triangle) \cdot \sin(c-\triangle).$

Hieraus folgt nun:

$$2\sin\triangle \cdot \sin(a-\triangle) = (1-\cos bc)\sin b \cdot \sin c,$$
$$2\sin(b-\triangle) \cdot \sin(c-\triangle) = (1+\cos bc)\sin b \cdot \sin c.$$

Aber (VI. 11.) $1 - \cos bc = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} bc,$
$1 + \cos bc = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} bc.$

Also ist $$\sin^2 \tfrac{1}{2} bc = \frac{\sin\triangle \cdot \sin(a-\triangle)}{\sin b \cdot \sin c},$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} bc = \frac{\sin(b-\triangle)\sin(c-\triangle)}{\sin b \cdot \sin c},$$

Aber nach VI. 2. ist $\frac{\sin \frac{1}{2} bc}{\cos \frac{1}{2} bc} = tg\, \tfrac{1}{2} bc.$

Nach VI. 10. ist $\sin bc = 2 \cdot \sin \tfrac{1}{2} bc \cdot \cos \tfrac{1}{2} bc.$

Setzt man also $$\frac{\sin\triangle}{\sin(a-\triangle)\sin(b-\triangle)\sin(c-\triangle)} = F^2,$$
$$4 \cdot \sin\triangle \cdot \sin(a-\triangle)\sin(b-\triangle)\sin(c-\triangle) = B^2,$$
$$\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = N,$$ so ist
$$tg\, \tfrac{1}{2} bc = F \cdot \sin(a-\triangle), \quad tg\, \tfrac{1}{2} ca = F \cdot \sin(b-\triangle),$$
$$tg\, \tfrac{1}{2} ca = F \cdot \sin(c-\triangle),$$
$$\sin bc = \frac{B}{N} \cdot \sin a, \quad \sin ca = \frac{B}{N} \cdot \sin b, \quad \sin ab = \frac{B}{N} \cdot \sin c.$$

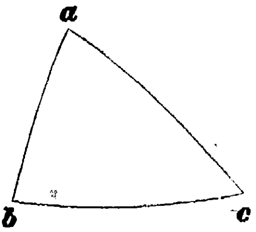
Da aber (VI. 60.) $\cos bc = \frac{\cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$
so erhält man für die Grösse B noch folgende Ausdrücke:

$$B^2 = \sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos a + \cos b \cdot \cos c)^2,$$

$B^2 = (1 - cos^2 b) \cdot (1 - cos^2 c) - (cos\, a + cos\, b \cdot cos\, c)^2,$
$B^2 = 1 - (cos^2 a + cos^2 b + cos^2 c) - 2 cos\, a \cdot cos\, b \cdot cos\, c.$

Da $(1 - cos\, bc)$, $(1 + cos\, bc)$, $sin\, b$, $sin\, c$ immer positiv sind, so muss in allen sphärischen Dreiecken die Summe von $cos\, a + cos\,(c + b)$ eine negative, und die Summe von $cos\, a + cos\,(c - b)$ eine positive Zahl seyn.

64.



In einem sphärischen Dreieck für zwei Seiten und deren Zwischenwinkel Gleichungen zu finden, in welchen die Gegenwinkel und Gegenseiten derselben vorkommen.

Aus VI. 62., 63. hat man:

$$1.\ \begin{cases} cos\, bc - cos\,(ab + ca) = (1 + cos\, a)\, sin\, ca \cdot sin\, ab, \\ cos\,(ab - ca) - cos\, bc = (1 - cos\, a)\, sin\, ca \cdot sin\, ab, \\ cos\, a + cos\,(c + b) = -(1 - cos\, bc)\, sin\, b \cdot sin\, c, \\ cos\, a + cos\,(c - b) = (1 + cos\, bc)\, sin\, b \cdot sin\, c. \end{cases}$$

Aber nach VI. 55. ist:

$sin\, ca \cdot sin\, a = sin\, bc \cdot sin\, b$, $sin\, ab \cdot sin\, a = sin\, bc \cdot sin\, c$,
also $sin\, ca \cdot sin\, ab \cdot sin^2 a = sin^2 bc \cdot sin\, b \cdot sin\, c$,
oder $(1 - cos^2 a)\, sin\, ca \cdot sin\, ab = (1 - cos^2 bc)\, sin\, b \cdot sin\, c.$

$$2.\ \begin{cases} (1 - cos\, a)(1 + cos\, a)\, sin\, ca \cdot sin\, ab \\ \quad = (1 - cos\, bc)(1 + cos\, bc)\, sin\, b \cdot sin\, c. \end{cases}$$

Verbindet man die Gleichungen 1, mit der Gleichung 2, so ergiebt sich:

$$3.\ \begin{cases} \dfrac{cos\, bc - cos\,(ab + ca)}{1 + cos\, bc} = -\dfrac{cos\, a + cos\,(c + b)}{1 - cos\, a}, \\ \dfrac{cos\, bc - cos\,(ab + ca)}{1 - cos\, bc} = \dfrac{cos\, a + cos\,(c - b)}{1 - cos\, a}, \\ \dfrac{cos\,(ab - ca) - cos\, bc}{1 + cos\, bc} = -\dfrac{cos\, a + cos\,(c + b)}{1 + cos\, a}, \\ \dfrac{cos\,(ab - ca) - cos\, bc}{1 - cos\, bc} = \dfrac{cos\, a + cos\,(c - b)}{1 + cos\, a}. \end{cases}$$

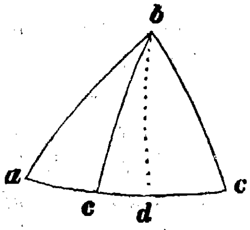
Hieraus durch Subtraction von 1, oder durch Addition zu 1:

$$4.\ \begin{cases} \dfrac{1 + cos\,(ab + ca)}{1 + cos\, bc} = \dfrac{1 + cos\,(c + b)}{1 - cos\, a}, \\ \dfrac{1 - cos\,(ab + ca)}{1 - cos\, bc} = \dfrac{1 + cos\,(c - b)}{1 - cos\, a}, \\ \dfrac{1 + cos\,(ab - ca)}{1 + cos\, bc} = \dfrac{1 - cos\,(c + b)}{1 + cos\, a}, \\ \dfrac{1 - cos\,(ab - ca)}{1 - cos\, bc} = \dfrac{1 - cos\,(c - b)}{1 + cos\, a}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man nach VI. 11. die verlangten Gleichungen:

$$5. \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{ab+ca}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{c+b}{2}, \\ \sin\frac{ab+ca}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{c-b}{2}, \\ \cos\frac{ab-ca}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{c+b}{2}, \\ \sin\frac{ab-ca}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{c-b}{2}. \end{array}\right.$$

65.



Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel das sphärische Dreieck zu berechnen.

Gegeben seyen ab, bc, a. Für die gesuchten Stücke c, b, ca hat man folgende Gleichungen:

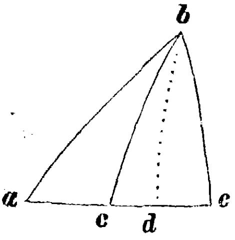
VI. 55. $\sin bc \cdot \sin c = \sin ab \cdot \sin a$,
VI. 61. $\cot a \cdot \sin b + \cos ab \cdot \cos b = \cot bc \cdot \sin ab$,
VI. 57. $\cos ab \cdot \cos ca + \sin ab \cdot \cos a \cdot \sin ca = \cos bc$.

Da in den beiden letzten Gleichungen die gesuchten Stücke durch ihren Sinus und Cosinus bestimmt werden, so führt ihre Auflösung auf Gleichungen vom zweiten Grade, welche man durch Einführung eines Hülfswinkels auflöst. Dieser Hülfswinkel ist aber nichts anders, als derjenige, welcher durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke erlangt wird. Man ziehe also den Bogen bd senkrecht auf ca, so ist (VI. 48.):

$$\sin ab \cdot \sin a = \sin bd, \qquad tg\, ab \cdot \cos a = tg\, ad,$$
$$\cos ab \cdot tg\, a = \cot abd.$$

Nun hat man aus bc und bd (VI. 51.)

$$\frac{\sin bd}{\sin bc} = \sin c, \qquad \frac{\cos bc}{\cos bd} = \cos cd,$$
$$\frac{tg\, bd}{tg\, bc} = \cos cbd.$$



Dann geben cd und ad die Seite ca; cbd und abd den Winkel b. Wenn bd, bc einander sehr nahe kommen, so berechnet man das Dreieck cbd nach VI. 54.

Beispiel. $ab = 68^0 54'$, $bc = 67^0 33'$, $a = 78^0 21'$.

$\sin ab$	9,96986	$tg\ ab$	0,41356	$\cos ab$	9,55630
$\sin a$	9,99096	$\cos a$	9,30521	$tg\ a$	0,68575
$\sin bd$	9,96082	$tg\ ad$	9,71877	$\cot abd$	0,24205
$bd =$	$66^0 1',6$	$ad =$	$27^0 37',45$	$abd =$	$29^0 48',07$
$\sin bd$	9,96082	$\cos bd$	9,60886	$tg\ bd$	0,35196
$\sin bc$	9,96577	$\cos bc$	9,58192	$tg\ bc$	0,38385
$\sin c$	9,99505	$\cos cd$	9,97306	$\cos cbd$	9,96811
$c =$	$81^0 22',0$	$cd =$	$19^0 58',4$	$cbd =$	$21^0 41',4$
oder	$98^0 38',0$	$ca =$	$47^0 35',85$	$b =$	$51^0 29',47$
		oder	$7^0 39',05$	oder	$8^0\ 6',67$

Wenn man aus zwei Seiten ab, bc, und dem einen Gegenwinkel a den andern Gegenwinkel c berechnet hat, so kann man die dritte Seite ca und den Gegenwinkel b auch aus VI. 64. berechnen.

$$tg\,\tfrac{1}{2}ca = tg\,\frac{ab+bc}{2}\cdot\frac{\cos\frac{c+a}{2}}{\cos\frac{c-a}{2}} = tg\,\frac{ab-bc}{2}\cdot\frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{c-a}{2}},$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}b = \cot\frac{c+a}{2}\cdot\frac{\cos\frac{ab-bc}{2}}{\cos\frac{ab+bc}{2}} = \cot\frac{c-a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{ab-bc}{2}}{\sin\frac{ab+bc}{2}}.$$

$ab = 68^0 54'$	$c = 81^0 22'$	0,39852	9,25255
$bc = 67^0 33'$	$a = 78^0 21'$	9,24571	9,99997
$136^0 27'$	$159^0 43'$	9,99985	9,56933
$1^0 21'$	$3^0\ 1'$	9,64438	9,68319
$68^0 13',5$	$79^0 51',5$	$23^0 47',7$	$25^0 44',5$
$40',5$	$1^0 30',5$	$ca = 47^0 35',4$	$b = 51^0 29',0$
	$c = 98^0 38'$	0,39852	8,42047
	$a = 78^0 21'$	8,42032	9,99997
	$176^0 59'$	9,99316	9,56933
	$20^0 17'$	8,82568	8,85111
	$88^0 29',5$	$3^0 49',78$	$4^0 3',59$
	$10^0\ 8',5$	$ca = 7^0 39',56$	$b = 8^0 7',18$

Aus VI. 55. folgt, dass wenn von vier Stücken, welche aus zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln bestehen, drei Stücke gegeben sind, das vierte durch den Sinus berechnet wird, also entweder $< R$ oder $> R$ genommen werden kann. Ob aber beide Werthe zulässig sind, d. h. ob ein Dreieck oder zwei Dreiecke möglich sind, wird im Allgemeinen nach folgenden Gründen entschieden.

Die vier Stücke seyen ab, bc, c, a. Aus VI. 64. folgt

$$\sin\frac{ab - bc}{2} \cdot \cos\tfrac{1}{2}b = \sin\tfrac{1}{2}ca \cdot \sin\frac{c-a}{2}.$$

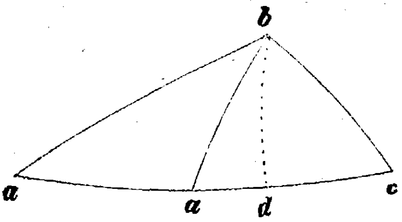
Da nun $\cos\frac{1}{2}b$ und $\sin\frac{1}{2}ca$ immer positiv sind, so müssen $ab - bc$ und $c - a$ einerlei Vorzeichen haben, d. h. *die grössere Seite hat den grössern Gegenwinkel, und umgekehrt.*

Aus VI. 64. folgt ferner:

$$tg\frac{ab + bc}{2} \cdot tg\frac{c - a}{2} = tg\frac{ab - bc}{2} \cdot tg\frac{c + a}{2}.$$

Da nun $tg\frac{c-a}{2}$ und $tg\frac{ab-bc}{2}$ einerlei Vorzeichen haben, so müssen auch $tg\frac{ab+bc}{2}$ und $tg\frac{c+a}{2}$ einerlei Vorzeichen haben, d. h. *wenn die Summe zweier Seiten gleich, grösser oder kleiner als 2 R ist, so muss auch die Summe der Gegenwinkel gleich, grösser oder kleiner als 2 R seyn, und umgekehrt.*

66.



Aus zwei Winkeln und einer Gegenseite das sphärische Dreieck zu berechnen.

Gegeben seyen a, c, bc. Die gesuchten Stücke sind ab, ca, b, und man hat also:

VI. 55. $\sin a \cdot \sin ab = \sin c \cdot \sin bc$,
VI. 61. $\cot bc \cdot \sin ca - \cos c \cdot \cos ca = \cot a \cdot \sin c$,
VI. 60. $\sin c \cdot \cos bc \cdot \sin b - \cos c \cdot \cos b = \cos a$.

Da hier von den Stücken ca, b die Sinus und Cosinus vorkommen, so sind diese Gleichungen vom zweiten Grade, und werden entweder durch einen Hülfswinkel oder, was dasselbe ist, durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke aufgelöst. Man fälle bd senkrecht auf ca, so ist (VI. 48.)

$$\sin bc \cdot \sin c = \sin bd, \quad tg\, bc \cdot \cos c = tg\, cd,$$
$$\cos bc \cdot tg\, c = \cot cbd.$$

Nun hat man aus bd und a (VI. 50.)

$$\frac{\sin bd}{\sin a} = \sin ab, \quad \frac{tg\, bd}{tg\, a} = tg\, ad, \quad \frac{\cos a}{\cos bd} = \sin abd.$$

Dann geben cd und ad die Seite ca, cbd und abd den Winkel b. Wenn bd und a einander sehr nahe kommen, so berechnet man das Dreieck abd nach VI. 54. Ob ein Dreieck oder zwei Dreiecke möglich sind, entscheidet man nach den in VI. 65. bewiesenen Sätzen.

Beispiel. $a = 78^0 21'$, $c = 81^0 22'$, $bc = 67^0 33'$.

$\sin bc$	9,96577	$tg\ bc$	0,38385	$\cos bc$	9,58192
$\sin c$	9,99505	$\cos c$	9,17641	$tg\ c$	0,81864
$\sin bd$	9,96082	$tg\ cd$	9,56026	$\cot cbd$	0,40056
$bd =$	$66^0 1',6$	$cd =$	$19^0 57',95$	$cbd =$	$21^0 40',95$
$\sin bd$	9,96082	$tg\ bd$	0,35196	$\cos bd$	9,60886
$\sin a$	9,99096	$tg\ a$	0,68575	$\cos a$	0,30521
$\sin ab$	9,96986	$\sin ad$	9,66621	$\sin abd$	9,69635
$ab =$	$68^0 54'$	$ad =$	$27^0 37',45$	$abd =$	$29^0 48',1$
oder	$111^0 6'$	oder	$152^0 22',55$	oder	$150^0 11',9$
		$ca =$	$47^0 35',40$	$b =$	$51^0 29',05$
		oder	$172^0 20',55$	oder	$171^0 52',85$

Wenn man aus zwei Winkeln a, c, und der einen Gegenseite bc, die andre Gegenseite ab berechnet hat, so kann man die dritte Seite ca und den Gegenwinkel b auch aus VI. 64. berechnen.

$$tg\ \tfrac{1}{2} ca = tg\ \tfrac{1}{2}(ab + bc) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(c + a)}{\cos \frac{1}{2}(c - a)}$$

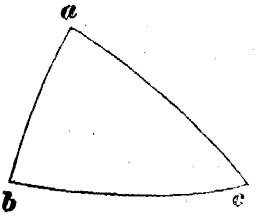
$$= tg\ \tfrac{1}{2}(ab - bc) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(c + a)}{\sin \frac{1}{2}(c - a)},$$

$$tg\ \tfrac{1}{2} b = \cot \tfrac{1}{2}(c + a) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(ab - bc)}{\cos \frac{1}{2}(ab + bc)}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2}(c - a) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(ab - bc)}{\sin \frac{1}{2}(ab + bc)}.$$

$ab = 68^0 54'$	$c = 81^0 22'$	0,39852	9,25255
$bc = 67^0 33'$	$a = 78^0 21'$	9,24571	9,99997
$136^0 27'$	$159^0 43'$	9,99985	9,56933
$1^0 21'$	$3^0 1'$	9,64438	9,68319
$68^0 13',5$	$79^0 51',5$	$23^0 47',7$	$25^0 44',5$
$40',5$	$1^0 30',5$	$ca = 47^0 35',4$	$b = 51^0 29',0$
$ab = 111^0 6'$		1,92880	9,25255
$bc = 67^0 33'$		9,24571	9,96784
$178^0 39'$		9,99985	8,07117
$43^0 33'$		1,17466	1,14922
$89^0 19',5$		$86^0 10',4$	$85^0 56',6$
$21^0 46',5$		$ca = 172^0 20',8$	$b = 171^0 53',2$

67.



Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel das sphärische Dreieck zu berechnen.

Die gegebenen Stücke seyen ca, ab, a. Man setzt nach VI. 64.:

$$ca + ab = 2S, \quad ca - ab = 2d,$$

$$\sin d \cdot \cos \tfrac{1}{2}a = A, \quad \sin S \cdot \sin \tfrac{1}{2}a = B,$$

$$\cos d \cdot \cos \tfrac{1}{2}a = C, \quad \cos S \cdot \sin \tfrac{1}{2}a = D,$$

$$\frac{A}{B} = tg\ x, \quad \frac{C}{D} = tg\ y.$$

Dann ist
$$\sin \tfrac{1}{2}bc = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x},$$

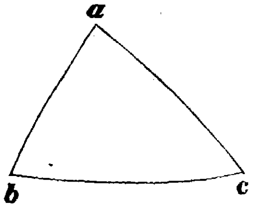
$$\cos \tfrac{1}{2}bc = \frac{C}{\sin y} = \frac{D}{\cos y},$$

$$b = y + x, \quad c = y - x.$$

Beispiel. $ca = 144^0 28'$, $ab = 67^0 42'$, $a = 37^0 58'$.

$ca =$	$144^0 28'$	$\sin d$	9,79304	$\cos d$	9,89425
$ab =$	$67^0 42'$	$\cos \frac{1}{2}a$	9,97571	$\cos \frac{1}{2}a$	9,97571
$2S =$	$212^0 10'$	A	9,76875	C	9,86996
$2d =$	$76^0 46'$	$\sin S$	9,98266	$\cos S$	— 9,44253
$S =$	$106^0\ 5'$	$\sin \frac{1}{2}a$	9,51227	$\sin \frac{1}{2}a$	9,51227
$d =$	$38^0 23'$	B	9,49493	D	— 8,95480
$\frac{1}{2}a =$	$18^0 59'$	A	9,76875	C	9,86996
$\frac{1}{2}bc =$	$41^0 41',7$	$tg\ x$	0,27382	$tg\ y$	— 0,91516
$bc =$	$83^0 23',4$	$\sin x$	9,94582	$\sin y$	9,99682
$x =$	$61^0 58',33$	$\cos x$	9,67200	$\cos y$	— 9,08166
$y =$	$96^0 55',90$	$\sin \frac{1}{2}bc$	9,82293	$\cos \frac{1}{2}bc$	9,87314
$b =$	$158^0 54',23$				
$c =$	$34^0 57',57$				

68.



Aus zwei Winkeln und der Zwischenseite das sphärische Dreieck zu berechnen.

Die gegebenen Stücke seyen b, c, bc. Man setzt nach VI. 64.:

$$b + c = 2S, \quad b - c = 2d,$$

$$\sin d \cdot \sin \tfrac{1}{2}bc = A, \quad \sin S \cdot \cos \tfrac{1}{2}bc = B,$$

$$\cos d \cdot \sin \tfrac{1}{2}bc = C, \quad \cos S \cdot \cos \tfrac{1}{2}bc = D,$$

$$\frac{A}{B} = tg\ x, \quad \frac{C}{D} = tg\ y.$$

Dann ist
$$\cos \tfrac{1}{2} a = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x},$$
$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{C}{\sin y} = \frac{D}{\cos y},$$
$$ca = y + x, \quad ab = y - x.$$

Beispiel. $b = 146^0 34'$, $c = 68^0 20'$, $bc = 40^0 46'$.

$b = 146^0 34'$	$\sin d$ 9,79996	$\cos d$ 9,88978
$c = 68^0 20'$	$\sin \frac{1}{2}bc$ 9,54195	$\sin \frac{1}{2}bc$ 9,54195
$2S = 214^0 54'$	A 9,34191	C 9,43173
$2d = 78^0 14'$	$\sin S$ 9,97954	$\cos S$ — 9,47694
$S = 107^0 27'$	$\cos \frac{1}{2}bc$ 9,97192	$\cos \frac{1}{2}bc$ 9,97192
$d = 39^0\ 7'$	B 9,95146	D — 9,44886
$\frac{1}{2}bc = 20^0 23'$	A 9,34191	C 9,43173
$\frac{1}{2}a = 22^0 57',0$	$tg\, x$ 9,39045	$tg\, y$ — 9,98287
$a = 45^0 54',0$	$\sin x$ 9,37772	$\sin y$ 9,84075
$x = 13^0 48',33$	$\cos x$ 9,98727	$\cos y$ — 9,85788
$y = 136^0\ 7',77$	$\cos \frac{1}{2}a$ 9,96419	$\sin \frac{1}{2}a$ 9,59098
$ab = 122^0 19',44$		
$ca = 149^0 56',10$		

69.

Aus den drei Seiten das sphärische Dreieck zu berechnen.

Man setze nach VI. 62. $bc + ca + ab = 2S$,
$$\frac{\sin S}{\sin (S - bc) \sin (S - ca) \sin (S - ab)} = E^2, \text{ so ist:}$$
$$\cot \tfrac{1}{2} a = E \cdot \sin (S - bc), \quad \cot \tfrac{1}{2} b = E \cdot \sin (S - ca),$$
$$\cot \tfrac{1}{2} c = E \cdot \sin (S - ab).$$

Beispiel. $bc = 40^0 46'$, $ca = 149^0 56'$, $ab = 122^0 19'$.

$bc = 40^0 46'$	$\sin S$ 9,60055	$\frac{1}{2}a = 22^0 56',66$
$ca = 149^0 56'$	$\sin (S-bc)$ 9,95461	$\frac{1}{2}b = 73^0 17',15$
$ab = 122^0 19'$	$\sin (S-ca)$ 9,05882	$\frac{1}{2}c = 34^0\ 9',56$
$2S = 313^0\ 1'$	$\sin (S-ab)$ 9,74970	$a = 45^0 53',32$
$S = 156^0 30',5$	E^2 0,83742	$b = 146^0 34',30$
$S-bc = 115^0 44',5$	E 0,41871	$c = 68^0 19',12$
$S-ca = 6^0 34',5$	$\cot \frac{1}{2}a$ 0,37332	
$S-ab = 34^0 11',5$	$\cot \frac{1}{2}b$ 9,47753	
	$\cot \frac{1}{2}c$ 0,16841	

70.

Aus den drei Winkeln das sphärische Dreieck zu berechnen.

Man setze nach VI. 63. $a + b + c = 180^0 + 2\triangle$,

$$\frac{\sin\triangle}{\sin(a-\triangle)\sin(b-\triangle)\sin(c-\triangle)} = F^2, \text{ so ist:}$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}bc = F\cdot\sin(a-\triangle),\quad tg\ \tfrac{1}{2}ca = F\cdot\sin(b-\triangle),$$
$$tg\ \tfrac{1}{2}ab = F\cdot\sin(c-\triangle).$$

Beispiel. $a = 45^0 54'$, $b = 146^0 34'$, $c = 68^0 20'$.

$a =$	$45^0 54'$	$\sin\triangle$	9,81166	$\frac{1}{2}bc =$	$20^0 23',0$
$b =$	$146^0 34'$	$\sin(a-\triangle)$	8,98157	$\frac{1}{2}ca =$	$74^0 58',02$
$c =$	$68^0 20'$	$\sin(b-\triangle)$	9,98248	$\frac{1}{2}ab =$	$61^0\ 9',67$
$2\triangle$	$80^0 48'$	$\sin(c-\triangle)$	9,67066	$bc =$	$40^0 46',0$
$\triangle$	$40^0 24'$	F^2	1,17695	$ca =$	$149^0 56',04$
$a-\triangle$	$5^0 30'$	F	0,58847	$ab =$	$122^0 19',34$
$b-\triangle$	$106^0 10'$	$tg\ \frac{1}{2}bc$	9,57004		
$c-\triangle$	$27^0 56'$	$tg\ \frac{1}{2}ca$	0,57095		
		$tg\ \frac{1}{2}ab$	0,25913		

71.

Die reciproken Gleichungen des sphärischen Dreiecks zu finden.

Man setze

$$bc + ca + ab = 2S,\quad a + b + c = 180^0 + 2\triangle,$$
$$\sin bc\cdot\sin ca\cdot\sin ab = M,\quad \sin a\cdot\sin b\cdot\sin c = N,$$
$$A = \sin ca\cdot\sin ab\cdot\sin a = \sin ab\cdot\sin bc\cdot\sin b$$
$$= \sin bc\cdot\sin ca\cdot\sin c,$$
$$A = \sin^2 ca\cdot\frac{\sin c\cdot\sin a}{\sin b} = \sin^2 ab\cdot\frac{\sin a\cdot\sin b}{\sin c}$$
$$= \sin^2 bc\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin a},$$
$$B = \sin b\cdot\sin c\cdot\sin bc = \sin c\cdot\sin a\cdot\sin ca$$
$$= \sin a\cdot\sin b\cdot\sin ab,$$
$$B = \sin^2 b\cdot\frac{\sin ab\cdot\sin bc}{\sin ca} = \sin^2 c\cdot\frac{\sin bc\cdot\sin ca}{\sin ab}$$
$$= \sin^2 a\cdot\frac{\sin ca\cdot\sin ab}{\sin bc},$$

so ist 1) $A\cdot B = M\cdot N$,

2) $A^2 = B\cdot M$, $B^2 = A\cdot N$,

3) $A^3 = M^2\cdot N$, $B^3 = N^2\cdot M$,

Auch ist

$$A^2 = 1 - (\cos^2 bc + \cos^2 ca + \cos^2 ab) + 2 \cdot \cos bc \cdot \cos ca \cdot \cos ab,$$

$$A^2 = 4 \cdot \sin S \cdot \sin (S - bc) \cdot \sin (S - ca) \cdot \sin (S - ab),$$

$$B^2 = 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c,$$

$$B^2 = 4 \cdot \sin \triangle \cdot \sin (a - \triangle) \cdot \sin (b - \triangle) \cdot \sin (c - \triangle),$$

$$\sin S = B \cdot \frac{\sin bc \cdot \sin ca \cdot \sin ab}{4 \sin (S - bc) \sin (S - ca) \sin (S - ab)},$$

$$\sin \triangle = A \cdot \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}{4 \cdot \sin (a - \triangle) \cdot \sin (b - \triangle) \sin (c - \triangle)},$$

$$4)\quad \sin S = B \cdot \frac{1}{4 \sin \tfrac{1}{2}a \cdot \sin \tfrac{1}{2}b \cdot \sin \tfrac{1}{2}c},$$

$$5)\quad \sin \triangle = A \cdot \frac{1}{4 \cdot \cos \tfrac{1}{2}bc \cdot \cos \tfrac{1}{2}ca \cdot \cos \tfrac{1}{2}ab},$$

$$1 - (\sin^2 bc + \sin^2 ca + \sin^2 ab) + 2 \sin bc \cdot \sin ca \cdot \sin ab = \\ = 4 \cdot \sin (S + 45^0) \cdot \cos (S - bc + 45^0) \cdot \cos (S - ca + 45^0) \cdot \cos (S - ab + 45^0),$$

$$1 - (\sin^2 bc + \sin^2 ca + \sin^2 ab) - 2 \sin bc \cdot \sin ca \cdot \sin ab = \\ = 4 \cdot \cos (S + 45^0) \cdot \sin (S - bc + 45^0) \cdot \sin (S - ca + 45^0) \cdot \sin (S - ab + 45^0),$$

$$1 - (\cos^2 bc + \cos^2 ca + \cos^2 ab) - 2 \cos bc \cdot \cos ca \cdot \cos ab = \\ = -4 \cos S \cdot \cos (S - bc) \cdot \cos (S - ca) \cdot \cos (S - ab),$$

$$1 - (\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c) - 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ = -4 \cdot \sin (\triangle + 45^0) \cdot \cos (a - \triangle - 45^0) \cdot \cos (b - \triangle - 45^0) \cdot \cos (c - \triangle - 45^0),$$

$$1 - (\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c) + 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ = 4 \cdot \cos (\triangle + 45^0) \cdot \sin (a - \triangle - 45^0) \cdot \sin (b - \triangle - 45^0) \sin (c - \triangle - 45^0),$$

$$1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c = \\ = 4 \cdot \cos \triangle \cdot \cos (a - \triangle) \cdot \cos (b - \triangle) \cdot \cos (c - \triangle).$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ statt a, b, c, so muss man setzen $\frac{1}{2}\triangle - 45^0$ statt $\triangle$.

Ferner ist:

$$B^2 + (\cos a + \cos b + \cos c - 1)^2 = \\ = 2 (1 - \cos a) \cdot (1 - \cos b) \cdot (1 - \cos c) = \\ = 16 \sin^2 \tfrac{1}{2}a \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}b \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}c,$$

$$A^2 + (\cos bc + \cos ca + \cos ab + 1)^2 = \\ = 2 (1 + \cos bc) \cdot (1 + \cos ca) \cdot (1 + \cos ab) = \\ = 16 \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}bc \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}ca \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}ab.$$

Also erhält man aus 4) und 5) weiter:

$$6)\quad \cos S = \frac{\cos a + \cos b + \cos c - 1}{4 \sin \tfrac{1}{2}a \cdot \sin \tfrac{1}{2}b \cdot \sin \tfrac{1}{2}c},$$

$$7)\ \cos\triangle = \frac{\cos bc + \cos ca + \cos ab + 1}{4\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}S = \frac{-1+\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c+2\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c}{4\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}S = \frac{1-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c+2\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c}{4\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\triangle = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}bc-\cos^2\frac{1}{2}ca-\cos^2\frac{1}{2}ab+2\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab}{4\cdot\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\triangle = \frac{-1+\cos^2\frac{1}{2}bc+\cos^2\frac{1}{2}ca+\cos^2\frac{1}{2}ab+2\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab}{4\cdot\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$8)\ \sin^2\tfrac{1}{2}S = \frac{\sin\frac{1}{2}\triangle\cdot\cos\frac{1}{2}(a-\triangle)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-\triangle)\cdot\cos\frac{1}{2}(c-\triangle)}{\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}S = \frac{\cos\frac{1}{2}\triangle\cdot\sin\frac{1}{2}(a-\triangle)\cdot\sin\frac{1}{2}(b-\triangle)\sin\frac{1}{2}(c-\triangle)}{\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c},$$

$$tg^2\tfrac{1}{2}S = tg\tfrac{1}{2}\triangle\cdot\cot\tfrac{1}{2}(a-\triangle)\cdot\cot\tfrac{1}{2}(b-\triangle)\cdot\cot\tfrac{1}{2}(c-\triangle).$$

$$9)\ \sin^2\tfrac{1}{2}\triangle = \frac{\sin\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}(S-bc)\cdot\sin\frac{1}{2}(S-ca)\cdot\sin\frac{1}{2}(S-ab)}{\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\triangle = \frac{\cos\frac{1}{2}S\cdot\cos\frac{1}{2}(S-bc)\cdot\cos\frac{1}{2}(S-ca)\cdot\cos\frac{1}{2}(S-ab)}{\cos\frac{1}{2}bc\cdot\cos\frac{1}{2}ca\cdot\cos\frac{1}{2}ab},$$

$$tg^2\tfrac{1}{2}\triangle = tg\tfrac{1}{2}S\cdot tg\tfrac{1}{2}(S-bc)\cdot tg\tfrac{1}{2}(S-ca)\cdot tg\tfrac{1}{2}(S-ab).$$

Diese Ausdrücke für S, $\triangle$, $\frac{1}{2}S$, $\frac{1}{2}\triangle$, sind für die Geodäsie wichtig. Ueberhaupt dienen diese reciproken Gleichungen 1) bis 9) zur Prüfung bei der Berechnung sphärischer Dreiecke.

Beispiel. In VI. 69. war:

Gegeben:

bc	40°46′	$\sin bc$	9,81490	$\frac{1}{2}bc$	20°23′
ca	149°56′	$\sin ca$	9,69984	$\frac{1}{2}ca$	74°58′
ab	122°19′	$\sin ab$	9,92691	$\frac{1}{2}ab$	61° 9′,5
S	156°30′,5	M	9,44165	$\frac{1}{2}S$	78°15′,25
$S—bc$	115°44′,5	$\sin S$	9,60055	$\frac{1}{2}(S—bc)$	57°52′,25
$S—ca$	6°34′,5	$\sin(S—bc)$	9,95461	$\frac{1}{2}(S—ca)$	3°17′,25
$S—ab$	34°11′,5	$\sin(S—ca)$	9,05882	$\frac{1}{2}(S—ab)$	17° 5′,75
		$\sin(S—ab)$	9,74970		
		$4 =$	0,60206		
		A^2	8,96574		
		A	9,48287		
		A^3	8,44861		

Hieraus berechnet:

a	45°53′,32	$\sin a$	9,85612	$\frac{1}{2}a$	22°56′,66
b	146°34′,30	$\sin b$	9,74107	$\frac{1}{2}b$	73°17′,15
c	68°19′,12	$\sin c$	9,96814	$\frac{1}{2}c$	34° 9′,56
$2\triangle$	80°46′,74	N	9,56533	$\triangle$	40°23′,37
$\triangle$	40°23′,37	$\sin\triangle$	9,81157	$\frac{1}{2}\triangle$	20°11′,68
$a—\triangle$	5°29′,95	$\sin(a—\triangle)$	8,98151	$\frac{1}{2}(a—\triangle)$	2°44′,97
$b—\triangle$	106°10′,93	$\sin(b—\triangle)$	9,98244	$\frac{1}{2}(b—\triangle)$	53° 5′,47
$c—\triangle$	27°55′,75	$\sin(c—\triangle)$	9,67060	$\frac{1}{2}(c—\triangle)$	13°57′,87
		$4 =$	0,60206		
		B^2	9,04818		
		B	9,52409		
		B^3	8,57227		

Probe durch die reciproken Gleichungen.

A	9,48287	$B \cdot M$	8,96574
B	9,52409	A^2	8,96574
M	9,44165	$A \cdot N$	9,04820
N	9,56533	B^2	9,04818
$A \cdot B$	9,00696		
$M \cdot N$	9,00698		

M^2	8,88330	$tg\ \frac{1}{2}S$	0,68210
N	9,56533	$tg\ \frac{1}{2}(S - bc)$	0,20203
$M^2 . N$	8,44863	$tg\ \frac{1}{2}(S - ca)$	8,75922
A^3	8,44861	$tg\ \frac{1}{2}(S - ab)$	9,48793
N^2	9,13066		9,13128
M	9,44165	$tg\ \frac{1}{2}\triangle$	9,56564
$N^2 . M$	8,57231		
B^3	8,57227		

B	9,52409	$sin\ \frac{1}{2}\triangle$	9,53808
$4 =$	0,60206	$cos\ \frac{1}{2}(a - \triangle)$	9,99950
$sin\ \frac{1}{2}a$	9,59088	$cos\ \frac{1}{2}(b - \triangle)$	9,77854
$sin\ \frac{1}{2}b$	9,98126	$cos\ \frac{1}{2}(c - \triangle)$	9,98697
$sin\ \frac{1}{2}c$	9,74935		0,67851
$sin\ S$	9,60054		9,98160
		$sin\ \frac{1}{2}S$	9,99080

$sin\ \frac{1}{2}S$	9,99081	$tg\ \frac{1}{2}\triangle$	9,56563
$sin\ \frac{1}{2}(S - bc)$	9,92781	$cot\ \frac{1}{2}(a - \triangle)$	1,31854
$sin\ \frac{1}{2}(S - ca)$	8,75850	$cot\ \frac{1}{2}(b - \triangle)$	9,87568
$sin\ \frac{1}{2}(S - ab)$	9,46831	$cot\ \frac{1}{2}(c - \triangle)$	0,60438
	0,93075		1,36423
	9,07618	$tg\ \frac{1}{2}S$	0,68211
$sin\ \frac{1}{2}\triangle$	9,53809		

A	9,48287	$cos\ \frac{1}{2}\triangle$	9,97245	$cos\ \frac{1}{2}S$	9,30872
$4 =$	0,60206	$sin\ \frac{1}{2}(a - \triangle)$	8,68096	$cos\ \frac{1}{2}(S - bc)$	9,72577
$cos\ \frac{1}{2}bc$	9,97192	$sin\ \frac{1}{2}(b - \triangle)$	9,90287	$cos\ \frac{1}{2}(S - ca)$	9,99929
$cos\ \frac{1}{2}ca$	9,41394	$sin\ \frac{1}{2}(c - \triangle)$	9,38259	$cos\ \frac{1}{2}(S - ab)$	9,98037
$cos\ \frac{1}{2}ab$	9,68339		0,67851		0,93075
$sin\ \triangle$	9,81156		8,61738		9,94490
		$cos\ \frac{1}{2}S$	9,30869	$cos\ \frac{1}{2}\triangle$	9,97245

72.

Die Sinus, Cosinus, Tangenten kleiner Winkel durch den Winkel auszudrücken.

Die Länge des in irgend einem Maasse ausgedrückten Grades sey $= G$. Wenn ein in demselben Maasse ausgedrückter Bogen mit G dividirt wird, so erhält man die diesem Bogen entsprechende Anzahl Grade, und wenn er mit $\frac{1}{60}G$ dividirt wird, die diesem Bogen entsprechende Anzahl Minuten.

Wenn die Anzahl Grade eines Winkels mit $\frac{\pi}{180}$ multiplicirt wird, so erhält man das Verhältniss des diesem Winkel entsprechenden Bogens zum Halbmesser r. Um dasselbe Verhältniss zu erhalten, multiplicirt man die Anzahl Minuten des Winkels mit $\frac{\pi}{10800}$, die Anzahl Secunden mit $\frac{\pi}{648000}$. Diese Factoren bezeichnet man gewöhnlich der Kürze wegen durch $sin\ 1^0$, $sin\ 1'$, $sin\ 1''$. Ihre Werthe findet man in VI. 7. Umgekehrt ist $\frac{180}{\pi} = r$ in Graden, $\frac{10800}{\pi} = r$ in Minuten, $\frac{648000}{\pi} = r$ in Secunden.

Es sey nun das Verhältniss eines kleinen Bogens zum Halbmesser $= x$. Man nehme an:

$$sin\ x = x - a \cdot x^3 + b \cdot x^5,$$

wo a, b Brüche bedeuten, deren Werth gefunden werden soll. Hieraus folgt:

$$sin\ \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}a \cdot x^3 + \tfrac{1}{32}b \cdot x^5,$$
$$sin^2\ \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}a \cdot x^4 + (\tfrac{1}{32}b + \tfrac{1}{64}a^2)\ x^6.$$

Aber $cos\ x = 1 - 2sin^2\ \tfrac{1}{2}x$,

also $cos\ x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}a \cdot x^4 - (\tfrac{1}{16}b + \tfrac{1}{32}a^2) \cdot x^6,$

$$cos^2\ x = 1 - x^2 + (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4})x^4 - (\tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}a) \cdot x^6,$$
$$1 - cos^2\ x = sin^2\ x = x^2 - (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4})x^4 + (\tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}a)x^6,$$

aber auch $sin^2\ x = x^2 - 2a \cdot x^4 + (2b + a) \cdot x^6$.

Man hat also, um a, b zu finden, folgende Gleichungen:

$$2a = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}, \qquad 2b + a = \tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}a.$$

Hieraus findet sich $a = \tfrac{1}{6}$, $b = \tfrac{1}{120}$.

Setzt man diese Werthe von a, b in die obigen Ausdrücke, so erhält man:

$$sin\ x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^3,$$
$$cos\ x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6.$$

Durch algebraische Division ergiebt sich hieraus:

$$tg\ x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5,$$
$$cot\ x = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3.$$

Durch Umkehrung erhält man:

$$x = sin\ x + \tfrac{1}{6}sin^3\ x + \tfrac{3}{40}sin^5\ x,$$
$$x = tg\ x - \tfrac{1}{3}tg^3\ x + \tfrac{1}{5}tg^3\ x.$$

Für kleine Winkel, und bei 5stelligen Logarithmen bis etwa 7^0, sind die beiden ersten Glieder hinreichend. Bei der logarithmischen Berechnung verfährt man dann nach VI. Aufg. 71.

Beispiel. $x = 7^0$.

$7 =$	0,84510
$\frac{\pi}{180}$	8,24188
x	9,08698
x^2	8,17396
$\frac{1}{2}$	9,69897
sin^2	7,87293
sin	8,93647
cos	9,99838
$cos^2 = cos\, x$	9,99676

x^2	8,17396
$\frac{1}{6}$	9,22185
sin^2	7,39581
sin	8,69790
cos	9,99946
cos^2	9,99892
x	9,08698
$sin\, x$	9,08590

x^2	8,17396
$\frac{1}{3}$	9,52288
tg^2	7,69684
tg	8,84842
cos	9,99892
cos^2	9,99784
x	9,08698
$tg\, x$	9,08914

73.

Ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten kleinen Winkeln im Mittelpunct der Kugel entsprechen, kann wie ein gradliniges Dreieck berechnet werden, wenn man von jedem Winkel des sphärischen Dreiecks den dritten Theil des sphärischen Ueberschusses abzieht.

Das sphärische Dreieck sey abc, seine Seiten die Bögen bc, ca, ab, seine Winkel a, b, c. Bildet man ein gradliniges Dreieck, dessen Seiten den Bögen des sphärischen Dreiecks gleich sind, so seyen die Winkel desselben a', b', c', der Inhalt $= F$, der Umfang $bc + ca + ab = 2 \cdot S$. Dann ist

VI. 27. $ca \cdot ab \cdot sin\, a' = 2F$,

VI. 28. $2ca \cdot ab \cdot cos\, a' = ca^2 + ab^2 - bc^2$,

VI. 36. $F^2 = S \cdot (S - bc) \cdot (S - ca) \cdot (S - ab)$.

Im sphärischen Dreieck ist (VI. 62.)

$$A^2 = 4 sin\, S \cdot sin\,(S - bc) \cdot sin\,(S - ca) \cdot sin\,(S - ab),$$

$$sin\, ca \cdot sin\, ab \cdot sin\, a = A.$$

Setzt man in A^2, nach VI. 72.:

$$sin\, S = S\left(1 - \frac{S^2}{6}\right),$$

$$sin\,(S - bc) = (S - bc)\left(1 - \frac{(S - bc)^2}{6}\right),$$

$$sin\,(S - ca) = (S - ca)\left(1 - \frac{(S - ca)^2}{6}\right),$$

$$sin\,(S - ab) = (S - ab)\left(1 - \frac{(S - ab)^2}{6}\right),$$

so ergiebt sich sogleich:

$$\frac{A^2}{4F^2} = 1 - \frac{S^2 + (S - bc)^2 + (S - ca)^2 + (S - ab)^2}{6}.$$

Aber $S^2 + (S - bc)^2 + (S - ca)^2 + (S - ab)^2$
$= bc^2 + ca^2 + ab^2$.

Also $$\frac{A^2}{4F^2} = 1 - \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{6}.$$

Also $$\frac{A}{2F} = 1 - \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{12}.$$

Also $$\frac{\sin ca \cdot \sin ab \cdot \sin a}{2F} = 1 - \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{12}.$$

Aber nach VI. 72. $$\frac{ca}{\sin ca} = 1 + \tfrac{1}{6} ca^2,$$
$$\frac{ab}{\sin ab} = 1 + \tfrac{1}{6} ab^2,$$
$$\frac{ca \cdot ab}{\sin ca \cdot \sin ab} = 1 + \frac{ca^2 + ab^2}{6},$$

Also $$\frac{\sin a}{\sin a'} = \left(1 + \frac{ca^2 + ab^2}{6}\right)\left(1 - \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{12}\right).$$

Also $$\frac{\sin a}{\sin a'} = 1 + \frac{ca^2 + ab^2 - bc^2}{12} = 1 + \tfrac{1}{6} \cdot ca \cdot ab \cdot \cos a'.$$

Also $$\sin a = \sin a' + \tfrac{1}{3}F \cdot \cos a'.$$

Es sey nun $a = a' + x$,
so ist $\sin a = \sin a' \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos a'$,
oder $\sin a = \sin a' + x \cdot \cos a'$,
also $x = \tfrac{1}{3}F$,
also $a = a' + \tfrac{1}{3}F, \quad b = b' + \tfrac{1}{3}F, \quad c = c' + \tfrac{1}{3}F.$

Ferner ist (VI. 71.) $$\sin\triangle = \frac{A}{4\cos\tfrac{1}{2}bc \cdot \cos\tfrac{1}{2}ca \cdot \cos\tfrac{1}{2}ab}.$$

VI. 72. $$\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}bc} = 1 + \tfrac{1}{8}bc^2, \quad \frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}ca} = 1 + \tfrac{1}{8}ca^2,$$
$$\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}ab} = 1 + \tfrac{1}{8}ab^2,$$

also $$\frac{4\sin\triangle}{A} = 1 + \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{8},$$

also $$\frac{2\sin\triangle}{F} = \left(1 - \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{12}\right)\left(1 + \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{8}\right),$$

also $$\frac{2\sin\triangle}{F} = 1 + \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{24}.$$

Setzt man die Grösse rechts $= tg^2\, h$, so ist
$$\triangle = \tfrac{1}{2}F \cdot \frac{1}{\cos^2 h}.$$

Hier ist $\triangle$ der halbe sphärische Ueberschuss, also F sehr nahe der sphärische Ueberschuss.

Man berechnet also den Inhalt des gradlinigen Dreiecks F aus den Seiten bc, ca, ab. Wenn diese Seiten in Graden gegeben sind, so erhält man F in Quadratgraden, und muss es durch Multiplication mit $\frac{\pi}{180}$ auf Grade bringen. Wenn aber bc, ca, ab in irgend einem Längenmaass ausgedrückt sind, so erhält man F in Quadraten dieses Maasses, und muss es durch Multiplication mit $\frac{\pi}{180\ G^2}$ auf Grade bringen. Dieses giebt dann den sphärischen Ueberschuss $2\triangle$, dessen 3ter Theil zu den Winkeln a', b', c' addirt, die Winkel a, b, c giebt.

Noch genauer erhält man diesen sphärischen Ueberschuss, wenn man F mit $\cos^2 h$ dividirt, wo $tg^2\, h = \frac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{24}$. Dann können, bei 5stelligen Logarithmen, die Seiten bis 17^0 betragen.

Beispiel. $bc = 15^0$, $ca = 16^0$, $ab = 17^0$.
$bc^2 = 225$, $ca^2 = 256$, $ab^2 = 289$, $bc^2 + ca^2 + ab^2 = 770$.

bc	$15^0\ 0'$
ca	$16^0\ 0'$
ab	$17^0\ 0'$
$2S$	$48^0\ 0'$
S	$24^0\ 0'$
$S - bc$	$9^0\ 0'$
$S - ca$	$8^0\ 0'$
$S - ab$	$7^0\ 0'$
$\frac{1}{2}a'$	$26^0 59',05$
$\frac{1}{2}b'$	$29^0 48',31$
$\frac{1}{2}c'$	$33^0 12',64$
$\frac{1}{3}\triangle$	$19',38$
$\frac{1}{2}a$	$27^0 18',43$
$\frac{1}{2}b$	$30^0\ 7',69$
$\frac{1}{2}c$	$33^0 32',02$

S	1,38021
$S - bc$	0,95424
$S - ca$	0,90309
$S - ab$	0,84510
F^2	4,08264
F	2,04132
$\sin 1^0$	8,24188
$\sec^2 h$	0,00423
$60'$	1,77815
$2\triangle$	2,06558
$2\triangle =$	116,30

S	1,38021
$S - bc$	0,95424
$S - ca$	0,90309
$S - ab$	0,84510
E^2	8,67778
E	9,33889
$\cot \frac{1}{2}a'$	0,29313
$\cot \frac{1}{2}b'$	0,24198
$\cot \frac{1}{2}c'$	0,18399

$770 =$	2,88649
$\frac{1}{24}$	8,61979
$\sin^2 1^0$	6,48375
$tg^2\, h$	7,99003
$tg\, h$	8,99502
$\cos h$	9,99788
$\cos^2 h$	9,99577

Probe.

$\sin S$	9,60931
$\sin (S-bc)$	9,19433
$\sin (S-ca)$	9,14356
$\sin (S-ab)$	9,08589
E^2	2,18553
E	1,09276
$\cot \frac{1}{2}a$	0,28709
$\cot \frac{1}{2}b$	0,23632
$\cot \frac{1}{2}c$	0,17866

Sucht man hiernach die Winkel $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, so findet man genau dieselben Werthe als aus dem gradlinigen Dreieck durch Addition von $\frac{1}{3}\triangle$ zu $\frac{1}{2}a'$, $\frac{1}{2}b'$, $\frac{1}{2}c'$ gefunden worden.

Anhang,

enthaltend Beispiele zur Uebung, und Aufgaben zur Anwendung der Trigonometrie.

Ebene rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke.

1.

In einer Entfernung von $3\frac{1}{2}$ Werst oder 12250 russischen Fuss erscheint eine Bergspitze unter einer scheinbaren Höhe von $4^0 6',7$. Wie gross ist die absolute Höhe derselben über dem Horizont des Beobachters, wenn man die Krümmung der Erde unberücksichtigt lässt?

880,6 Fuss.

2.

Wie hoch ist die Spitze eines Thurmes, welcher bei einer Sonnenhöhe von 18^0 einen Schatten von $783\frac{1}{3}$ Fuss Länge auf den horizontalen Boden wirft?

254,5 Fuss.

3.

Wenn die Diagonallinie eines rechtwinkligen Feldes 325 Fuss beträgt, und die Nebenseiten mit derselben Winkel von $64^0 18'$ und $25^0 42'$ bilden, wie gross sind diese Seiten?

292,8 Fuss und 140,9 Fuss.

4.

Wenn bei einem gleichseitigen Kegel die Höhe 21 Fuss 6 Zoll, der Durchmesser der Grundfläche 8 Fuss 7 Zoll ist, wie gross ist der Winkel an der Spitze und die Seitenlinie?

$22^0 34',63$ und 21 Fuss 11 Zoll.

5.

Wenn bei einer regelmässigen Pyramide der gradlinige Winkel, welchen die Endkanten an der Spitze bilden, $45^0 35'$ beträgt, und die Grundkanten eine Länge von 120 Fuss haben, wie gross ist der Inhalt jeder Endfläche?

8567,4 □Fuss.

6.

Wenn die Höhe eines Stabes 17 Fuss 8 Zoll, die Schattenlänge 29 Fuss beträgt, wie gross ist die Sonnenhöhe?

$31^0 21'$.

7.

Wenn die Höhe eines Kegels 18 Fuss beträgt, und die Seitenlinie mit der Grundfläche einen Winkel von $35^0 28'$ bildet, wie lang ist die Seitenlinie?

31 Fuss $0\frac{1}{4}$ Zoll.

8.

Wenn der Querschnitt eines Dachs ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Höhe 29 Fuss ist, dessen Winkel an der Grundlinie $40^0 45'$ betragen, wie gross ist die Grundlinie?

67 Fuss $3\frac{3}{4}$ Zoll.

9.

Wenn die Länge eines Feldes 4937 Fuss, die Breite 3874 Fuss beträgt, welche Winkel bildet die Diagonallinie mit den Nebenseiten?

$38^0 7\frac{1}{4}'$ und $51^0 52\frac{3}{4}'$.

10.

Wenn ein Thurm in einer Entfernung von 128 Fuss unter einem Höhenwinkel von $37^0 27'$ erscheint, wie hoch ist er?

98 Fuss $0\frac{1}{2}$ Zoll.

11.

Wenn bei einem gleichseitigen Kegel die Seitenlinie 35 Fuss beträgt, und eine Neigung von $27^0 19'$ gegen die Grundfläche hat, wie gross ist die Höhe des Kegels und der Durchmesser der Grundfläche?

16 Fuss $0\frac{3}{4}$ Zoll, und 62 Fuss $2\frac{1}{3}$ Zoll.

12.

Der senkrechte Druck, welchen ein Körper auf eine schiefe Fläche ausübt, ist gleich dem Gewicht desselben multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene gegen den Horizont. Wenn nun auf einer schiefen Ebene, welche um $23^0 48'$ gegen den Horizont geneigt ist, eine Last von einem Berkowez oder 400 russischen Pfunden ruht, wie gross ist der senkrechte Druck?

366 Pfund.

13.

Die Kraft, mit welcher eine Kugel auf einer schiefen Ebene hinabrollt, verhält sich zu der Kraft des freien Falls wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene gegen den Horizont zu 1. In Mitau beträgt der freie Fall im leeren Raum in der ersten Secunde 193,23 engl. Zoll. Wie weit rollt die Kugel auf einer polirten Ebene von 5^0 Neigung in $5\frac{1}{2}$ Secunden?

42 Fuss $5\frac{1}{2}$ Zoll.

14.

Kräfte, welche an Seilen ziehen, bringen nach einer mittlern Richtung Wirkungen hervor, welche sich wie die Cosinus der Winkel, welche diese Seile mit der mittlern Richtung bilden, verhalten. Wenn nun fünf gleiche Kräfte von 400 russ. Pfund unter Winkeln von 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 25^0 gegen die Richtung des mittlern Seiles wirken, wie gross ist ihre Gesammtwirkung?

$1917\frac{1}{6}$ russ. Pfund.

15.

Der Grad eines Parallelkreises unter der geographischen Breite b ist in Toisen:

$$57197{,}9428 \cdot \cos b - 94{,}8493 \cdot \cos b \cdot \cos 2b + 0{,}117961 \cdot \cos b \cdot \cos 4b,$$

oder, da nach meiner Bestimmung vom J. 1834 (Rechenbuch II. 296) die Toise 76,736639 engl. oder russ. Zoll hält, in russischen Fuss:

$$365764{,}824 \cdot \cos b - 606{,}5347 \cdot \cos b \cdot \cos 2b + 0{,}7543 \cdot \cos b \cdot \cos 4b.$$

Wie gross ist der Parallelgrad unter der Breite des mitauischen Gymnasiums, welche nach meiner Bestimmung vom J. 1828 $56^0 39' 4'',5$ beträgt?

201204,9 russ. Fuss.

16.

Der Grad eines Meridians unter der geographischen Breite b ist in Toisen:

$$57008{,}715 - 283{,}6063 \cos 2b + 0{,}5878 \cdot \cos 4b,$$

oder in russischen Fuss:

$$364554{,}765 - 1813{,}583 \cdot \cos 2b + 3{,}759 \cdot \cos 4b.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist der 360ste Theil des Meridians. Wie gross ist der Meridiangrad unter der Breite des mitauischen Gymnasiums?

365269,6 russ. Fuss.

17.

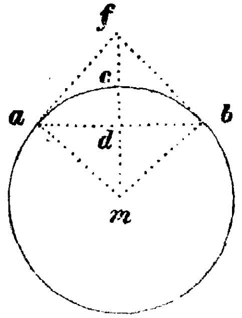
Die Höhe des freien Falls aller Körper im leeren Raum in einer mittlern Secunde ist unter der geographischen Breite b in engl. oder russ. Zollen:

$$193{,}033088 - 0{,}5006307 \cdot \cos 2b.$$

Wie gross ist sie unter der Breite des mitauischen Gymnasiums?

193,231 engl. Zoll.

18.



Wenn man den in Aufg. 16. angegebenen 360sten Theil des Meridians mit (V. 59.) $\frac{180^0}{\pi} = 57{,}2957795$ multiplicirt, so erhält man den Halbmesser eines Kreises, welcher an Umfang dem Erdmeridian gleich ist, nämlich 20'887449,4 russ. Fuss oder 5967,842 Werst. Wie gross ist in einer Höhe von einer Meile oder 7 Werst $= fc$, die Weite des Gesichtskreises, d. h. die Tangente af, der Bogen ac, und die Sehne ac?

289,13; 288,91; 288,88 Werst.

19.

Wie gross ist bei demselben mittlern Erdhalbmesser die Weite des Gesichtskreises in Höhen von 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500 russ. Fuss?

41,29; 58,40; 71,52; 82,59; 92,33; 101,15; 109,25 Werst.

20.

Wie gross ist der optische Winkel eines Baums von 50 Fuss Höhe in der Entfernung von 3 Werst? (vergleiche V. 59.).

16,37 Minuten.

21.

Wie gross ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von 10 Zoll Weite und 20 Fuss Länge?

$143\frac{1}{4}$ Minuten.

22.

Die mittlere horizontale Parallaxe der Sonne unter dem Erdäquator ist nach Enke $8'',5776$. Wie viel Halbmesser des Erdäquators ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne? und wie viel Werst, wenn der Halbmesser des Erdäquators (astr. Nachr. 9. S. 371) 3'271773 Toisen?

24046,9 Erdhalbmesser = 143'746000 Werst.

(1 Toise = 0,0018270628333... Werst, vergl. Aufg. 15.)

(1^0 des Aequators = 104,331155 Werst).

23.

Der scheinbare Halbmesser der Sonne in ihrer mittlern Entfernung von der Erde ist nach Bessel (astr. Nachr. 14. S. 133) $15'59'',788$, wie gross ist ihr absoluter Halbmesser?

668874 Werst.

24.

Die mittlere horizontale Parallaxe des Mondes unter dem Erdäquator ist nach Hansen (astr. Nachr. 17. S. 299) $57'2'',06$.

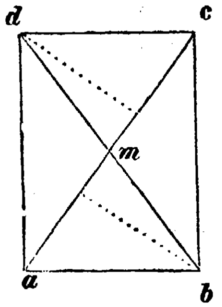
Wie viel Werst ist derselbe in seiner mittlern Entfernung von der Erde entfernt? Und wie viel Werst ist sein absoluter Halbmesser, wenn dieser sich nach Burkhardt zu jener Parallaxe wie 0,2725 : 1 verhält?

Entfernung des Mondes = 60,2751 Erdhalbm. = 360309 Werst, Halbmesser des Mondes = 1628,9 Werst.

25.

Der mittlere scheinbare Durchmesser des Mondes ist (Aufg. 24.) $31'5''$. Wenn man nun die Breite der Flamme einer Wachskerze zu $\frac{1}{5}$ Zoll annimmt, wie weit muss man dieselbe vom Auge entfernen, damit sie die Mondscheibe bedeckt, also mit ihr von gleicher Grösse erscheint?

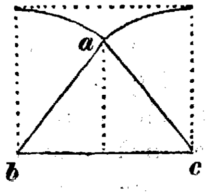
$22\frac{1}{8}$ Zoll.



26.

In einem Rechteck $abcd$, in welchem $ab^2 : bc^2 = 1 : 2$ ist, stellen (IV. 45.) ac, bd, die beiden Hexaederaxen vor. Wie gross ist ihr Neigungswinkel amb?

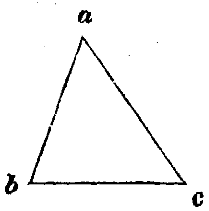
$70^0 31',7$.



27.

In einem gleichschenkligen Dreieck abc, in welchem $ca = ab$, $ab^2 : bc^2 = 3 : 4$, ist (IV. 41.) b der halbe Kantenwinkel des regelmässigen Oktaeders; wie gross ist derselbe?

$b = 54^0 44',1$, $2b = 109^0 28',3$.



28.

In einem gleichschenkligen Dreieck abc, in welchem $ab = bc$, und $bc^2 : ca^2 = 3 : 4$, stellen b und c die Neigungen der Endflächen und Endkanten eines regelmässigen Tetraeders (IV. 42.) gegen die Grundfläche dar; wie gross sind dieselben?

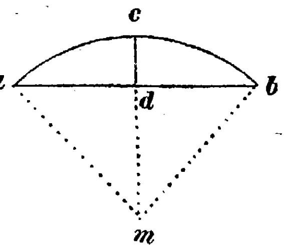
$b = 70^0 31',7$, $c = 54^0 44',1$.

29.

Wie gross sind die Winkel des pythagoräischen Dreiecks, dessen Seiten sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten?

$36^0 52',2$ und $53^0 7',8$.

30.



Die Grundlinie eines Kreisbogens oder Kreissegments sey $ab = 120$ Fuss, die Höhe $cd = 24$ Fuss, wie gross ist der Mittelpunctswinkel $amb = m$, der Halbmesser ma, die Länge des Bogens acb, und der Inhalt des Sectors?

$m = 87^0 12',3384$, $ma = 87$ Fuss, $acb = 132,4162$ Fuss, Sector $ambc = 5760,108$ □Fuss.

31.

Wenn m der Mittelpunctswinkel eines Kreissegments ist, so ist das Verhältniss des Segments zur Kreisfläche $= \frac{m}{360^0} - \frac{\sin m}{2\pi}$, und das Verhältniss des Segments zum Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe $=$

$$\frac{m}{360^0} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}m \cdot \sin^2\frac{1}{4}m} - \frac{\cos\frac{1}{2}m}{2\sin^2\frac{1}{4}m}.$$

Wie findet man diese Formeln aus V. 60. 61. und VI. 10. 27.? und wie gross ist hiernach für 120 Fuss Grundlinie und 24 Fuss Höhe, oder für $m = 87^0 12',3384$, das Verhältniss des Segments zum Kreise und Dreieck, und der absolute Inhalt des Segments?

Segm. z. Kr. $= 0,0832722$, Segm. z. Dreieck $= 1,375074$. Inhalt $= 1980,106$ □Fuss.

32.

Der Kreisbogen ist 50 Fuss, der Halbmesser ist 70 Fuss, wie gross ist die Sehne?

48,944 Fuss.

33.

Der Inhalt eines Kreissectors ist 28800 □Fuss, der Halbmesser 216 Fuss, wie gross ist die Sehne?

250,04 Fuss.

34.

Der Kreisbogen ist 80 Fuss, der Mittelpunctswinkel 73^0, wie lang ist die Sehne?

74,698 Fuss.

35.

Der Inhalt des Kreissegments ist 2974,8 □Fuss, der Mittelpunctswinkel $53^0 12'$, wie lang ist die Sehne? (Anwendung der Formel Aufgabe 31.)

193,23 Fuss.

36.

Der Inhalt des Kreissectors ist 2974,8 □Fuss, der Mittelpunctswinkel $53^0 12'$, wie lang ist die Sehne?

71,683 Fuss.

37.

Der Inhalt des Sectors ist 5000 □Fuss, der Bogen 120 Fuss, wie lang ist die Sehne?

109,9 Fuss.

38.

Die Sehne ist 160 Fuss, der Mittelpunctswinkel 56^0, wie lang ist der Halbmesser?

170,4 Fuss.

39.

Die Sehne ist 170 Fuss, der Durchmesser 560 Fuss, wie gross ist der Mittelpunctswinkel?

$m = 35^0 20\frac{2}{3}'$.

40.

Die Sehne ist 390 Fuss, der Durchmesser 560 Fuss, wie lang ist der Bogen?

431,4 Fuss.

41.

Die Grundlinie des Bogens ist 120 Fuss, die Höhe ist 20 Fuss, wie lang ist der Bogen?

128,7 Fuss.

42.

Die Formeln für die Berechnung der regelmässigen Vielecke trigonometrisch auszudrücken.

Der Halbmesser des Kreises $= r$, der Mittelpunctswinkel $= m$, der halbe Mittelpunctswinkel oder Peripheriewinkel $= p$, die Anzahl der Seiten $= N$, also $p = \frac{180^0}{N}$, die Seite des innern Vielecks $= 2r \cdot sin\ p$, der Umfang des innern Vielecks $= 2r \cdot N \cdot sin\ p$, der Inhalt des innern Vielecks $= r^2 \cdot N \cdot sin\ p \cdot cos\ p = r^2 \cdot \frac{1}{2}N \cdot sin\ 2p$, die Seite des äussern Vielecks $= 2r \cdot tg\ p$, der Umfang des äussern Vielecks $= 2r \cdot N \cdot tg\ p$, der Inhalt des äussern Vielecks $= r^2 \cdot N \cdot tg\ p$. Die in V. 46. 51. zur Bestimmung der Vielecke angewandten Grössen sind:

$$D = \frac{1}{sin\ p} = cosec\ p, \quad E = \frac{1}{tg\ p} = cot\ p.$$

Das Verhältniss des Inhalts zum Quadrat der Seite $= \frac{1}{4}N \cdot E = \frac{1}{4}N \cdot cot\ p$, das Verhältniss des Inhalts zum Quadrat des Umfangs $= \frac{E}{4N} = \frac{cot\ p}{4N}$, das Verhältniss des Umfangs des innern Vielecks zum Durchmesser $= \frac{N}{D} = N \cdot sin\ p$, das Verhältniss des Umfangs des äussern Vielecks zum Durchmesser, oder das Verhältniss des Inhalts des äussern Vielecks zum Quadrat des Halbmessers, oder das Verhältniss des Quadrats des halben Umfangs zum Inhalt $= \frac{N}{E} = N \cdot tg\ p$; das Verhältniss des Inhalts des innern Vielecks zum Quadrat des Halbmessers $= \frac{N \cdot E}{D^2} = N \cdot sin\ p \cdot cos\ p = \frac{1}{2}N \cdot sin\ 2p$.

43.

Aus dem Durchmesser $= 100$ das innere und äussere Sechseck zu berechnen.

$p = 30^0$, inn. Umfang $= 300$, inn. Inhalt $= 6495$, äuss. Umfang $= 346{,}4$, äuss. Inhalt $= 8660$.

44.

Aus dem Durchmesser $= 100$ das Achteck zu berechnen.

$p = 22^0 30'$, inn. Umfang $= 306{,}15$, inn. Inhalt $= 7071$, äuss. Umfang $= 331{,}37$, äuss. Inhalt $= 8284$.

45.

Aus dem Durchmesser $= 100$ das 20-Eck zu berechnen.

$p = 9^0$, inn. Umfang $= 312{,}86$, inn. Inhalt $= 7725{,}4$, äuss. Umfang $= 316{,}76$, äuss. Inhalt $= 7919{,}2$.

46.

Aus dem Durchmesser $= 100$ das 257-Eck zu berechnen.

$p = 0^0 42' 1'',4$, inn. Umfang $= 314{,}14$, inn. Inhalt $= 7853{,}1$, äuss. Umfang $= 314{,}17$, äuss. Inhalt $= 7854{,}3$.

47.

Aus der Seite $= 10$ den Inhalt des Sechsecks zu berechnen.

Inhalt $= 259{,}8$.

48.

Aus der Seite $= 10$ den Inhalt des 20-Ecks zu berechnen.

Inhalt $= 3156{,}9$.

49.

Aus dem Umfang $= 220$ Fuss den Inhalt des 12-Ecks zu berechnen. Inhalt $= 3763{,}1$ □Fuss.

50.

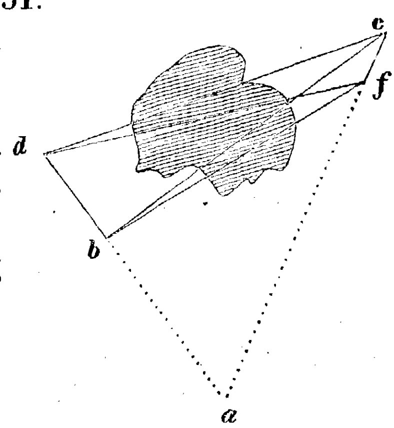
Aus dem Inhalt $= 325$ □Fuss den Umfang des 9-Ecks zu berechnen. Umfang $= 65{,}256$ Fuss.

Ebene Dreiecke und Vierecke überhaupt.

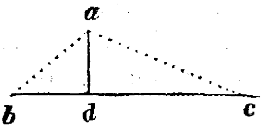
51.

Die Linien db, cf treffen in a unter einem Winkel $a = 60^0$ zusammen. Von diesem Puncte a gemessen ist $ab = 800$, $ac = 1200$, $ad = 920$, $af = 1050$ Fuss, welches sind die gegenseitigen Entfernungen der Puncte $bcdf$?

$bf = 950{,}0$; $df = 991{,}4$; $bc = 1058$; $cd = 1087{,}4$ Fuss.



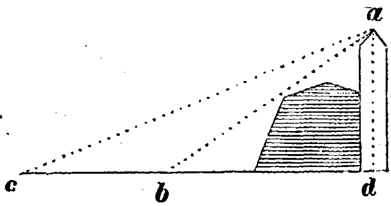
52.



Ein Gegenstand a, welcher von einer Standlinie bc eine senkrechte Entfernung $ad = 335{,}6$ Fuss hat, erscheint an den Endpuncten derselben unter Winkeln $b = 44^0 8',4$, $c = 23^0 7',6$. Wie gross ist der Inhalt des Dreiecks?

3875,2 □Saschen.

53.



Um die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, welchem man sich nicht unmittelbar nähern kann, nimmt man vor demselben auf einer horizontalen Ebene zwei Puncte b, c an, welche mit dem Thurm in grader Linie liegen, und misst die Entfernung $bc = 791{,}8$ Fuss, die Höhenwinkel $abd = 15^0 11',8$, und $acd = 8^0 2',4$; wie hoch ist der Thurm?

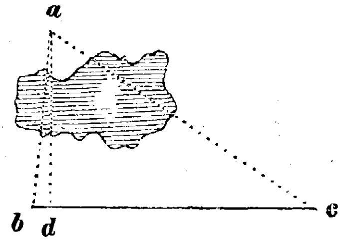
$ad = 233$ Fuss.

54.

Die Seiten eines dreieckigen Brets sind $10\frac{1}{2}$ Zoll, $12\frac{1}{2}$ Zoll, 15 Zoll, was ist der Inhalt, und wie lang sind die drei Höhen?

Inhalt = 64,8 □Fuss; Höhen: 12,342; 10,368; 8,640 Zoll.

55.

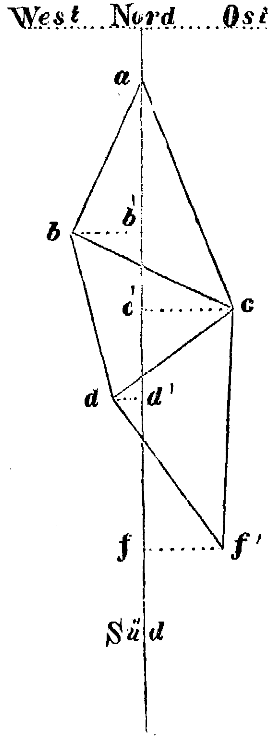


An den Endpuncten einer Standlinie $bc = 580$ Fuss erscheint ein Gegenstand a, zu welchem man nicht unmittelbar gelangen kann, unter Winkeln $b = 85^0 12'$, $c = 42^0 20'$, welches sind dessen Entfernungen?

$ab = 492{,}56$; $ca = 728{,}83$; $bd = 41{,}216$; $cd = 538{,}79$; $ad = 490{,}83$ Fuss.

56.

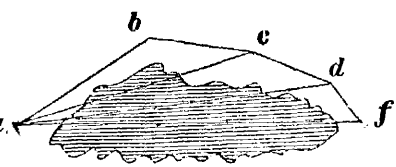
Bei einer Gradmessung zieht man durch einen Hauptpunct a einen Meridian NS, wählt in der Richtung desselben eine Reihe von Puncten b, c, d, f u. s. w. und misst in den $\triangle\ abc$, bcd, cdf u. s. w. die Winkel. Die erste Linie ab wird unmittelbar gemessen, z. B. = 1000, und ihr Azimuth,



d. h. der Winkel *baS*, welchen sie mit dem Meridian bildet, durch astronomische Beobachtungen bestimmt, z. B. 14°48′ nach Westen. Hieraus ergeben sich die Azimuthe aller übrigen Seiten, indem in jedem Puncte die Summe oder Differenz der Azimuthe dem Winkel oder seinem Nebenwinkel gleich seyn muss. Aus der ersten Seite *ab* und den Winkeln werden alle übrigen Seiten *ac*, *bc* u. s. w., und die Abscissen und Ordinaten der Puncte auf den Meridian berechnet, indem das Product einer Dreieckseite mit dem Cosinus des Azimuths den Unterschied der Abscissen, und mit dem Sinus des Azimuths die Summe oder den Unterschied der Ordinaten giebt. Die Abscisse des letzten Puncts giebt den ganzen Meridianbogen.

△ *abc*	△ *bcd*	△ *cdf*	Azimuth.	Länge.
a 50°28′	*b* 68°41′	*c* 32°41′	*ab W* 14°48′	1000
b 89°20′	*c* 73°12′	*d* 125°27′	*ac O* 35°40′	1549,2
c 40°12′	*d* 38° 7′	*f* 21°52′	*bc O* 75°52′	1194,9
Ordinaten.	Abscissen von		*bd O* 7°11′	1853,2
b W 255,4	*b* 966,8		*cd W* 30°56′	1803,4
c O 903,3	*c* 1258,6		*df O* 23°37′	2614,6
d W 23,7	*d* 2805,4		*cf O* 1°45′	3944,3
f O 1023,7	*f* 5201,0			

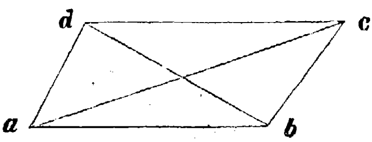
57.



Ein Wald, welcher zwei Stationen *af* trennt, soll in der Richtung derselben durchhauen werden. Man wählt an der Seite beliebige Standpuncte *b*, *c*, *d*, misst *ab* = 518 Saschen, *bc* = 425 Saschen, *cd* = 368 Saschen, *df* = 374 Saschen, und die Winkel *abc* = 178°24′, *bcd* = 175°11′, *cdf* = 173°34′. Welchen Winkel bildet die Linie *af* mit der ersten Richtungslinie *ab*?

$\angle\, bac = 0^0 43'16''$, $cad = 1^0 35'54''$, $daf = 2^0 20'2''$, also $baf = 4^0 39'12''$.

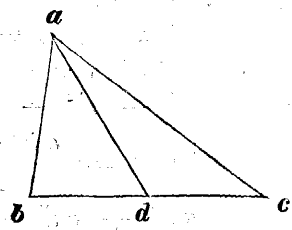
58.



Ein Parallelogramm aus den Seiten und einer Diagonallinie zu berechnen. Z. B. $ab = cd = 380$ Saschen, $bc = da = 244$ Saschen, $ca = 527$ Saschen. Zur Probe der trigonometrischen Berechnung dient die geometrische Gleichung $bd^2 + ca^2 = 2ab^2 + 2bc^2$.

$a = 66^0 33'$, $b = 113^0 27'$, $bd = 360{,}75$ Saschen.

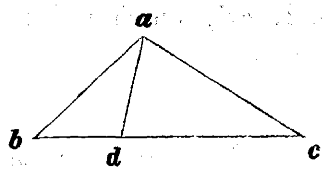
59.



Aus den Seiten des Dreiecks die Länge der eine Seite halbirenden Diagonallinie zu berechnen. Z. B. $ab = 217$ Saschen, $bc = 325$ Saschen, $ca = 380$ Saschen. Zur Probe der trigonometrischen Berechnung dient die geometrische Gleichung (V. 12.) $ad^2 = \frac{1}{2} ab^2 + \frac{1}{2} ca^2 - bd^2$.

$b = 86^0 37',2$, $ad = 263{,}32$ Saschen.

60.

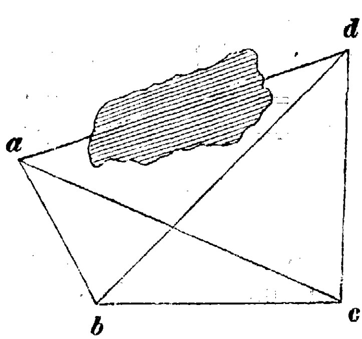


Aus den Seiten des Dreiecks und den Abschnitten einer Seite die Diagonallinie zu berechnen. Z. B. $ab = 250$, $bc = 560$, $ca = 390$, $bd = 210$, $cd = 350$ Fuss. Zur Probe der trigonometrischen Berechnung dient die geometrische Gleichung (VI. 10.)

$$ad^2 = ab^2 \cdot \frac{cd}{bc} + ca^2 \cdot \frac{bd}{bc} - bd \cdot cd.$$

$b = 36^0 52',2$, $ad = 150{,}33$ Fuss.

61.



Die Entfernung der Signale a, d ist nicht unmittelbar zu messen, man kennt aber die Entfernungen $ab = 210$, $bc = 382$, $ca = 486$, $bd = 512$, $cd = 308$. Wie gross ist die Entfernung ad?

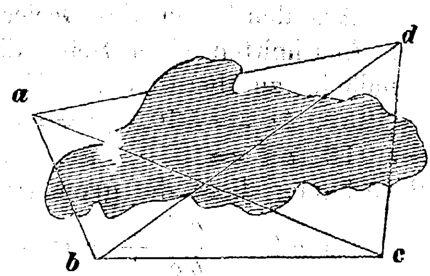
Man berechnet die Winkel der △ *abc*, *dbc*, wodurch man die Winkel *abd*, *acd* erhält. Man berechnet nun *ad* sowohl aus dem △ *abd*, als aus dem △ *acd*, um eine Probe zu haben.

△ *abc*		△ *dbc*		
a	48°49′,8	*d*	47°59′,4	
b	106°43′,4	*b*	36°48′,2	*ad* = 482,08.
c	24°26′,8	*c*	95°12′,4	

Man kann diese Aufgabe auch unter der Form darstellen: *zwischen den vier Seiten und den beiden Diagonallinien eines Vierecks eine Gleichung zu finden.* Da $adb + cdb = adc$, so ist (VI. 13.) $\cos adb \cdot \cos cdb - \sin adb \cdot \sin cdb = \cos adc$, also $\cos adb \cdot \cos cdb - \cos adc = \sin adb \cdot \sin cdb$. Man erhebt diese Gleichung ins Quadrat, und setzt $\sin^2 adb = 1 - \cos^2 adb$, $\sin^2 cdb = 1 - \cos^2 cdb$, hernach $\cos adb = A$, $\cos bdc = B$, $\cos adc = C$, so ist $A^2 + B^2 + C^2 - 2A \cdot B \cdot C = 1$. Es ist aber (VI. 28.) $A = \dfrac{ad^2 + bd^2 - ab^2}{2ad \cdot bd}$, $B = \dfrac{bd^2 + cd^2 - bc^2}{2bd \cdot cd}$, $C = \dfrac{ad^2 + cd^2 - ca^2}{2ad \cdot cd}$.

Setzt man diese Werthe hinein, so ergiebt sich eine geometrische Gleichung zwischen den Linien *ab*, *bc*, *ca*, *bd*, *ad*, *cd*, durch welche man aus fünfen die sechste berechnen kann.

62.



Man kennt die Länge der Standlinie *bc* = 382 Saschen, und die Winkel der △ *abc*, *dbc*, nämlich:

△ *abc*		△ *dbc*		
a	48°51′	*d*	48° 1′	Hieraus die übrigen Linien zu berechnen.
b	106°43′	*b*	36°48′	
c	24°26′	*c*	95°11′	

ab = 209,84 S., *ac* = 485,87 S., *db* = 511,79 S., *dc* = 307,81 S., *ad* = 481,88 S.

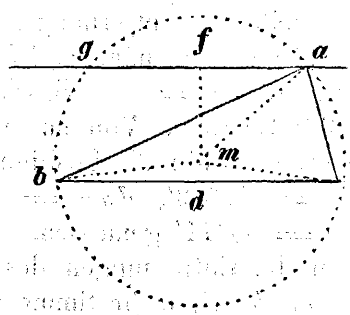
63.

Man kennt die Länge der Standlinie *bc* = 1592 Saschen, und die Winkel der △ *abd*, *acd*, nämlich:

△ *abd*		△ *acd*		
a	$106^0 43'$	*a*	$36^0 48'$	Hieraus die übrigen Linien zu berechnen.
b	$48^0 51'$	*c*	$48^0\ 1'$	
d	$24^0 26'$	*d*	$95^0 11'$	

Man nimmt für ad eine willkührliche Länge an, z. B. $ad = 1000$, und berechnet daraus nach Aufg. 62.: $bc = 1261,45$. Nun multiplicirt man alle Längen mit dem Verhältniss $\frac{1592}{1261,45} = 1,262$, und erhält: $ad = 1262$ Saschen, $ab = 693,27$ S., $db = 1605,2$ S., $ac = 1690,8$ S., $dc = 1017,0$ S.

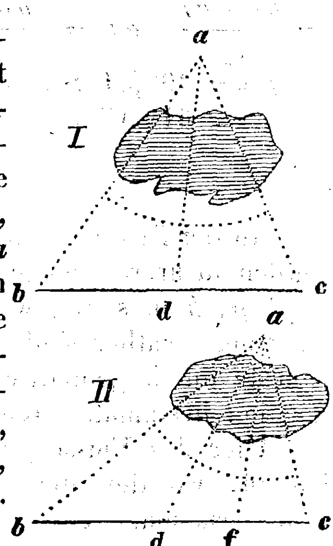
64.



Mit der Standlinie $bc = 525$ Saschen ist auf dem Felde eine Parallele ag gezogen, und ihr senkrechter Abstand $df = 483,46$ Saschen gemessen. Auf der Parallele wird der Positionswinkel $bac = 48^0 37'$ gemessen, man soll hieraus die Entfernungen ab, ac berechnen.

Man berechnet $am = bm = cm = 349,86$ Saschen, $md = 231,23$ S., $mf = 252,23$ S., $\angle amf = 43^0 52'$, $\angle amc = 87^0 31'$, $\angle amb = 175^0 15'$, $ab = 699,12$ S., $ac = 483,92$ S.

65.



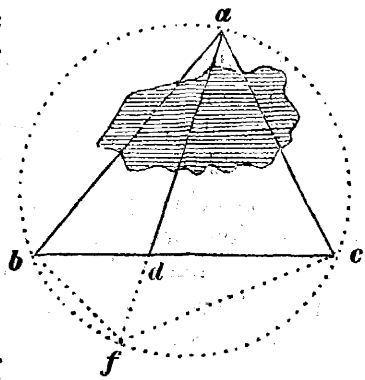
Von den Endpuncten der Standlinie $bc = 854$ Saschen ist ein Punct a sichtbar, man soll auf der Standlinie I. den Punct d bestimmen, dessen Diagonallinie den Winkel a in die Hälfte theilt, oder II. die Puncte d, f, deren Diagonallinien den Winkel a in drei gleiche Theile theilen. Man misst die Winkel an der Standlinie $b = 58^0 12'$, $c = 77^0 25'$, und hieraus $a = 44^0 23'$. Man berechnet hieraus ab, ca, und dann in I. aus ab, b, $\frac{1}{2}a$, die bd, ad; aus ac, c, $\frac{1}{2}a$, die ad, cd. Die Probe ist, dass (V. 19. 20.) $\frac{bd}{cd} = \frac{ab}{ca}$, $ad^2 = ab \cdot ca$

$- bd \cdot cd$ seyn muss. In II. aus ab, b, $\frac{1}{3}a$, die bd, ad; aus ac, c, $\frac{1}{3}a$, die cf, af. Zur Probe berechnet man noch df entweder aus ad und den Winkeln des $\triangle\, adf$, oder aus af und den Winkeln des $\triangle\, adf$; und es muss seyn $df = bd \cdot \frac{af}{ab} = cf \cdot \frac{ad}{ca}$.

I. $bd = 456{,}50$ S., $dc = 397{,}50$ S., $ad = 1027{,}14$ S.
II. $bd = 318{,}20$ S., $df = 270{,}63$ S., $fc = 265{,}17$ S. $ad = 1059{,}04$ S., $af = 1013{,}52$ S.

66.

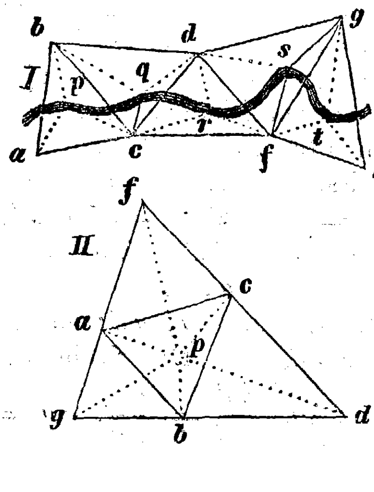
Auf einer Standlinie bc sind die gegenseitigen Entfernungen dreier Puncte gegeben, nämlich $bd = 287$ Saschen, $dc = 345$ Saschen, $bc = 632$ Saschen. Von einem Puncte a werden dahin die Positionswinkel $bad = 26^0 43'$, $dac = 39^0 58'$, $bac = 66^0 41'$ gemessen. Hieraus sollen die Entfernungen des Puncts a, von b, d, c bestimmt werden. Man denke sich an bc die $\angle\, bcf = bad$, $cbf = cad$ gelegt, so ist der Punct f gegeben, und ein um $\triangle\, bcf$ beschriebener Kreis geht durch a (III. 42.). Also liegt a in dem Durchschnitt dieses Kreises durch die Linie fd. Man berechnet also bf, df, cf, dann ist $ab = \frac{bd \cdot cf}{df}$, $ad = \frac{bd \cdot dc}{df}$, $ac = \frac{dc \cdot bf}{df}$.



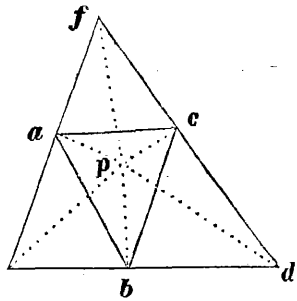
$bf = 309{,}41$ S., $df = 204{,}92$ S. $cf = 442{,}07$ S.
$ab = 619{,}17$ S., $ad = 483{,}21$ S., $ac = 520{,}94$ S.

67.

In der Richtung eines Flusses werden mehrere Puncte a, b, c, d, f, g, h u. s. w., welche vom Ufer aus sichtbar sind, aufs genaueste durch geodätische Triangulation bestimmt. Man befährt das Ufer des Flusses, und misst überall, wo derselbe eine merkliche Krümmung hat, z. B. in p, q, r, s, t nach drei von dortaus



sichtbaren Signalen die Winkel, z. B. in p die Positionswinkel apb, bpc, cpa u. s. w. Hieraus berechnet man die Entfernungen pa, pb, pc, und die Lage des Puncts p in dem Dreieck abc u. s. w. Auf diese Weise machte ich im J. 1809 eine Vermessung des Embachflusses bei Dorpat, von seinem Ausflusse aus dem Würzsee, bis zu seiner Einmündung in den Peipussee, auf einer Strecke von beiläufig 12 Meilen, mit Hülfe des Spiegelsextanten.



Es sey nämlich fg auf pa, gd auf pb, df auf pc senkrecht gezogen, so sind $pd = \frac{bc}{\sin bpc}$, $pf = \frac{ca}{\sin cpa}$, $pg = \frac{ab}{\sin apb}$ gegeben. Ferner sind gegeben die Winkel $dpf = 2R + bca - apb$, $fpg = 2R + cab - bpc$, $gpd = 2R + abc - cpa$. Hiernach sind die $\triangle\, dpf$, fpg, gpd durch zwei Seiten und den Zwischenwinkel gegeben, und es lassen sich daraus die Lothe pc, pa, pb, so wie die Winkel $pfc = pac$, $pdc = pbc$ u. s. w. berechnen. Z. B.

$ab = 912$ Saschen, $bc = 1074$ S., $ca = 1286$ S.

$\angle\, apb = 101^0 32'$, $bpc = 134^0 48'$, $cpa = 123^0 40'$.

Hieraus wird berechnet:

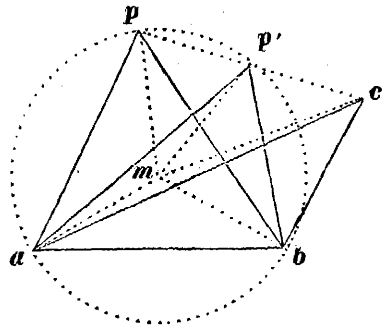
$\angle\, cab = 55^0 23',8$, $abc = 80^0 15',6$, $bca = 44^0 20',6$,
$\angle\, fpg = 100^0 35',8$, $gpd = 136^0 35',6$, $dpf = 122^0 48',6$,
$pg = 930{,}78$ S., $pd = 1513{,}56$ S., $pf = 1545{,}15$ S.,
$pa = 726{,}85$ S., $pb = 424{,}36$ S., $pc = 731{,}89$ S.

Die Probe macht man, indem man in den $\triangle\, apb$, bpc, cpa, aus den drei Seiten wieder die Positionswinkel apb, bpc, cpa berechnet.

Diese Aufgabe heisst die Pothenot'sche Aufgabe. Wenn die Summe der Positionswinkel apb, bpc, $cpa < 4R$ ist, so liegt p über der Ebene abc, und ist die Spitze einer Pyramide, deren Höhe sich bestimmen lässt.

68.

In einem ähnlichen Falle konnte man von p nur nach zwei bekannten Puncten a, b den Positionswinkel $apb = 48^0 43'$ messen. Wegen einbrechender Dunkelheit ging der zweite Positionswinkel bpc verloren. Dagegen maass man am folgenden Morgen den $\angle\, acp = 65^0 21'$. Es waren $ab = 949{,}6$ Saschen, $bc = 459{,}42$ Saschen, $ca = 1382$ Saschen. Welche Lage hatte p gegen a, b, c?



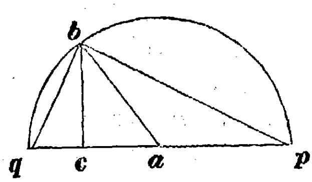
Der Punct p liegt im Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser $r = \frac{ab}{2\sin\, apb}$, $\angle\, amb = 2\,apb$. Aus $\angle\, mab$, cab hat man mac, aus ca, r, mac hat man mc, $\angle\, amc$, mcd. Aus $\angle\, abc$, mba hat man $\angle\, mbc$. Aus bc, r, mbc hat man mc, mcb, bmc. Hierdurch erhält man zur Probe mc zweimal, und es muss seyn $\angle\, amc - bmc = amb$, $\angle\, mcb - mca = bca$. Dann ist $\angle\, acp - mca = mcp$; und man kann aus mc, r, mcp das $\triangle\, mcp$ berechnen. Wegen der beiden Durchschnittspuncte des Kreises erhält man zwei Auflösungen.

$bac = 7^0 46',2$, $abc = 156^0 0',2$, $acb = 16^0 13',6$,
$r = 631{,}84$ S., $mac = 33^0 30',8$, $amc = 124^0 17',7$,
$mca = 22^0 11',5$, $mbc = 114^0 43',2$, $mcb = 38^0 25',1$,
$bmc = 26^0 51',7$, $mc = 923{,}62$ S., $mcp = 43^0 9',5$.

I. $mpc = 89^0 7',8$, $cmp = 47^0 42',7$, $cp = 683{,}35$ S.
$amp = 187^0 59',6$, $ap = 1260{,}6$ Saschen,
$bmp = 74^0 34',4$, $bp = 765{,}54$ Saschen.

II. $mp'c = 90^0 52',2$, $cmp' = 45^0 58',3$, $cp' = 664',16$ S.,
$amp' = 189^0 44',0$, $ap' = 1259{,}13$ Saschen,
$bmp' = 72^0 50',0$, $bp' = 750{,}18$ Saschen.

69.



Für alle Grade des Quadranten rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Seiten rationale Verhältnisse haben. (V. 2.).

Der gegebene Winkel sey a, so ist $p = \frac{1}{2}a$ gegeben. Man suche in den Tafeln $tg\, p = \frac{qb}{pb}$, und drücke dieses Verhältniss durch zwei ganze Zahlen f, g genähert aus, so ist $qb = f$, $pb = g$. Aber $pb^2 = qp \cdot pc = 2r \cdot pc$, $qb^2 = pq \cdot qc = 2r \cdot qc$, $2qb \cdot pb = 2pq \cdot bc = 4r \cdot bc$, also $pb^2 - qb^2 = 4r \cdot ca$, $pb^2 + qb^2 = 4r \cdot ab$. Setzt man also $4r = 1$, so werden die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks abc durch die Zahlen $2f \cdot g = bc$, $g^2 - f^2 = ca$, $g^2 + f^2 = ab$ ausgedrückt.

Z. B. für $a = 1^0$ ist $p = 30'$, $tg\, p = 0{,}00873$, also $f = 1$, $g = 114$, also $bc = 2f \cdot g = 228$, $ca =$

$g^2 - f^2 = 12995$, $ab = g^2 + f^2 = 12997$. Auf diese Art habe ich folgende Tafel berechnet.

Grad.	Sinus.	Cosinus.	Radius.	Grad.	Sinus.	Cosinus.	Radius.
1	228	12995	12997	31	7854	13072	15250
2	114	3248	3250	32	10608	16975	20017
3	76	1443	1445	33	432	665	793
4	58	840	842	34	792	1175	1417
5	46	528	530	35	7770	11096	13546
6	38	360	362	36	1040	1431	1769
7	32	255	257		3	4	5
8	258	1840	1858	37	46288	61425	76913
9	228	1435	1453	38	2564	3280	4162
10	1120	6351	6449	39	1632	2015	2593
11	520	2679	2729	40	88	105	137
12	76	357	365	41	8560	9849	13049
13	280	1209	1241	42	7524	8357	11245
14	798	3200	3298	43	858	920	1258
15	380	1419	1469	44	7920	8201	11401
16	912	3185	3313	45	4059	4060	5741
17	120	391	409				
18	3232	9945	10457				
19	12	35	37				
20	102	280	298				
21	270	704	754				
22	504	1247	1345				
23	1416	3337	3625				
24	940	2109	2309				
25	36	77	85				
26	78	160	178				
27	300	589	661				
28	8	15	17				
29	378	680	778				
30	1680	2911	3361				

Beispiele.

1) Ein Baumeister will seinem Dache eine Neigung von 25° gegen den Horizont geben. Er muss also der Spannung 154 Theile, der Höhe 36 Theile geben, die Dachsparren werden 85 Theile lang seyn müssen.

2) Ein Ingenieur will ein Signal unter einer Richtung von 67° von S nach O abstecken. Er muss also nach S 1416 Fuss, von hier nach O 3337 Fuss messen, die grade Linie zum Signal wird dann 3625 Fuss seyn.

70.

Aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Grösse der Winkel auf eine genäherte Art zu finden.

In einem rechtwinkligen Dreieck abc sey a der kleinere Winkel, die Gegenkathete oder der Sinus $= S$, die Nebenkathete oder der Cosinus $= C$, die Hypotenuse oder der Radius $= r$, der Winkel, dessen Bogen dem Radius gleich ist (V. 59.), in Graden $B = \frac{180}{\pi} = 57{,}29578$, in Minuten $B = \frac{10800}{\pi} = 3437{,}746$. Man bildet den Bruch $k = \frac{3 \cdot S}{C + 2r}$, so ist $a = B \cdot k$ sehr genähert. Will man ihn noch genauer, so addirt man $\frac{1}{180}\, a \cdot k^4 = v$.

Will man Quadrate anwenden, so kann man den Radius entbehren, indem man setzt: $k = \frac{3\,S \cdot C}{3\,C^2 + S^2}$. Die Verbesserung ist dann $\frac{4}{45} a \cdot k^4 = v$.

Beispiel 1. Es sey $S = 16$, $C = 63$, $r = 65$.

Erste Art.		Zweite Art	
$3\,S$	1,68124	$3\,S \cdot C$	3,48058
$C + 2r$	2,28556	$3\,C^2 + S^2$	4,08493
k	9,39568		9,39565
B	3,53627	B	3,53627
a	2,93195	a	2,93192
$\frac{1}{180}$	7,74473	$\frac{4}{45}$	8,94885
k^4	7,58272	k^4	7,58260
v	8,25940	v	9,46337
a	$14^0 14',96$	a	$14^0 14',9$
v	2	v	3
$a =$	$14^0 14',98$	$a =$	$14^0 15',2$

Beispiel 2. $S = 3$, $C = 4$, $r = 5$ giebt $a = 36^0 52',0$.

Beispiel 3. $S = 4059$, $C = 4060$, $r = 5741$ giebt $a = 44^0 59'$.

71.

Aus den Logarithmen zweier Zahlen die Logarithmen ihrer Summe und Differenz trigonometrisch zu bestimmen.

Die grössere Zahl sey a, die kleinere b.

Setzt man $\frac{a}{b} = tg^2\, x$, so ist $a + b = \frac{b}{\cos^2 x} = \frac{a}{\sin^2 x}$.

Setzt man $\frac{b}{a} = tg^2\, x$, so ist $a + b = \frac{a}{\cos^2 x} = \frac{b}{\sin^2 x}$.

Setzt man $\frac{b}{a} = sin^2 x$, so ist $a - b = a \cdot cos^2 x = b \cdot cot^2 x$.

Setzt man $\frac{b}{a} = cos^2 x$, so ist $a - b = a \cdot sin^2 x = b \cdot tg^2 x$.

Beispiel.

a	2,65943	a	2,65943
b	2,59935	b	2,59935
$tg^2\ x$	9,93992	$sin^2\ x$	9,93992
$tg\ x$	9,96996	$sin\ x$	9,96996
$cos\ x$	9,86399	$cos\ x$	9,55564
$cos^2\ x$	9,72797	$cos^2\ x$	9,11128
$a + b =$	2,93146	$a - b =$	1,77071

a	6,09220	a	6,09220
b	5,25878	b	5,25878
$tg^2\ x$	9,16658	$sin^2\ x$	9,16658
$tg\ x$	9,58329	$sin\ x$	9,58329
$cos\ x$	9,97027	$cos\ x$	9,96553
$cos^2\ x$	9,94054	$cos^2\ x$	9,93107
$a + b =$	6,15166	$a - b =$	6,02327

Professor Gauss hat eine Hülfstafel für diese Rechnung entworfen, welche sich auch bei der Köhler'schen Ausgabe der kleinen Lalande'schen Tafeln befindet. Sie enthält in drei Columnen $A = log\ m$, $B = log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$, $C = log\,(1 + m)$, wo $m > 1$ ist. Wenn man nämlich setzt:

$\frac{a}{b} = m$, so ist $a + b = a\left(1 + \frac{1}{m}\right) = b\,(1 + m)$,

$\frac{a}{b} = 1 + m$, so ist $a - b = b \cdot m = \frac{a}{1 + \frac{1}{m}}$,

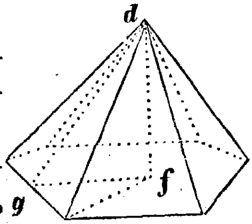
$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{m}$, so ist $a - b = \frac{b}{m} = \frac{a}{1 + m}$.

a	2,65943	a	2,65943	a	6,09220
b	2,59935	b	2,59935	b	5,25878
A	0,06008	B	0,06008	C	0,83342
B	0,27203	A	0,82869	A	0,76450
C	0,33211	C	0,88877	B	0,06892
$a + b =$	2,93146	$a - b =$	1,77066	$a - b =$	6,02328

Eine Anwendung dieser Aufgabe siehe VII. 30.

Sphärische Dreiecke.

72.

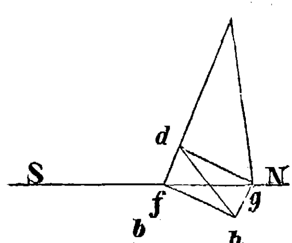


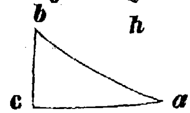
Die Winkel an der Ecke eines Krystalls, in welchem die Anzahl der Endkanten = n ist, zu berechnen.

Man bildet ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abc, in welchem $c = R$, $gfh = a = \frac{2R}{n}$, $gdh = bc$ der halbe gradlinige Winkel der Endkanten gegeben sind. Hieraus wird (VI. 50.) berechnet: $fdh = ab$ der Winkel der Endkanten mit der Axe df, $fdg = ca$ der Winkel der Endflächen mit der Axe df, b der halbe Winkel der Endflächen an der Kante dh.

	Tetraeder.	Hexaeder.	Oktaeder.	Ikosaeder.	Dodekaeder.
Gegeben	$a = 60^0$ $bc = 30^0$	60^0 45^0	45^0 30^0	36^0 30^0	60^0 54^0
Berechnet	$ca = 19^0 28',3$ $ab = 35^0 15',9$ $2b = 70^0 31',7$	$35^0 15',9$ $54^0 44',1$ 90^0	$35^0 15',9$ 45^0 $109^0 28',3$	$52^0 37',4$ $58^0 17',0$ $138^0 11',4$	$52^0 37',4$ $69^0 5',7$ $116^0 33',9$

73.



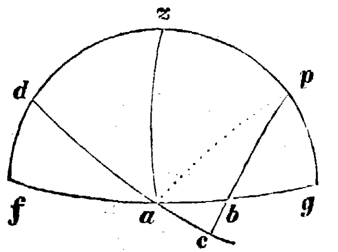


Für die Polhöhe von Mitau $56^0 39'$ *die Azimuthalwinkel einer horizontalen Sonnenuhr zu berechnen.*

Die Mittagslinie sey NS, der nach dem Nordpol gerichtete Zeiger fd, die verticale Ebene dfg auf der horizontalen fgh senkrecht, die dem Aequator parallele Ebene gdh auf fd senkrecht, fh die Schattenlinie. Man bildet ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abc, in welchem $gdh = a$ der Stundenwinkel zu 15^0 auf die Stunde, $dfg = ca$ die Polhöhe, gegeben sind. Hieraus wird (VI. 49.) $gfh = bc$, das Azimuth des Schattens oder der Winkel mit der Mittagslinie berechnet.

Stunden-winkel.		Azimuth.	Stunden-winkel.		Azimuth.	Stunden-winkel.		Azimuth.	Stunden-winkel.		Azimuth.
0.	0	$0^0\ 0'$	1.	30	$19^0\ 5',2$	3.	0	$39^0 52',4$	4.	30	$63^0 37',5$
	15	$3^0\ 8',0$		45	$22^0 23',3$		15	$43^0 36',4$		45	$67^0 53',1$
	30	$6^0 16',6$	2.	0	$25^0 44',8$		30	$47^0 25',8$	5.	0	$72^0 12',9$
	45	$9^0 26',0$		15	$29^0 10',1$		45	$51^0 20',7$		15	$76^0 36',3$
1.	0	$12^0 37',0$		30	$32^0 39',5$	4.	0	$55^0 21',0$		30	$81^0\ 2',6$
	15	$15^0 49',9$		45	$36^0 13',5$		15	$59^0 26',7$		45	$85^0 30',8$
	30	$19^0\ 5',2$	3.	0	$39^0 52',4$		30	$63^0 37',5$	6.	0	$90^0\ 0'$

74.



Für die Polhöhe von Mitau $56^0 39'$ *den Auf- und Untergang der Sonne am* $\frac{15}{27}$. *April und* $\frac{15}{27}$. *November zu berechnen.*

Es sey fag der Horizont, z das Zenith als Pol des Horizonts, so ist $zf = R$ der südliche Meridian, $zg = R$ der nördliche Meridian, a der Ost- oder Westpunct, $za = af = ag = R$, und die Winkel $zfa = zaf = zag = zga = R$. Es sey dac der Aequator, p der Nordpol des Aequators, so ist $pd = pa = pc = ad = R$, die Winkel $= pda = pad = pac = pca = R$, $pg = zd$ die Polhöhe oder geographische Breite des Orts, $pz = df = daf = bac$ die Ergänzung derselben zu R. Die auf- oder untergehende Sonne sey in b, so bildet man ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abc, in welchem der Winkel $a = 33^0 21'$ als Ergänzung der Polhöhe, und die Gegenkathete bc als Abweichung oder Declination der Sonne gegeben sind. Diese ist am $\frac{15}{27}$. April nördlich oder $+ 13^0 52'$, am $\frac{15}{27}$. Nov. südlich oder $- 21^0 10'$. Hieraus berechnet man (VI. 50.) die Hypotenuse ab, welche das Azimuth der auf- oder untergehenden Sonne vom Ost- oder Westpunct ist, und bei nördlicher Declination nach Norden, bei südlicher nach Süden geht; ferner die Nebenkathete ac, welche man zu 15^0 auf die Stunde in Zeit verwandelt, und bei nördlicher Declination zu 6 Stunden addirt, bei südlicher Declination von 6 Stunden abzieht, um die Zeit des Untergangs zu erhalten. Diese von 12 Stunden abgezogen, giebt die Zeit des Aufgangs.

$\frac{15}{27}$. April. $ca = + 22^0 1',9 = 1^h 28',1$. Unterg. $7^h 28',1$,
Aufg. $4^h 31',9$,
$ab = + 25^0 50',8$, Azimuth von N nach S $64^0 9'2$.

$\frac{15}{27}$. Nov. $ca = -36^0 2',5 = 2^h 24',2$. Unterg. $3^h 35',8$.
Aufg. $8^h 24',2$,
$ab = -41^0 3',6$, Azimuth von N nach S $131^0 3',6$.

75.

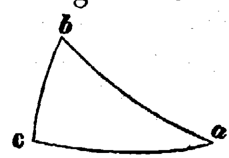
Die Dauer des längsten Tages und das Azimuth der untergehenden Sonne an diesem Tage für die Polhöhen von St. Petersburg, Reval, Dorpat, Riga, Mitau, Berlin zu berechnen.

In der Figur der vorigen Aufgabe berechnet man das rechtwinklige sphärische Dreieck abc, wo a die Ergänzung der Polhöhe, bc die grösste nördliche Declination der Sonne, welche der Schiefe der Ekliptik $23^0 27',7$ gleich ist, gegeben sind, und ab das Azimuth der untergehenden Sonne, ca der Stundenwinkel berechnet werden. Jenes von R abgezogen giebt das von N gezählte Azimuth; der Stundenwinkel zu 6^h addirt, giebt den Untergang der Sonne, also verdoppelt, die Dauer des längsten Tages.

	Polhöhe.	Dauer des längsten Tages.	Azimuth von N nach S.
St. Petersburg...	$59^0 56',4$	$18^h 28',7$	$37^0 21',7$
Reval.........	$59^0 26',5$	$18^h 18',5$	$38^0 27',4$
Dorpat........	$58^0 22',8$	$17^h 58',6$	$40^0 35',4$
Riga..........	$56^0 57',0$	$17^h 34',7$	$43^0\ 6',7$
Mitau.........	$56^0 39',1$	$17^h 30',1$	$43^0 35',7$
Berlin.........	$52^0 31',2$	$16^h 35',8$	$49^0\ 8',0$

76.

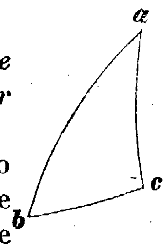
Aus der Länge der Sonne am $\frac{15}{27}$. April und $\frac{15}{27}$. November die grade Aufsteigung und Abweichung derselben zu finden.



Man bildet ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck abc, in welchem $c = R$, ab die Richtung der Sonnenbahn oder Ekliptik, ac die Richtung des Aequators, der Punct a die Frühlingsnachtgleiche oder den Anfangspunct des Widderzeichens, also der Winkel a die Schiefe der Ekliptik $23^0 27',7$, und die Hypotenuse ab die Länge der Sonne bezeichnet. Aus diesen gegebenen Stücken berechnet man (VI. 48.) die Nebenkathete ca, welche die grade Aufsteigung, und die Gegenkathete bc, welche die Abweichung oder Declination der Sonne heisst.

	Länge.	Grade Aufsteigung.	Abweichung.
$\frac{15}{27}$. April	$ab = 36^0 59',7$,	$ca = 34^0 38',9$,	$bc = + 13^0 51',7$,
$\frac{15}{27}$. Nov.	$ab = 245^0 6',2$,	$ca = 243^0 9',8$,	$bc = - 21^0 10',2$.

77.



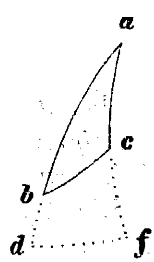
Aus der geographischen Länge und Breite zweier Oerter ihre kürzeste Entfernung auf der Erdkugel zu finden.

Man bildet ein sphärisches Dreieck abc, wo der Punct a den Nordpol der Ekliptik, die Puncte b, c die beiden Oerter, die Seiten ab, ca ihre Meridiane oder ihre Abstände vom Pol bedeuten. Man erhält diese Abstände, wenn man die nördliche geographische Breite von R abzieht, die südliche zu R addirt. Der Winkel a wird aus dem Unterschied der geographischen Längen der Oerter gefunden. Hieraus berechnet man (VI. 67.) die Seite bc in Graden ausgedrückt, wird mit dem mittlern Erdgrad, d. h. mit dem 360sten Theil des Meridians (Aufg. 16.) 364554,765 engl. russ. Fuss $=$ 104,158 Werst multiplicirt. Der Winkel b ist das nördliche Azimuth des Orts c gesehen von b, der Winkel c ist das nördliche Azimuth des Orts b gesehen von c.

	Geogr. Breite.	Ferrolänge.
St. Petersburg	$59^0 56',4$	$47^0 59',0$,
Berlin	$52^0 31',2$	$31^0\ 3',5$.

Hieraus $bc = 11^0 55',42 = 1241,9$ Werst,
$b = 44^0 53',7$, $c = 120^0 58',4$.

78.



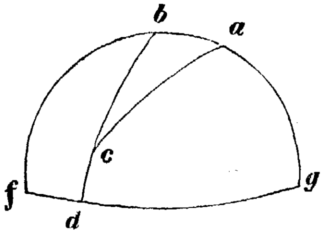
Aus den scheinbaren Höhen zweier Gegenstände und ihrem Winkelabstande den auf den Horizont reducirten Winkel, oder den Unterschied der Azimuthe zu finden.

Man bildet ein sphärisches Dreieck abc, in welchem der Punct a das Zenith, die Puncte b, c die beiden Gegenstände, $ad = af = R$, also df den Bogen des Horizonts bezeichnet, welcher das Maass des Winkels a ist, welcher gesucht wird. Die Seiten ab, ca sind die Verticalkreise der Gegenstände, oder ihre Zenithdistanzen; man findet sie, indem man ihre scheinbaren Höhen bd, cf von R abzieht. Die Seite bc ist der gemessene Winkelabstand. Aus den drei Seiten ab, bc, ca berechnet man (VI. 69.) den Winkel a.

Höhe von $b = bd = 2^0 38'$, Höhe von $c = cf = 14^0 47'$, Winkelabstand $bc = 108^0 55'$.

Hieraus horiz. Abstand $a = df = 110^0 21',0$.

79.

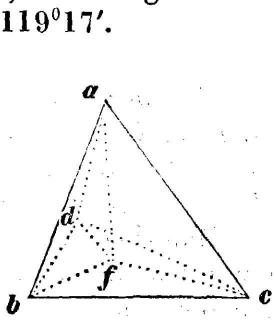


Aus der geographischen Breite eines Orts, aus der Abweichung der Sonne und ihrer scheinbaren Höhe die wahre Zeit und das Azimuth der Sonne zu berechnen.

Man bildet ein sphärisches Dreieck abc, in welchem der Punct a den Nordpol des Aequators, der Punct b das Zenith, also ab den nördlichen Theil des Meridians, der Punct c die Sonne, also die Seite bc die Zenithdistanz der Sonne bezeichnet, welche gefunden wird, indem man die nördliche Abweichung von R abzieht, die südliche zu R addirt. Die Seite ab ist die Ergänzung der geographischen Breite zu R. Hieraus berechnet man den Winkel a, welcher in Zeit verwandelt, den Stundenwinkel, also die wahre Zeit giebt. Ferner den Winkel b, welcher das nördliche Azimuth der Sonne ist.

Am 21. März 1794 maass Bohnenberger in Göttingen, um 4 Uhr 1′29″ Nachm. (geogr. Ortsb. § 112.) die Sonnenhöhe $24^0 37',5$. Die geogr. Breite war $51^0 31',9$, die Abweichung der Sonne $+ 2^0 50',7$. Hieraus berechnet man $a = 52^0 32',9$, also wahre Zeit 3 Uhr 30′11″,6, Voreilung der Uhr 31′17″,4. Das nördliche Azimuth $b = 119^0 17'$.

80.



Aus den gemessenen Kanten einer dreiseitigen Pyramide die Kantenwinkel und Höhen zu finden.

Die Pyramide hat drei Endkanten ab, ac, ad, und drei Grundkanten cd, db, bc. Aus diesen Kanten berechnet man nach VI. 47. die zwölf gradlinigen Winkel, welche die Kanten mit einander bilden. Von diesen sind drei in jeder Ecke und bilden daselbst die Seiten eines sphärischen Dreiecks. Aus diesen berechnet man (VI. 69.) die Winkel des sphärischen Dreiecks, welche die Kantenwinkel dieser Ecke sind. Es sey af senkrecht auf bcd, so ist $af = ab \cdot \sin abc \cdot \sin k$, wenn k der Kantenwinkel an bc ist. Setzt man nun $\angle\, abc + cbd + dba = 2S$, so ist (VI. 62.)

$$sin^2 k = \frac{4 sin\, S \cdot sin\,(S - abc) \cdot sin\,(S - cbd)\, sin\,(S - dba)}{sin^2\, abc \cdot sin^2\, cbd}.$$

Bezeichnet man den Zähler durch $4A^2$, so ist $af = \frac{ab \cdot 2A}{sin\, cbd}$.
Auf dieselbe Art berechnet man auch die übrigen Höhen. Zur Probe berechnet man die Höhe aus den Winkeln an jeder der drei Ecken des Dreiecks, auf welche die Höhe senkrecht gezogen ist.

Gegeben $\begin{cases} ab = 70, & ac = 80, & ad = 64, \\ cd = 56, & db = 68, & bc = 76. \end{cases}$

Hieraus wird berechnet: die gradlinigen Winkel

Ecke a	Ecke b	Ecke c	Ecke d
dab $60^0 47',68$,	dba $55^0 14',28$,	bca $53^0 14',84$,	adb $63^0 58',04$,
bac $60^0 26',90$,	abc $66^0 18',26$,	acd $52^0 37',00$,	bdc $74^0 53',98$,
cad $44^0\ 2',92$,	cbd $45^0 20',95$,	dcb $59^0 45',08$,	cda $83^0 20',08$.

Die Kantenwinkel sind:

an ab $50^0 58',60$, an ac $77^0 15',23$, an ad $76^0 25',16$,
an cd $64^0 46',64$, an db $89^0 53',08$, an bc $63^0 47',28$.

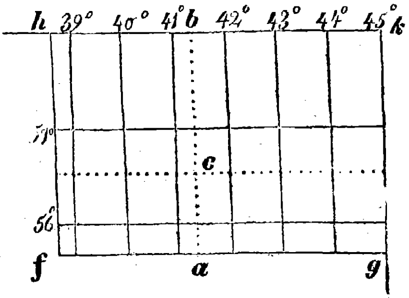
Die Höhen sind:

Höhe von a 57,508; von b 59,393; von c 54,066.
Inhalt $\triangle$ bcd 1838,24; $\triangle$ cda 1779,90; $\triangle$ dab 1955,20.
Höhe von d 43,401.
Inhalt $\triangle$ abc 2435,70.

81.

Das geographische Netz eines Landes zu entwerfen.

Erste Art.



Man stellt die Meridiane ab, fh, gk durch grade Parallellinien, und die Parallelen fg, hk durch grade auf jenen senkrechte Parallellinien dar. Die auf den Meridianen genommenen Breitengrade macht man einander gleich, ebenso die auf den Parallelen genommenen Längengrade. Da nach VI. Aufgabe 15. 16. der Längengrad nahe gleich dem mit dem Cosinus der geographischen Breite multiplicirten Breitengrad ist, so nimmt man einen ungefähr unter dem mittlern Parallel des Landes liegenden Hauptort an, nach dessen geographischer Breite man dieses Verhältniss bestimmt.

Z. B. Kurland erstreckt sich von $55^0 40'$ (Ilgen) bis $57^0 45',6$ (Domesnäss). Hiervon ist die geogr. Breite von Mitau $56^0 39',1$ nahe das Mittel. Der Cosinus derselben $= 0,54973$ oder nahe $= 0,55 = \frac{11}{20}$, giebt also das Verhältniss der Längengrade zu den Breitengraden, so dass ein Längengrad oder 60 Min. in Länge = 33 Min. Breite sind.

Nach der in VI. Aufg. 15. 16. geführten Berechnung ist unter der geographischen Breite von Mitau:
der Breitengrad = 365269,6 russ. Fuss = 104,3627 Werst,
der Längengrad = 201204,9 russ. Fuss = 57,4871 Werst,
und ein Rechteck von 1^0 Breite und Länge beträgt genau $5999\frac{1}{2}$ Quadratwerst.

Der Flächeninhalt der Charte von $6\frac{1}{3}{}^0$ Länge und $2\frac{1}{3}{}^0$ Breite ist also $6\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 5999\frac{1}{2} = 88659,3$ Quadratwerst. Um zu untersuchen, wie weit dieser Inhalt mit dem wahren sphärischen Inhalt übereinstimmt, so wird in VII. 46. 47. bewiesen werden: Wenn $\triangle$ der in Minuten ausgedrückte halbe sphärische Ueberschuss ist, G die Länge eines Breitengrades $= 104,3627$ Werst, so ist der Inhalt $= \frac{6}{\pi} \cdot G^2 \cdot \triangle$. Hier ist $\triangle = f - h$. Wenn der halbe Längenunterschied $3^0 10' = p$, die geogr. Breite des Parallels $fg = a$, des Parallels $hk = b$, so ist (VI. 48.) $cot\, f = sin\, a \cdot tg\, p$, $cot\, h = sin\, b \cdot tg\, p$. Wenn also der halbe Breitenunterschied $\frac{b-a}{2} = 1^0 10' = d$, die mittlere Breite $\frac{a+b}{2} = c = 56^0 50'$, $cot\, f \cdot cot\, h = tg^2\, k$, so ist $tg\, \triangle = 2 tg\, p \cdot sin\, d \cdot cos\, c \cdot cos^2\, k$.

$tg\, p$	8,74292	2	0,30103	$\frac{6}{\pi}$	0,28100
$tg\, p$	8,74292	$tg\, p$	8,74292	G^2	4,03709
$sin\, a$	9,91686	$sin\, d$	8,30879	$\triangle$	0,62614
$sin\, b$	9,92842	$cos\, c$	9,73805		4,94423
$tg^2\, k$	7,33112	$cos^2\, k$	9,99908		also wahrer Inhalt
$tg\, k$	8,66556	$tg\, \triangle$	7,08987		= 87948 Quadratwerst.
$cos\, k$	9,99954	$tg\, 1'$	6,46373		
		$\triangle$	0,62614		

Die Charte giebt also den Inhalt um etwa $\frac{4}{5}$ Procent zu gross.

Die Ausdehnung der Charte von West nach Ost ist $= 6\frac{1}{3} \times 57,4871 = 364,085$ Werst; von Nord nach Süd

$2\frac{1}{3} \times 104{,}3627 = 243{,}513$ Werst; also in der Diagonallinie $gh = fk = 438$ Werst.

Um die wirkliche Ausdehnung auf der Sphäre zu erhalten, so ist (VI. 48.) $\sin\frac{1}{2}hk = \sin p \cdot \cos b$, $\sin\frac{1}{2}fg = \sin p \cdot \cos a$, und (VI. 67.) $A = \sin d \cdot \cos p$, $B = \cos c \cdot \sin p$, $tg\, x = \frac{A}{B}$, $\sin\frac{1}{2}gh = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x}$.

$\sin p$	8,74226
$\cos b$	9,72421
$\sin\frac{1}{2}hk$	8,46647
$\frac{1}{2}hk$	2,00280
$\frac{1}{30}G$	0,54142
	2,54422

$hk = 350{,}12$ Werst.

$\sin p$	8,74226
$\cos a$	9,75128
$\sin\frac{1}{2}fg$	8,49354
$\frac{1}{2}fg$	2,02988
$\frac{1}{30}G$	0,54142
	2,57130

$fg = 372{,}65$ Werst.

$\sin d$	8,30879
$\cos p$	9,99934
A	8,30813
$\sin p$	8,74226
$\cos c$	9,73805
B	8,48031

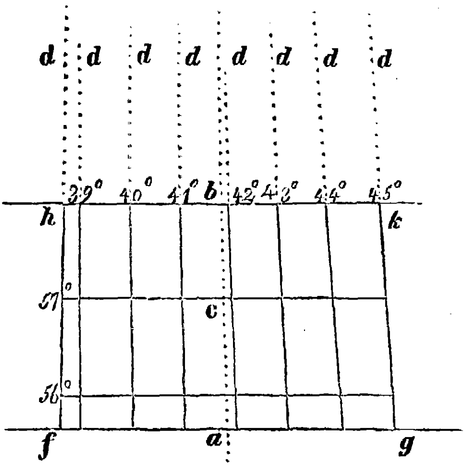
A	8,30813
B	8,48031
$tg\, x$	9,82782
$\sin x$	9,74676
$\cos x$	9,91894
$\sin\frac{1}{2}gh$	8,56137
$\frac{1}{2}gh$	2,09774
$\frac{1}{30}G$	0,54142
	2,63916

$gh = 435{,}67$ Werst.

Die Diagonallinie der Charte stimmt also mehr mit der Wirklichkeit überein, während der nördliche Parallel um 14 Werst zu gross, der südliche um $8\frac{1}{2}$ Werst zu klein ist.

Zweite Art.

Dieses motivirt nun die zweite Art, wo die Meridiane durch grade Linien dargestellt werden, welche nach einem Puncte *d* convergiren, die Parallelen durch grade Parallellinien, welche auf dem mittlern Meridian *ab* senkrecht sind. Der Convergenzpunct *d* wird dadurch bestimmt, dass die Längengrade auf den beiden äussersten Parallelen, im richtigen Verhältniss des Cosinus der geographischen Breite zu den Breitengraden genommen werden.



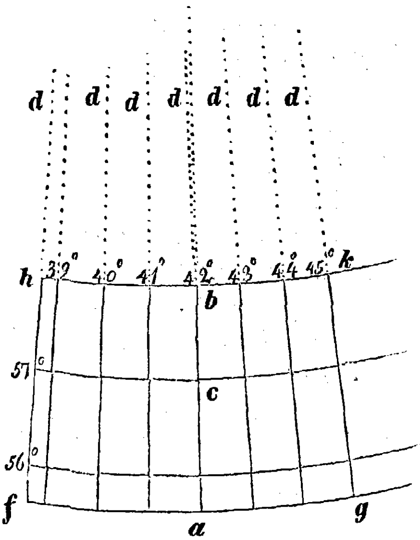
Z. B. Für Kurland ist auf dem südlichsten Parallel fg die Breite $a = 55^0 40'$, $\cos a = 0{,}56400$, auf dem nördlichsten Parallel hk die Breite $b = 58^0 0'$, $\cos b = 0{,}52992$, $ab = 2\frac{1}{3}^0$ Breite, $ud = ab \cdot \frac{\cos a}{\cos a - \cos b} = 38^0{,}607$ Breite, $bd = ab \cdot \frac{\cos b}{\cos a - \cos b} = 36^0{,}274$ Breite. Statt $\cos a - \cos b$ kann man setzen $2 \sin c \cdot \sin d$, wo $c = 56^0 50'$, $d = 1^0 10'$. Die Ausdehnung Kurlands in geographischer Länge von Libau $= 38^0 39'{,}6$ bis Warnowicz $= 45^0 0'$ beträgt nahe $6\frac{1}{3}$ Längengrade. Also ist für die Convergenz der äussern Meridiane gegen den mittlern $tg\ adf = 3\frac{1}{6} \cdot \frac{\cos a}{ad} = 3\frac{1}{6} \cdot \frac{\cos a - \cos b}{ab} = \frac{19}{7} \sin c \cdot \sin d$, daher $adf = 2^0 39'$, und die Convergenz der beiden äussern Meridiane $fdg = 5^0 18'$. Der südliche Parallel der Charte fg hält $6\frac{1}{3} \cdot \cos a \cdot G = 372\frac{3}{4}$ Werst, der nördliche Parallel der Charte hk hält $6\frac{1}{3} \cdot \cos b \cdot G = 350\frac{1}{4}$ Werst, der mittlere Meridian $ab = 2\frac{1}{3} \cdot G = 243{,}513$ Werst, die beiden äussern Meridiane $fh = gk = \frac{ab}{\cos adf} = 243{,}77$ Werst, die Diagonallinie $gh = 435{,}9$ Werst, der Flächeninhalt des Trapeziums $fghk$ der Charte $= 6\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot G^2 \cdot \cos c \cdot \cos d = 88036$ Quadratwerst.

Bei diesem Netze stimmen also die Entfernungen mit der Wirklichkeit nahe überein, und der Inhalt ist nur um $\frac{1}{10}$ Procent zu gross.

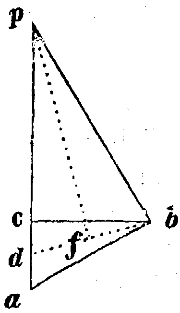
Dritte Art.

Man stellt die Meridiane durch grade Linien vor, welche nach einem Puncte d convergiren, die Parallelen aber durch Kreisbögen, deren Centrum derselbe Convergenzpunct ist, und welche also auf den Meridianen senkrecht sind. Der Convergenzpunct d wird wie in der zweiten Art so bestimmt, dass die Längengrade auf den beiden äussersten Parallelen im richtigen Verhältniss des Cosinus der geographischen Breite sind.

In dem Beispiel von Kurland ist $ab = 2\frac{1}{3}$ Breitengrade $= 2\frac{1}{3} \cdot G = 243{,}51$ Werst $= fh = gk$, $fg = 6\frac{1}{3} \cdot \cos a \cdot G = 372\frac{3}{4}$ Werst, $hk = 6\frac{1}{3} \cdot \cos b \cdot G = 350\frac{1}{4}$ Werst, $ad = \frac{1}{2} ab \cdot \dfrac{\cos a}{\sin c \cdot \sin d} = 38{,}607$ BGr. $bd = \frac{1}{2} ab \cdot \dfrac{\cos b}{\sin c \cdot \sin d} = 36{,}274$ BGr. Das Verhältniss des Halbmessers zum Bogen ist für jeden Längengrad $= \dfrac{ab}{2 \sin c \cdot \sin d} =$ 68,453, der Convergenzwinkel für einen Längengrad also $= \dfrac{360 \cdot \sin c \cdot \sin d}{\pi \cdot ab} = 0^0{,}837$, also für die beiden äussern Meridiane $fdg = 6\frac{1}{3} \cdot 0^0{,}837 = 5^0{,}301 = 5^0 18'$. Hieraus folgt der Flächeninhalt des Sectorstücks $fghk$ der Charte ganz wie bei der zweiten Art $= 6\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot G^2 \cdot \cos c \cdot \cos d = 88036$ Quadratwerst.



82.



Aus der geographischen Länge und Breite zweier nahe liegenden Orte den Abstand des einen vom Meridian und Perpendikel des andern, so wie ihre gegenseitige Entfernung, auf der Erdkugel zu berechnen.

Der Pol sey p, die Meridiane pa, pb, die geogr. Breiten $a = 90^0 - pa$, $b = 90^0 - pb$, $c = 90^0 - pc$. Man ziehe den grössten Kreis bc senkrecht auf den Meridian pa, so heisst bc der Abstand des Orts b vom Meridian von a, und ac der Abstand des Orts a vom Perpendikel von b. Man nehme $pd = pb$, ziehe pf senkrecht auf bd, und setze den Längenunterschied $apb = p$, $ac = x$, $bc = y$, $cd = z$, also die geogr. Breite $c = b + z$, $x = b - a + z$. Das sphärische rechtwinklige Dreieck pbc giebt (VI. 48.) $\sin y = \sin p \cdot \cos b$. Das sphärische rechtwinklige Dreieck bcd giebt (VI. 50.) $\sin z = tg\, y \cdot \cot pdf$. Das sphärische rechtwinklige Dreieck pdf giebt (VI. 48.) $cot\ pdf = sin\ b \cdot tg\ \frac{1}{2}p$. Hieraus folgt $sin\ z = tg\ y \cdot sin\ b \cdot tg\ \frac{1}{2}p$ $= \frac{sin\ y \cdot sin\ b \cdot tg\ \frac{1}{2}p}{cos\ y}$, also $sin\ z = sin\ 2b \cdot sin^2\ \frac{1}{2}p \cdot sec\ y$.

Da p ein kleiner Winkel seyn soll, so findet man $sin\ p$ und $sin\ \frac{1}{2}p$ entweder auf die in VI. 7. angezeigte Art, oder aus der Formel in VI. 72. Die Umkehrung dieser Formel lässt aus den berechneten Werthen von $sin\ y$, $sin\ z$, die Winkel y, z finden durch die Gleichung

$$y = sin\ y + \tfrac{1}{6} sin^3\ y + \tfrac{3}{40} sin^5\ y.$$

Da z gewöhnlich sehr klein ist, so nimmt man $z = \frac{1}{4}p^2 \cdot sin\ 2b \cdot sec\ y$. Wenn p in Minuten ausgedrückt ist, so muss man den Theil rechts mit $\frac{\pi}{10800} = sin\ 1'$ multipliciren, um z in Minuten zu haben.

Die Grösse des Breitengrades in irgend einem Längenmaass sey $= G$. Wenn x, y in Minuten gefunden worden sind, so muss man sie mit $\frac{1}{60}G$ multipliciren, um sie in demselben Längenmaass zu haben. Setzt man $ab = r$, und $pab = u$, so ist $sin\ r \cdot sin\ u = sin\ y$, und $sin\ r \cdot cos\ u = sin\ x \cdot cos\ y$.

Beispiel. Die geogr. Längen und Breiten der Grenzpuncte von Kurland sind in folgendem Verzeichniss enthalten:

	geogr. Länge.	geogr. Breite.		geogr. Länge.	geogr. Breite.
Libau	38°39',6	56°30',4	Ilgen	44°25'	55°40'
Felixberg	39° 0	57° 0	Egipten	43°57'	55°45'
Windau	39°12',5	57°23',9	Subbat	43°33',9	56° 0',3
Domesnäss	40°15',2	57°45',6	Ellern	43°12'	56°10'
Angern	40°55'	57°15'	Schönberg	42°17',6	56°22',9
Peterhof	41°35'	56°48'	Sessau	41°22',9	56°25',4
Brambergshof	42° 2'	56°52'	Grenzhof	40°58',9	56°24',4
Friedrichsstadt	42°43',8	56°37',1	Essern	40° 4',8	56°25',6
Jakobstadt	43°31',2	56°30',1	Gramsden	39°15',1	56°22',0
Düneburg	44° 9',7	55°53',2	Polangen	38°42',9	55°55',1
Warnowicz	45° 0	55°50'	Mitau	41°22',7	56°39',1

Siehe die hier beigelegte lithographirte Skizze.

Für Mitau ist $G = 104{,}3627$ Werst, $\frac{1}{60}G = m$.

Mitau — Polangen.

$p = 2^0 39',8. \qquad b - a = - 44',0.$

sin p	8,66715	*sin 2b*	9,96766	*sin x*	— 8,08979
cos b	9,74848	*p*	2,20358	*cos y*	9,99985
sin y	8,41563	*p*	2,20358	*sin r cos u*	— 8,08964
y	1,95196	*sec y*	0,00015	*sin r sin u*	— 8,41563
m	0,24039	$\frac{1}{4}$	9,39794	*tg u*	0,32599
y	2,19235	*sin* 1′	6,46373	*sin u*	— 9,95631
		z	0,23664	*cos u*	— 9,63032
$x =$ 73,531 Werst		*z*	1,724	*sin r*	8,45932
$y =$ 155,72 »		*b—a*	— 44,0	*r*	1,99566
$r =$ 172,21 »		*x*	— 42,274	*m*	0,24039
$u =$ 224°43′,76		*x*	1,62608	*r*	2,23605
		m	0,24039		
		x	1,86647		

Mitau — Libau.

$p = 2^0 43',1. \qquad b - a = - 8',7.$

sin p	8,67601	*sin 2b*	9,96398	*sin x*	— 7,30376
cos b	9,74181	*p*	2,21245	*cos y*	9,99985
sin y	8,41782	*p*	2,21245	*sin r cos u*	— 7,30361
y	1,95414	*sec y*	0,00015	*sin r sin u*	— 8,41782
m	0,24039	$\frac{1}{4}$	9,39794	*tg u*	1,11421
y	2,19453	*sin* 1′	5,86167	*sin u*	— 9,99872
		z	0,25070	*cos u*	— 8,88451
$x =$ 12,034 Werst		*z*	1,7812	*sin r*	8,41910
$y =$ 156,51 »		*b—a*	— 8,7	*r*	1,95542
$r =$ 156,97 »		*x*	— 6,9188	*m*	0,24039
$u =$ 265°36′,24		*x*	0,84003	*r*	2,19581
		m	0,24039		
		x	1,08042		

Recapitulation der wichtigsten Sätze aus der Trigonometrie.

Ebene Trigonometrie.

10. $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a.$

11. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$

12. $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$

13. $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$

Rechtwinklige Dreiecke. $c = 90^0$.

15. $bc = ab \cdot \sin a, \quad ca = ab \cdot \cos a.$

16. $bc = ca \cdot tg\, a, \quad ca = bc \cdot \cot a.$

Dreiecke überhaupt.

25. Gegeben eine Seite und die Winkel: bc, a, b, c.

$$ca = bc \cdot \frac{\sin b}{\sin a}, \quad ab = bc \cdot \frac{\sin c}{\sin a}, \quad D = \frac{bc}{\sin a},$$

$$F = \tfrac{1}{2} bc^2 \cdot \frac{\sin b \cdot \sin c}{\sin^2 a}.$$

26. Gegeben zwei Seiten und ein Gegenwinkel: ca, ab, b.

$$\sin c = \frac{ab \cdot \sin b}{ca}, \quad bc = \frac{ca \cdot \sin a}{\sin b} = \frac{ab \cdot \sin a}{\sin c}.$$

39. Gegeben zwei Seiten und die Zwischenwinkel: ca, ab, a.

$$(ab + ca) \cdot \sin \tfrac{1}{2}a = A, \quad (ab - ca) \cos \tfrac{1}{2}a = B, \quad \frac{A}{B} = tg\, x,$$

$$bc = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x}, \quad b = x - \tfrac{1}{2}a, \quad c = 180^0 - \tfrac{1}{2}a - x.$$

27. $\ldots\ldots F = \tfrac{1}{2} ca \cdot ab \cdot \sin a.$

44. Gegeben die drei Seiten: bc, ca, ab.

$$bc + ca + ab = 2S, \quad S = B^2, \quad (S - bc)(S - ca)(S - ab) = A^2,$$

$$\frac{B^2}{A^2} = E^2, \quad \cot \tfrac{1}{2}a = E \cdot (S - bc), \quad \cot \tfrac{1}{2}b = E \cdot (S - ca),$$

$$\cot \tfrac{1}{2}c = E \cdot (S - ab), \quad F = A \cdot B, \quad D = \frac{bc \cdot ca \cdot ab}{2A \cdot B}.$$

Sphärische Trigonometrie.

47. Grundgleichungen der rechtwinkligen Dreiecke. $c = 90^0$.

$\sin ab \cdot \sin a = \sin bc$, $\sin ab \cdot \cos a = \cos bc \cdot \sin ca$,
$\sin ab \cdot \sin b = \sin ca$, $\sin ab \cdot \cos b = \cos ca \cdot \sin bc$,
$\cos ab = \cos bc \cdot \cos ca$.

Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke. $c = 90^0$.

48. Gegeben die Hypotenuse und ein Winkel: ab, a.

$\sin ab \cdot \sin a = \sin bc$, $\operatorname{tg} ab \cdot \cos a = \operatorname{tg} ca$, $\cos ab \cdot \operatorname{tg} a = \cot b$.

49. Gegeben ein Winkel und die Nebenkathete: ca, a.

$$\sin ca \cdot \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} bc,\quad \frac{\operatorname{tg} ca}{\cos a} = \operatorname{tg} ab,\quad \cos ca \cdot \sin a = \cos b.$$

50. Gegeben ein Winkel und die Gegenkathete: bc, a.

$$\frac{\operatorname{tg} bc}{\operatorname{tg} a} = \sin ca,\quad \frac{\sin bc}{\sin a} = \sin ab,\quad \frac{\cos a}{\cos bc} = \sin b.$$

51. Gegeben die Hypotenuse und eine Kathete: ab, ca.

$$\frac{\cos ab}{\cos ca} = \cos bc,\quad \frac{\sin ca}{\sin ab} = \sin b,\quad \frac{\operatorname{tg} ca}{\operatorname{tg} ab} = \cos a.$$

52. Gegeben die beiden Katheten: bc, ca.

$$\cos bc \cdot \cos ca = \cos ab,\quad \frac{\operatorname{tg} bc}{\sin ca} = \operatorname{tg} a,\quad \frac{\operatorname{tg} ca}{\sin bc} = \operatorname{tg} b.$$

53. Gegeben die beiden Winkel: a, b.

$$\cot a \cdot \cot b = \cos ab,\quad \frac{\cos a}{\sin b} = \cos bc,\quad \frac{\cos b}{\sin a} = \cos ca.$$

Auflösung der Dreiecke überhaupt.

65. Gegeben zwei Seiten und ein Gegenwinkel: ab, bc, a.

$\sin ab \cdot \sin a = \sin x$, $\operatorname{tg} ab \cdot \cos a = \operatorname{tg} y$, $\cos ab \cdot \operatorname{tg} a = \cot z$.

$$\sin c = \frac{\sin x}{\sin bc},\quad \cos(ca - y) = \frac{\cos bc}{\cos x},\quad \cos(b - z) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} bc}.$$

66. Gegeben zwei Winkel und eine Gegenseite: a, c, bc.

$\sin bc \cdot \sin c = \sin x$, $\operatorname{tg} bc \cdot \cos c = \operatorname{tg} y$, $\cos bc \cdot \operatorname{tg} c = \cot z$.

$$\sin ab = \frac{\sin x}{\sin a},\quad \operatorname{tg}(ca - y) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a},\quad \sin(b - z) = \frac{\cos a}{\cos x}.$$

67. Gegeben zwei Seiten und der Zwischenwinkel: ca, ab, a.

$$ca + ab = 2S, \quad ca - ab = 2d, \quad \sin d \cdot \cos \tfrac{1}{2}a = A,$$
$$\sin S \cdot \sin \tfrac{1}{2}a = B.$$
$$\frac{A}{B} = tg\, x, \quad \sin \tfrac{1}{2}bc = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x}, \quad \cos d \cdot \cos \tfrac{1}{2}a = C,$$
$$\cos S \cdot \sin \tfrac{1}{2}a = D, \quad \frac{C}{D} = tg\, y, \quad \cos \tfrac{1}{2}bc = \frac{C}{\sin y} = \frac{D}{\cos y},$$
$$b = y + x, \quad c = y - x.$$

68. Gegeben zwei Winkel und die Zwischenseite: b, c, bc.

$$b + c = 2S, \quad b - c = 2d, \quad \sin d \cdot \sin \tfrac{1}{2}bc = A,$$
$$\sin S \cdot \cos \tfrac{1}{2}bc = B,$$
$$\frac{A}{B} = tg\, x, \quad \cos \tfrac{1}{2}a = \frac{A}{\sin x} = \frac{B}{\cos x}, \quad \cos d \cdot \sin \tfrac{1}{2}bc = C,$$
$$\cos S \cdot \cos \tfrac{1}{2}bc = D, \quad \frac{C}{D} = tg\, y, \quad \sin \tfrac{1}{2}a = \frac{C}{\sin y} = \frac{D}{\cos y},$$
$$ca = y + x, \quad ab = y - x.$$

69. Gegeben die drei Seiten: bc, ca, ab.

$$bc + ca + ab = 2S, \quad \sin S = B^2, \quad \sin (S - bc) \cdot \sin (S - ca) \cdot$$
$$\sin (S - ab) = A^2.$$
$$\frac{B^2}{A^2} = E^2, \quad \cot \tfrac{1}{2}a = E \cdot \sin (S - bc), \quad \cot \tfrac{1}{2}b = E \cdot \sin (S - ca),$$
$$\cot \tfrac{1}{2}c = E \cdot \sin (S - ab).$$

70. Gegeben die drei Winkel: a, b, c.

$$a + b + c = 2W, \quad -\cos W = B^2,$$
$$\cos (W - a) \cdot \cos (W - b) \cdot \cos (W - c) = A^2.$$
$$\frac{A^2}{B^2} = E^2, \quad tg\, \tfrac{1}{2}bc = E \cdot \cos (W - a), \quad tg\, \tfrac{1}{2}ca = E \cdot \cos (W - b),$$
$$tg\, \tfrac{1}{2}ab = E \cdot \cos (W - c).$$

71. Probegleichungen.

$$bc + ca + ab = 2S, \quad a + b + c = 2W,$$
$$\sin bc \cdot \sin ca \cdot \sin ab = M, \quad \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = N,$$
$$4 \sin S \cdot \sin (S - bc) \cdot \sin (S - ca) \cdot \sin (S - ab) = A^2,$$
$$-4 \cos W \cdot \cos (W - a) \cdot \cos (W - b) \cdot \cos (W - c) = B^2.$$

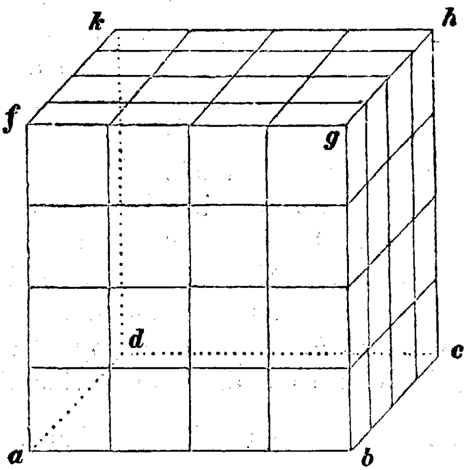
Dann ist: $\dfrac{A \cdot B}{M \cdot N} = 1, \quad \dfrac{A^3}{M} = \dfrac{B^3}{N} = M \cdot N, \quad A = \dfrac{B^2}{N}, \quad B = \dfrac{A^2}{M}.$

Siebenter Cursus.

Stereometrie.

1.

Der körperliche Inhalt eines Cubus ist die Cubikzahl von der in der Kante des Cubus enthaltenen Maasszahl.

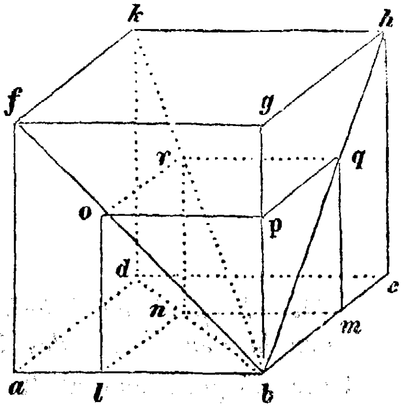


Unter körperlichem Inhalt versteht man diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel mal der Cubus, dessen Seite ein angenommenes Maass ist, in einem Körper enthalten sey. Es wird aber der Cubus *abcdfghk* (IV. 45.) von sechs gleichen Quadraten begrenzt, welche zu dreien in jeder Ecke rechtwinklig zusammentreffen. Es sey das angenommene Maass in jeder Ecke L-mal enthalten, so ist das Quadrat des Maasses in der Grundfläche des Cubus *abcd* oder *fghk*, $L \cdot L$ oder L^2 mal enthalten (III. 1.). Theilt man die Kanten des Cubus in ihre L gleichen Theile, so erhält man in dem ganzen Cubus L Schichten, welche das angenommene Maass zur Höhe haben. In jeder Schicht ist der Cubus des Maasses L^2 enthalten, also in dem ganzen Cubus $L \cdot L \cdot L$ oder $L^2 \cdot L$ oder L^3 mal enthalten. Also ist der körperliche Inhalt des Cubus $K = L^3$, und die Oberfläche $F = 6 \cdot L^2$.

Beispiel.

Der Fuss hat 12 Zoll, der Cubikfuss 1728 Cubikzoll.
Der Faden hat 6 Fuss, der Cubikfaden 216 Cubikfuss.
Die Saschen hat 7 Fuss, die Cubiksaschen 343 Cubikfuss.
Die Saschen hat 3 Arschin, die Cubiksaschen 27 Cubikarschin.
Die Kante hat 16 Zoll, der Cubus der Kante 4096 Cubikzoll.
Die Kante hat 11 Fuss 7 Zoll oder 139 Zoll, der Cubus hat 2685619 Cubikzoll oder 1554 Cubikfuss 307 Cubikzoll.

2.



Alle Cuben sind einander ähnlich, ihre körperlichen Räume verhalten sich wie die Cubikzahlen der Kanten oder wie die Quadratwurzeln aus den Cubikzahlen der Oberflächen.

Wenn man die Cuben *abcdfghk* und *lbmnopqr* in einer Ecke *b* und an die Kanten *ab*, *bg* so zusammenstellt, dass die Endfläche *abgf* mit *lbpo* zusammenfällt, so fallen (IV. 14.) auch die Endfläche *abcd* mit *lbmn*, und *bcgh* mit *bmpq* zusammen. Von den übrigen Endflächen sind je zwei auf einer Kante senkrecht, also (IV. 26.) einander parallel, nämlich *lnor* $\approx$ *adfk*, *opqr* $\approx$ *fghk*, *mnqr* $\approx$ *cdhk*. Die Diagonallinien *bn*, *bd* fallen zusammen, also (IV. 13. 14.) fallen auch die Diagonalflächen *bnr*, *bdk* zusammen. Also (IV. 56.) sind die Cuben aus drei ähnlichen vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt, nämlich *blnor* $\sim$ *badfk*, *bopqr* $\sim$ *bfghk*, *bmnqr* $\sim$ *bcdhk*, also (IV. 57.) sind die Cuben einander ähnlich, also ihre gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Axen proportionirt $\frac{bl}{ba} = \frac{bo}{bf} = \frac{br}{bk}$, ihre Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate derselben $\frac{F}{F'} = \frac{L^2}{L'^2}$, ihre körperlichen Räume verhalten sich wie die Cuben derselben $\frac{K}{K'} = \frac{L^3}{L'^3}$, also $\frac{K^2}{K'^2} = \frac{F^3}{F'^3}$, oder $\frac{K}{K'} = \frac{F^{\frac{3}{2}}}{F'^{\frac{3}{2}}}$.

Beispiele.

1) Die Kanten zweier Cuben sind 15 Fuss und 15 Fuss $7\frac{1}{2}$ Zoll; wie verhalten sich ihre Oberflächen und körperlichen Räume?

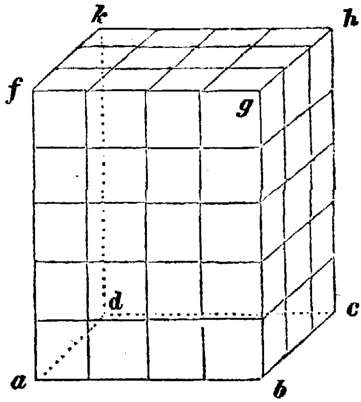
	180	2,25527
	$187\frac{1}{2}$	2,27300
1,0417		0,01773
1,0851		0,03546
1,1303		0,05319

Die Oberflächen verhalten sich also wie 100 : $108\frac{1}{2}$, die körperlichen Räume wie 100 : 113.

2) Wie gross ist der körperliche Inhalt eines Cubus, dessen Oberfläche 3500 □Fuss ist?

F 3,54407		L^2 2,76592	
6 0,77815		L 1,38296	
L^2 2,76592		L^3 4,14888	$=$ 14089 Cubikfuss.

3.



Der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, ist gleich dem Product der drei in jeder Ecke zusammentreffenden Endkanten.

Das Maass, mit welchem die Kanten gemessen werden, sey in af L-mal, in ab B-mal, in ad D-mal enthalten. Folglich ist in der Grundfläche $abcd$ das Quadrat des Maasses $B \cdot D$-mal enthalten. Das ganze Parallelepipedum enthält L Schichten, welche das Rechteck $abcd = B \cdot D$ zur Grundfläche, und das Maass zur Höhe haben, also ist der Cubus des Maasses in dem ganzen Parallelepipedum $L \cdot B \cdot D$-mal enthalten, d. h. der körperliche Inhalt $K = L \cdot B \cdot D$.

Der körperliche Inhalt ist also gleich dem Product der Höhe L mit der Grundfläche $B \cdot D$, und bleibt unverändert, wenn bei gleicher Höhe ein andres Rechteck von gleichem Flächeninhalt zur Grundfläche angenommen wird.

Die Seitenfläche ist $A = 2L \cdot B + 2L \cdot D$,
die ganze Oberfläche $F = 2L \cdot B + 2L \cdot D + 2B \cdot D$.

Die Diagonallinien sind $ag = \sqrt{L^2 + B^2}$, $ak = \sqrt{L^2 + D^2}$, $ac = \sqrt{B^2 + D^2}$, die Axe $ah = \sqrt{L^2 + B^2 + D^2}$.

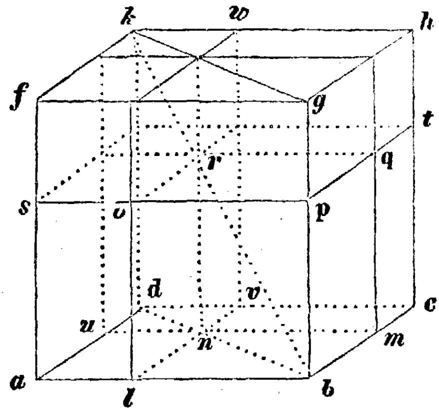
Beispiele.

1) Wenn $L = 18$ Fuss, $B = 5$ Fuss, $D = 12$ Fuss, so ist $F = 1332$ □Fuss, $K = 3240$ Cubikfuss, die Diagonallinien sind $\sqrt{549} = 23{,}43$ Fuss, $\sqrt{468} = 21{,}63$ Fuss, $\sqrt{369} = 19{,}21$ Fuss, die Axe $\sqrt{693} = 26{,}325$ Fuss.

2) Es sey $L = 18'\ 7''$, $B = 15'\ 9''$, $D = 12'\ 8''$.

L	223	2,34830
B	189	2,27646
D	152	2,18184
	1728	6,76246
K		3,56906 $=$ 3707,3 Cubikfuss.

4.



Der Unterschied der körperlichen Räume zweier Cuben ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Höhe der Unterschied der Kanten der Cuben ist, und dessen Grundfläche aus dem Quadrat der grössern Kante, dem Quadrat der kleinern Kante und dem Product beider Kanten besteht.

Es sey $ab = A$ die grössere Kante, $lb = B$ die kleinere Kante. Nimmt man den kleinern Cubus vom grössern weg, so besteht das Uebrige aus drei Theilen, nämlich aus einem senkrechten Parallelepipedum, dessen Grundfläche $adkf = A^2$, dessen Höhe $al = A - B$ ist; aus einem senkrechten Parallelepipedum, dessen Grundfläche $opqr = B^2$, dessen Höhe $pg = A - B$ ist; und aus einem senkrechten Parallelepipedum, dessen Grundfläche $cvwh = A \cdot B$, und dessen Höhe $cm = A - B$ ist. Also $$A^3 - B^3 = (A - B)\ (A^2 + A \cdot B + B^2)$$

Beispiel. Es sey $A = 15\frac{5}{8}$ Fuss, $B = 15$ Fuss, $A - B = \frac{5}{8}$ Fuss.

A^3	3814,697	A^2	244,1406		703,5156
B^3	3375	$A \cdot B$	234,375	$A - B$	$\frac{5}{8}$
$A^3 - B^3$	439,697	B^2	225	Prod.	439,697
			703,5156		

5.

Der körperliche Inhalt eines Cubus, dessen Kante aus zwei Theilen besteht, ist gleich der Summe der Cuben der beiden Theile, nebst dem dreifachen Parallelepipedum oder Product der Kante des ganzen Cubus mit ihren beiden Theilen.

In der Figur des vorigen Satzes sey $ab = L$, und die beiden Theile $bl = A$, $al = B$. Nimmt man von dem über ab beschriebenen Cubus die über bl, al beschriebenen Cuben weg, so sind die übrig bleibenden Stücke: ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche $alos = A \cdot B$, dessen Höhe $ad = L$ ist; ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche gpq

$= A \cdot B$, dessen Höhe $fg = L$ ist; ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche $cmnv = A \cdot B$, dessen Höhe $ch = L$ ist. Also ist $L^3 = A^3 + B^3 + 3L \cdot A \cdot B$,
oder $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2 \cdot B + 3A \cdot B^2 + B^3$.

Beispiel. Es sey $L = 15\frac{5}{8}$ Fuss, $A = 15$ Fuss, $B = \frac{5}{8}$ Fuss.

$$\begin{array}{rr} A^3 & 3375 \\ B^3 & 0{,}2441 \\ 3 \cdot L \cdot A \cdot B & 439{,}4531 \\ \hline L^3 & 3814{,}6972 \end{array}$$

6.

Aus dem Inhalte eines Cubus wird die Kante oder cubische Seite geometrisch durch Bestimmung zweier mittlern Proportionallinien, arithmetisch durch Ausziehung der Cubikwurzel gefunden.

Das Maass sey $= M$, der Inhalt des Cubus $= K$, die Kante desselben $= L$, so ist (VII. 1.) $L^3 = K \cdot M^3$, wo K eine Zahl bedeutet. Nimmt man zwischen den Linien M und $K \cdot M$ zwei mittlere Proportionallinien an, so ist die erste von ihnen $= L$. Denn wenn $M : L = L : B$, und $L : B = B : K \cdot M$ ist, so ist $L^2 = B \cdot M$, und $B^2 = K \cdot L \cdot M$. Aus der ersten folgt $\frac{L^4}{L} = \frac{B^2}{L} \cdot M^2$, aus der zweiten $\frac{B^2}{L} = K \cdot M$, also $L^3 = K \cdot M^3$.

Um die Kante L arithmetisch durch Cubikwurzelausziehung zu finden, wähle man für L einen genäherten Werth A, und bestimmt die Ergänzung B nach VII. 5., $= \frac{K \cdot M^3 - A^3}{3A^2}$.

Beispiele.

1) Es sey $K = 12000$ Cubikfuss, $M = 1$ Fuss, erster genäherter Werth $A = 22$ Fuss, $A^3 = 10648$ Cubikfuss, die Ergänzung $B = \frac{12000 - 10648}{1452} = 0{,}8$.

Zweiter genäherter Werth $A = 22{,}8$, $A^2 = 519{,}84$, $A^3 = 11852{,}352$, $B = \frac{147{,}648}{1559{,}52} = 0{,}09$.

Dritter genäherter Werth $A = 22{,}89$, $A^2 = 523{,}9521$, $A^3 = 11993{,}263569$, $B = \frac{6{,}736431}{1571{,}8563} = 0{,}004285$, also $L = 22{,}894285$ Fuss.

2) Die Kante eines Cubus ist $18\frac{3}{4}$ Zoll, wie gross ist die Kante eines Cubus von doppeltem und dreifachem Inhalt?

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992 \qquad \sqrt[3]{3} = 1{,}44225,$$

die Kante des doppelten Cubus $18\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{2} = 23{,}623$ Zoll,
die Kante des dreifachen Cubus $18\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{3} = 27{,}042$ Zoll.

7.

Den Inhalt der Wand eines senkrechten Parallelepipedums zu berechnen.

Es seyen an dem Parallelepipedum von Aussen gemessen, die Höhe $= L$, die Kanten der Grundfläche B und D, die Dicke der Wand $= w$, so ist der Inhalt der Wand

$$= L \cdot B \cdot D - L\,(B - 2w)\,(D - 2w)$$
$$= 2L \cdot B \cdot w + 2L \cdot D \cdot w - 4L \cdot w^2 = A \cdot w - 4L \cdot w^2,$$

wo A die äussere Seitenfläche bedeutet.

Der Inhalt der Wand und der beiden Böden ist

$$= L \cdot B \cdot D - (L - 2w)\,(B - 2w)\,(D - 2w)$$
$$= (2L \cdot B + 2L \cdot D + 2B \cdot D)\,w - 4(L + B + D)\,w^2 + 8w^3$$
$$= F \cdot w - 4(L + B + D)\,w^2 + 8w^3,$$

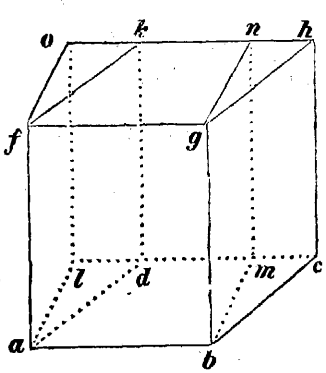
wo F die äussere Oberfläche bedeutet.

Beispiele.

1) Es sey $L = 10$ Fuss, $B = 30$ Fuss, $D = 20$ Fuss, $w = 1\frac{1}{2}$ Fuss, so ist die Wand $= 1000 \cdot 1\frac{1}{2} - 40 \cdot 2\frac{1}{4} = 1410$ Cubikfuss.

2) Es sey an einer Kiste $L = 3$ Fuss, $B = 7$ Fuss, $D = 5$ Fuss, $w = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Fuss, so ist die ganze Oberfläche $F = 142$ □Fuss, also der Inhalt der Wand und der Böden $= 142 \cdot \frac{1}{8} - 60 \cdot \frac{1}{64} + 8 \cdot \frac{1}{512} = 16\frac{53}{64}$ Cubikfuss.

8.



Der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Grundfläche ein schiefes Parallelogramm ist, ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche $abcd$ sey ein schiefes Parallelogramm, die Endkanten $af = bg = ch = dk = L$ auf der Grundfläche senkrecht. Auf die Kante ab stelle man die Ebenen $alof$, $bmng$ senkrecht, so sind sie (IV. 26.) parallel, und die mit *ab* parallelen Kanten *cd, fg, hk* sind (IV. 16.) ebenfalls auf diesen Ebenen senkrecht, also sind (IV. 13.) die Ebenen *abcd, abfg, cdhk* oder *lmno, fghk* oder *fgno* ebenfalls auf jenen Ebenen *alof, bmng* senkrecht. Also ist der körperliche Inhalt des Parallelepipedums *abmlfgno* (VII. 3.) $= L \cdot ab \cdot al$.

Die beiden dreiseitigen Prismen *bcmghn, adlfko* haben congruente Endflächen: *bcm* $=$ *adl*, *ghn* $=$ *fko*, *bchg* $=$ *adkf*, *chnm* $=$ *ldko*, *bmng* $=$ *alof*, und ihre Ecken (IV. 8.) *l, m, n, o* sind rechtwinklig. Also können diese Prismen in diesen Ecken so zusammengestellt werden, dass die Endkanten zusammenfallen, nämlich *mn* mit *lo*, *mc* mit *ld*, *mb* mit *la*. Da nun auch die Endflächen congruent sind, so werden bei dieser Zusammenstellung alle gleichnamigen Endflächen der Prismen zusammenfallen. Also sind diese Prismen vollkommen identisch. Also haben sie auch gleichen körperlichen Inhalt. Aber *abcdfghk* $=$ *abmlfgno* $-$ *adlfko* $+$ *bcmghn*. Also *abcdfghk* $=$ *abmlfgno*. Also der körperliche Inhalt des Parallelepipedums *abcdfghk* oder $K = L \cdot ab \cdot al$.

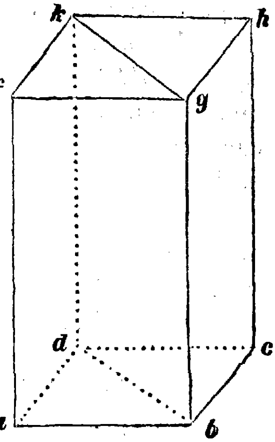
Aber der Inhalt des schiefen Parallelogramms *abcd* $= ab \cdot al$. Zieht man also in der Grundfläche *abcd* irgend eine Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $= c \cdot D^2$, und $K = c \cdot L \cdot D^2$. Hieraus folgt weiter, dass der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums unverändert bleibt, wenn bei gleicher Höhe ein andres Parallelogramm von gleichem Flächeninhalt zur Grundfläche angenommen wird.

Es folgt ferner, dass sich die körperlichen Räume zweier senkrechten Parallelepipeda bei gleichen Höhen wie die Grundflächen, bei gleichen Grundflächen wie die Höhen verhalten, und dass sich bei gleichem körperlichen Inhalt die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

9.

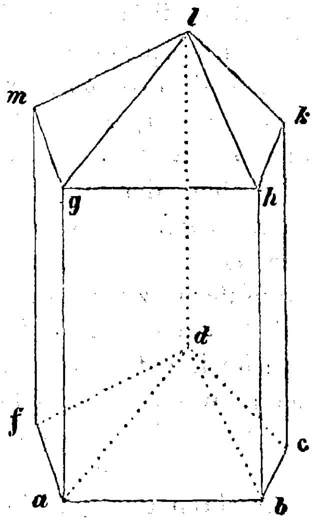
Der körperliche Inhalt eines senkrechten dreiseitigen Prisma ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

abdfgk ist ein senkrechtes Prisma, dessen Höhe *af* $= L$, dessen Grundfläche *abd* ein beliebiges Dreieck. Man vollendet die Parallelogramme *abcd, fghk*, verbindet *ch*, so ist *ch* $\mathrel{\hat{=}}$ *bg* $\mathrel{\hat{=}}$ *dk*, also (IV. 16.) *ch* auf der Ebene *abcd* senkrecht. Wenn man das Prisma *bcdghk* so umstellt, dass



die Ecke c in a, b in d, d in b fällt, so fallen (IV. 11.) die senkrechten Endkanten ch in af, bg in dk, dk in bg zusammen, also sind die Prismen $abdfgk$, $cdbhkg$ identisch, also an körperlichem Inhalt gleich, also jedes die Hälfte des ganzen Parallelepipedums. Dieses aber ist (VII. 8.) gleich dem Product $L \cdot abcd$, also ist der körperliche Inhalt des Prisma $abdfgk = L \cdot \frac{1}{2} abcd$, also $K = L \cdot abd$. Man ziehe in der Grundfläche abd irgend eine Linie $= D$, und bezeichne das Verhältniss von abd zu D^2 durch c, so ist $\triangle\ abd = c \cdot D^2$, also $K = c \cdot L \cdot D^2$.

10.



Der körperliche Inhalt eines senkrechten vielseitigen Prisma oder einer Säule ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche $abcdf$ ist ein beliebiges Vieleck, die Endkanten $ag = bh \ldots = L$ sind auf derselben senkrecht. Man zieht in der Grundfläche Diagonallinien da, db, so sind die Vierecke $dagl$, $dbhl$ (IV. 13. 14.) Ebenen, welche auf der Grundfläche senkrecht sind, und die Säule in senkrechte dreiseitige Prismen theilen. Also sind die körperlichen Räume dieser Prismen (VII. 9.) $bcdhkl = L \cdot bcd$, $abdghl = L \cdot abd$, $adfglm = L \cdot adf$, also ist der körperliche Inhalt der Säule $K = L \cdot abcdf$. Zieht man in der Grundfläche $abcdf$ eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abcdf = c \cdot D^2$, und $K = c \cdot L \cdot D^2$.

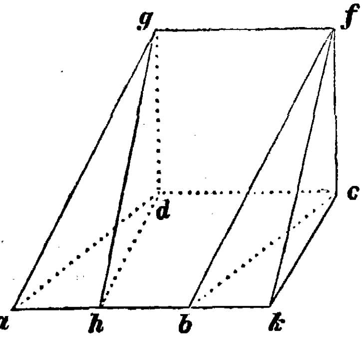
Bezeichnet man den Umfang oder die Summe der Randkanten der Grundfläche durch P, so ist (IV. 49.) die Seitenfläche der Säule $A = L \cdot P$.

Beispiel. Die Höhe der Säule $L = 8'\ 11''$, die Grundfläche ein regelmässiges Achteck, dessen Seite oder Randkante $D = 3'\ 7''$, also (V. 51.) $c = 4{,}8284$.

L	2,02938
D	1,63347
8	0,90309
144	7,84164
A	2,40758 = 255,61 □F.

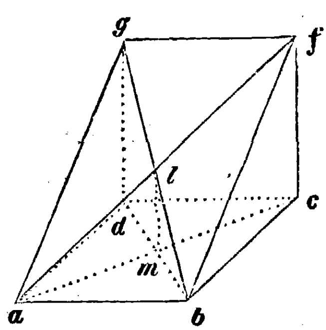
L	2,02938
D	1,63347
D	1,63347
c	0,68381
1728	6,76246
K	2,74259 = 552,82 Cbf.

11.



Der körperliche Inhalt eines dreiseitigen Prisma, welches senkrecht auf seinem Parallelogramm ruht, ist gleich dem halben Product der Höhe mit der Grundfläche.

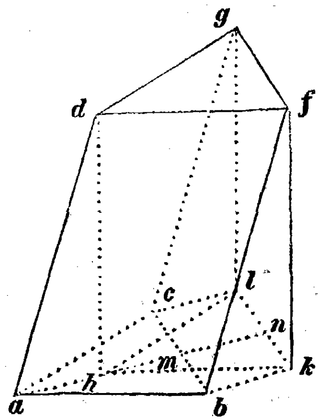
Auf der Ebene des schiefen Parallelogramms $abcd$ sind die Endkanten $cf = dg = L$ senkrecht, also sind auch (IV. 13.) die Endflächen $cfgd$, cfb, dga auf der Grundfläche $abcd$ senkrecht. Man fälle ck, dh auf ab senkrecht, verbinde fk, gh, so sind (IV. 19.) diese Linien, so wie die Ebenen cfk, dgh auf der Kante abk senkrecht. Auch sind (IV. 13.) diese Ebenen cfk, dgh auf der Grundfläche $abcd$ senkrecht. Also sind an den Tetraedern $fckb$, $gdha$ sämmtliche Endflächen congruente rechtwinklige Dreiecke: $ckb = dha$, $fck = gdh$, $fkb = gha$, $fcb = gda$. Legt man die congruenten Dreiecke ckb, dha an ihren gleichnamigen Ecken zusammen, nämlich c auf d, k auf h, b auf a, so fallen auch (IV. 11.) die Endkanten cf, dg zusammen. Also sind die Tetraeder $fckb$, $gdha$ identisch, also an körperlichem Inhalt gleich. Aber das Prisma $abcdfg = hkcdfg - fckb + gdha$. Also ist an körperlichem Inhalt $abcdfg = hkcdfg$. Aber (VII. 9.) der Inhalt von $hkcdfg = \frac{1}{2}L \cdot cd \cdot ck$. Also der Inhalt von $abcdfg$ oder $K = \frac{1}{2}L \cdot cd \cdot ck$. Aber die Grundfläche $abcd = cd \cdot ck$. Also der Inhalt $K = \frac{1}{2}L \cdot abcd$.



Zieht man die Diagonallinien ac, bd, af, bg, so sind (IV. 13.) die Ebenen acf, bdg auf der Grundfläche $abcd$ senkrecht, also ist auch (IV. 17.) ihre Kante lm auf derselben senkrecht, also (IV. 16.) $lm \frown fc \frown gd$, also $lm = \frac{1}{2}fc = \frac{1}{2}gd = \frac{1}{2}L$,

l, m sind die Schwerpuncte der Parallelogramme $abfg$, $abcd$, also $K = lm \cdot abcd$, d. h. gleich dem Product der Höhe des Schwerpuncts mit der Grundfläche.

12.



Der körperliche Inhalt eines schiefen dreiseitigen Prisma ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

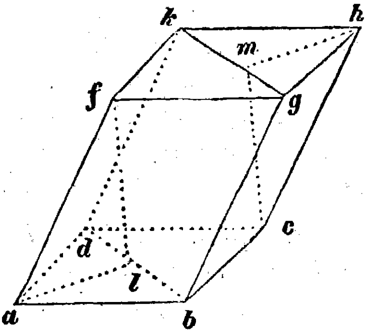
Das schiefe Prisma ist $abcdfg$. Man fälle auf die Ebene der Grundfläche abc die Senkrechten $dh = fk = gl = L$, so ist (VII. 9.) der körperliche Inhalt des senkrechten dreiseitigen Prisma $hkldfg = L \cdot hkl$. Die Seiten des $\triangle\, hkl$ sind (IV. 23.) den gleichnamigen Seiten des $\triangle\, abc$ parallel und gleich. Verbindet man also ah, welche die Seiten bc, kl in m, n schneidet, so sind die Parallelogramme (II. 21.) $ahlc = lcmn$, $ahkb = kbmn$, also $ahlc + ahkb = lcbk$. Also sind (VII. 11.) die körperlichen Räume der Prismen $ahlcgd + ahkbdf = lcbkfg$. Aber die Summen der Prismen $abcdfg + lcbkfg = hkldfg + ahlcgd + ahkbdf$. Also die körperlichen Räume der Prismen $abcdfg = hkldfg$. Also der körperliche Inhalt des Prisma $abcdfg$ oder $K = L \cdot hkl$. Aber $\triangle\, hkl = abc$, also $K = L \cdot abc$. Zieht man in der Grundfläche abc eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abc = c \cdot D^2$, und $K = c \cdot L \cdot D^2$.

Beispiel. Die Höhe $L = 8'\ 3''$, die Grundfläche abc ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $D = 10'\ 5''$, also (V. 51.) $c = 0,43301$.

L	1,99564
D	2,09691
D	2,09691
c	9,63650
1728	6,76246
K	2,58842 = 387,63 Cubikfuss.

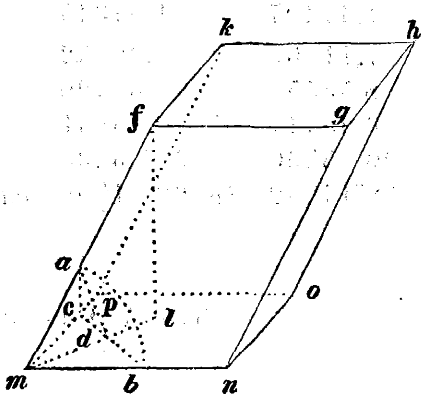
13.

Der körperliche Inhalt eines schiefen Parallelepipedums ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.



Die Grundfläche ist das Parallelogramm $abcd$, auf dessen Ebene die Linien $fl = cm = L$ senkrecht sind. Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalfläche $bdkg$ in die nicht identischen aber symmetrischen dreiseitigen Prismen (IV. 44.) $abdfgk$, $bcdghk$ getheilt, deren körperliche Räume (VII. 12.) $L \cdot abc$ und $L \cdot bcd$ sind. Da $\triangle\, abd = bcd = \frac{1}{2} abcd$, so sind die körperlichen Räume dieser nicht identischen aber symmetrischen Prismen einander gleich, also der körperliche Inhalt des ganzen Parallelepipedums $abcdfghk$ oder $K = L \cdot abcd$. Zieht man in der Grundfläche $abcd$ eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abcd = c \cdot D^2$, also $K = c \cdot L \cdot D^2$.

14.



Aus den Kanten und Diagonallinien eines schiefen Parallelepipedums den körperlichen Inhalt desselben zu berechnen.

Die Grundfläche ist das Parallelogramm $mnop$, die auf der Ebene desselben senkrechte Linie fl die Höhe, also (VII. 13.) $K = fl \cdot mnop$. Aber (VI. 14.) $fl = mf \cdot \sin fml$, und (VI. 27.) $mnop = mn \cdot mp \cdot \sin pmn$. Wenn man also die Endkanten $mf = E$, $mn = E'$, $mp = E''$ setzt, so ist der Inhalt des Parallelepipedums $K = E \cdot E' \cdot E'' \cdot \sin fml \cdot \sin pmn$. Beschreibt man in der Ecke m mit einem beliebigen Halbmesser $ma = mb = mc = md$ ein sphärisches Dreieck (IV. 68.) abc, welches von der senkrechten Ebene fml in ad geschnitten wird, so ist $\angle fml = ad$, $\angle pmn = bc$, also $K = E \cdot E' \cdot E'' \cdot \sin ad \cdot \sin bc$. Aber (VI. 47.) $\sin ad = \sin ab \cdot \sin b$. Setzt man $ab + bc + ca = 2S$, $4 \sin S \cdot \sin (S - ab) \sin (S - bc) \sin (S - ca) = A^2$, so ist (VI. 62.) $\sin ab \cdot \sin bc \cdot \sin b = A$, also

$sin\ ad = sin\ ab \cdot sin\ b = \frac{A}{sin\ bc}$, also $sin\ ad \cdot sin\ bc = A$, also $K = E \cdot E' \cdot E'' \cdot A$.

Wenn nun die Endkanten mf, mn, mp, und die Diagonallinien np, pf, fn gegeben sind, so berechnet man aus ihnen (VI. 44.) die Winkel $fmn = ab$, $nmp = bc$, $pmf = ca$, hieraus A, und hieraus K.

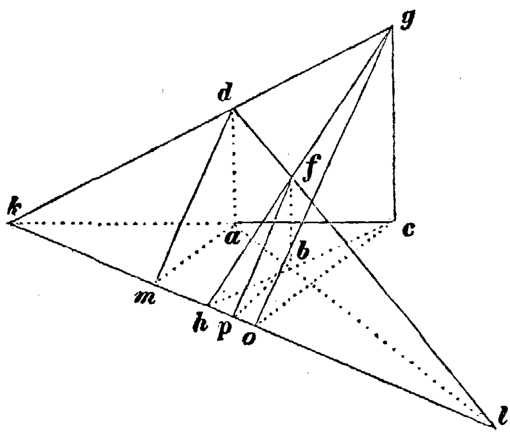
Beispiel. $mf = E = 162$, $mn = E' = 76$, $mp = E'' = 70$ Zoll, $np = 82$, $pf = 126$, $fn = 138$ Zoll.

fn	138	np	82	pf	126	ab	58°11',92
E'	76	E'	76	E''	70	bc	68°11',80
E	162	E''	70	E	162	ca	47°41',16
	376		228		358	$2S$	174° 4',88
	188		114		179	S	87° 2',44
	50		32		53	$S-ab$	28°50',52
	112		38		109	$S-bc$	18°50',64
	26		44		17	$S-ca$	39°21',28
	2,27416		2,05690		2,25285	S	9,99942
	1,69897		1,50515		1,72428	$S-ab$	9,68340
	2,04922		1,57978		2,03743	$S-bc$	9,50920
	1,41497		1,64345		1,23045	$S-ca$	9,80216
	7,11100		7,32852		7,26069	4	0,60206
	8,55550		8,66426		8,63034	A^2	9,59624
	0,25447		0,16941		0,35462	A	9,79812
	29° 5',96		34° 5',90		23°50',58	E	2,20952
ab	58°11',92	bc	68°11',80	ca	47°41',16	E'	1,88081
						E''	1,84510
						1728	6,76246
	$K = 313,33$ Cubikfuss.					K	2,49601

15.

Bei einem Prisma ist der Inhalt des senkrechten Schnitts gleich dem Inhalt irgend eines schiefen Schnitts, multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels, welchen die Ebene dieses schiefen Schnitts mit den Endkanten des Prisma bildet.

Es sey abc irgend ein Dreieck in der Ebene des senkrechten Schnitts, dfg das entsprechende Dreieck in der Ebene des schiefen Schnitts, so dass da, fb, gc auf der Ebene abc senkrecht sind. Die entsprechenden Seiten dieser Dreiecke: bc und fg, ca und gd, ab und df schneiden einander in Puncten h, k, l, welche (IV. 24.) in der Kante der Ebenen abc, dfg liegen. Zieht man am, bp, co senkrecht auf diese Kante, so sind (IV. 19.) dm, fp, go, so wie die Ebenen amd, bpf, cog senkrecht auf dieselbe Kante. Der Winkel $dma = fpb = goc$ ist (IV. 22.) der Kantenwinkel des schiefen Schnitts mit dem senkrechten Schnitt; der Winkel $mda = pfb = ogc = n$ ist (IV. 21.) der Neigungswinkel



der Ebene des schiefen Schnitts dfg gegen die Endkanten des Prisma da, fb, gc, also ist (VI. 14.) $co = go \cdot \sin n$, $bp = fp \cdot \sin n$, $am = dm \cdot \sin n$.
$\triangle ckh = \frac{1}{2} hk \cdot co$, $\triangle gkh = \frac{1}{2} hk \cdot go$, also $\triangle ckh = gkh \cdot \sin n$,
$\triangle bhl = \frac{1}{2} hl \cdot bp$, $\triangle fhl = \frac{1}{2} hl \cdot fp$, also $\triangle bhl = fhl \cdot \sin n$,
$\triangle akl = \frac{1}{2} kl \cdot am$, $\triangle dkl = \frac{1}{2} kl \cdot dm$, also $\triangle akl = dkl \cdot \sin n$.
Aber $\triangle ckh + bhl - akl = abc$, $\triangle gkh + fhl - dkl = dfg$, also ist auch $\triangle abc = dfg \cdot \sin n$.

Wenn $df \parallel hk$, so ist $\triangle abc \sim ckh$, $\triangle dfg \sim gkh$, also $\frac{abc}{ckh} = \frac{ca^2}{ck^2} = \frac{gd^2}{gk^2} = \frac{dfg}{gkh}$, also $\frac{abc}{dfg} = \frac{ckh}{gkh} = \sin n$, also ebenfalls $\triangle abc = dfg \cdot \sin n$.

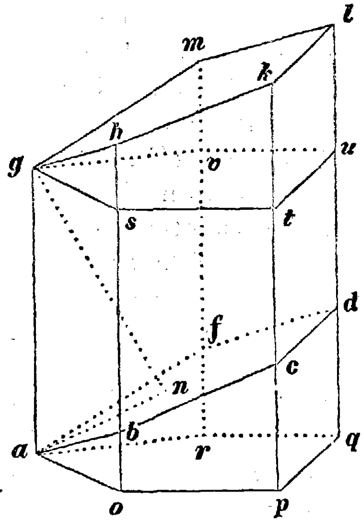
Jedes einzelne Dreieck des schiefen Schnitts, mit $\sin n$ multiplicirt, giebt also das entsprechende Dreieck des senkrechten Schnitts, welches seine Projection ist, also giebt auch der ganze Inhalt des schiefen Schnitts, mit $\sin n$ multiplicirt, den Inhalt des senkrechten Schnitts, welcher seine Projection ist. Hieraus folgt noch, dass sich die Flächen zweier schiefen Schnitte umgekehrt wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Endkanten des Prisma verhalten.

16.

Der körperliche Inhalt eines schiefen Prisma ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

Die parallelen Grundflächen des schiefen Prisma sind $abcdf$, $ghklm$, $ag = E$ die Endkante, $gn = L$ senkrecht auf die Grundfläche, die Höhe; $gan = n$ der Neigungswinkel der Endkante gegen die Grundfläche.

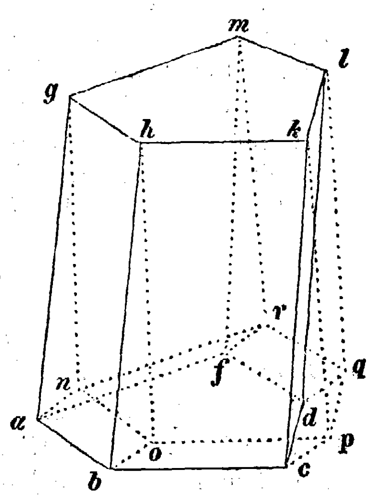
Erster Beweis.



Man ziehe die Querschnitte $aopqr$, $gstuv$ senkrecht auf eine Endkante, so sind sie (IV. 16.) auch auf den übrigen Endkanten senkrecht. In den prismatischen Körpern $aopqrabcdf$, $gstuvghklm$ sind die Grundflächen und gleichnamigen Endflächen congruent, und da diese letztern auf den Grundflächen senkrecht sind, so sind die genannten prismatischen Körper aqd, gul identisch, also an körperlichem Inhalt gleich. Aber $abcdfghklm = aopqrgstuv - aqd + gul$. Also der Inhalt des schiefen Prisma K gleich dem Inhalt des senkrechten Prisma. Dieses ist aber (VII. 10.) $= ag \cdot aopqr$, also $K = ag \cdot aopqr$. Aber (VII. 15.) $aopqr = abcdf \cdot \sin n$, also $K = E \cdot \sin n \cdot abcdf = L \cdot abcdf$.

Zieht man in der Grundfläche $abcdf$ eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abcdf = c \cdot D^2$, also $K = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2$, oder $K = c \cdot L \cdot D^2$.

Zweiter Beweis.



Man fälle von den Ecken der obern Grundfläche $ghklm$ senkrechte Linien $gn = ho = kp = lq = mr = L$ auf die Ebene der untern Grundfläche $abcdf$, so sind alle Seiten der Projection $nopqr$ den gleichnamigen Seiten der Grundfläche $abcdf$ parallel und gleich, also $abcdf = nopqr$. Aber die Figur $abcpqrn = abcdf + cdqp + dfrq + fanr = nopqr + abon + bcpo$, also ist die Summe der Parallelogramme $cdqp + dfrq + fanr = abon + bcpo$. Also ist auch

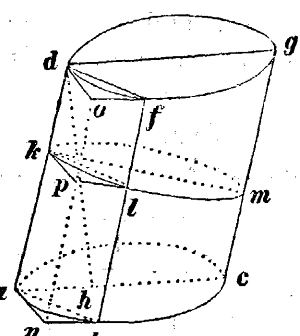
$\frac{1}{2}L \cdot cdqp + \frac{1}{2}L \cdot dfrq + \frac{1}{2}L \cdot fanr = \frac{1}{2}L \cdot abon + \frac{1}{2}L \cdot bcpo$, also ist (VII. 11.) die Summe der dreiseitigen Prismen $cdqpkl + dfrqlm + fanrmg = abongh + bcpohk$. Aber der ganze Körper $abcpqrnghklm = abcdfghklm + cdqpkl + dfrqlm + fanrmg = nopqrghklm + abongh + bcpohk$. Also ist an körperlichem Inhalt das schiefe Prisma $abcdfghklm$ oder K gleich der Säule $nopqrghklm$. Diese ist aber (VII. 10.) $= L \cdot nopqr = L \cdot abcdf$. Also ist der Inhalt des schiefen Prisma K ebenfalls $= L \cdot abcdf$, oder $K = c \cdot L \cdot D^2$, oder $K = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2$.

Beispiel. Die Grundfläche des schiefen Prisma ist ein regelmässiges Sechseck, dessen Seite oder Randkante $D = 4' \, 7''$, also (V. 51.) $c = 2{,}59807$. Die Endkante $E = 9' \, 1''$, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche $n = 68^0 27'$.

E	2,03743
D	1,74036
D	1,74036
$\sin n$	9,96853
c	0,41465
1728	6,76246
K	2,66379 = 461,09 Cubikfuss.

17.

Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.



Die Grundfläche des Cylinders (IV. 51.) sey eine beliebige krumme Linie abc, die Höhe $dh = i$ senkrecht auf die Ebene der Grundfläche, der Inhalt der Grundfläche $abc = G$. Man beschreibe in und um die Grundfläche ein Vieleck; $ab = df$ sey eine Seite des eingeschriebenen Vielecks, $an = do$ und $bn = fo$ Theile der Umfangslinie des äussern Vielecks. Durch die Seiten des innern Vielecks ab, und die anliegenden parallelen Seitenlinien des Cylinders ad, bf lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen eines dem Cylinder eingeschriebenen Prisma, dessen Endkanten mit den Seitenlinien des Cylinders zusammenfallen. Durch die Seiten des äussern Vielecks an, bn, und die anliegenden parallelen Seitenlinien des Cylinders ad, bf, lege man ebenfalls Ebenen, so sind sie die Endflächen eines dem Cylinder umschriebenen Prisma, und berühren die Seitenfläche desselben in den Seitenlinien. Wenn man den Inhalt des innern und äussern Vielecks durch G', G'' bezeichnet, so ist der körperliche Inhalt des innern Prisma (VII. 16.) $= L \cdot G'$, der des äussern Prisma $= L \cdot G''$. Also ist der körperliche Inhalt des Cylinders $K > L \cdot G'$ und $K < L \cdot G''$. Je kleiner aber die Seiten der Vielecke genommen werden, desto mehr nähern sich die Prismen in Rücksicht des körperlichen Inhalts dem Cylinder, desto kleiner werden also die Unterschiede $K - L \cdot G'$ und $L \cdot G'' - K$. Zugleich ist auch $G > G'$ und $G < G''$, und die Unterschiede $G - G'$, $G'' - G$, werden desto kleiner, je kleiner die Seiten der Vielecke genommen werden. Da $K > L \cdot G - L\,(G - G')$ und $K < L \cdot G + L\,(G'' - G)$, der zweite Theil aber kleiner als jede denkbare Grösse werden kann, so muss $K = L \cdot G$ seyn.

Da (VII. 16.) der körperliche Inhalt eines Prisma gleich dem Product der Endkante mit dem senkrechten Schnitt ist, so sey die Seitenlinie des Cylinders $ad = E$ der Inhalt des senkrechten Querschnitts $klm = Q$. Alsdann lässt sich auf die obige Art beweisen, dass $K = E \cdot Q$ sey. Da nun auch $K = L \cdot G = \sin n \cdot E \cdot G$ ist, so folgt, dass $Q = G \cdot \sin n$ sey, wie (VII. 15.) bei jedem Prisma.

Zieht man in der Grundfläche abc eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $G = c \cdot D^2$, also

$$K = c \cdot L \cdot D^2, \text{ oder } K = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2.$$

Wenn die Grundfläche ein Kreis ist, dessen Durchmesser $= D$, Umfang $= P$, so ist (V. 58.)

$$K = \tfrac{1}{4}\pi\, L \cdot D^2, \text{ oder } K = \tfrac{1}{4}\pi \sin n \cdot E \cdot D^2$$

$$K = \frac{1}{4\pi}\, L \cdot P^2, \text{ oder } K = \frac{1}{4\pi} \sin n \cdot E \cdot P^2.$$

Wenn die Grundfläche eine Ellipse ist, deren Axen D und d sind, so ist (V. 67.)

$$K = \tfrac{1}{4}\pi L \cdot D \cdot d, \text{ oder } K = \tfrac{1}{16}\pi\, L\,(D + d)^2 - \tfrac{1}{16}\pi\, L\,(D - d)^2,$$

d. h. der elliptische Cylinder kann als der Unterschied zweier Kreiscylinder berechnet werden. Bei einem senkrechten Kreiscylinder, dessen Wand die Dicke $= w$ hat, äusserer Durchmesser $= D$, innerer Durchmesser $d = D - 2w$, ist der Inhalt der Wand $= \tfrac{1}{4}\pi\, L \cdot D^2 - \tfrac{1}{4}\pi\, L \cdot d^2 = \tfrac{1}{4}\pi\, L\,(D - d)\,(D + d) = \pi\, L \cdot w\,(D - w) = \pi\, L \cdot w\,(d + w)$.

Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist (IV. 52.) die Seitenfläche $A = L \cdot P = \pi \cdot L \cdot D$, die ganze Oberfläche $F = \pi\, L \cdot D + \frac{1}{2}\pi \cdot D^2$.

Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiscylinder ist die Höhe dem Durchmesser gleich, also $D = L$, folglich

$$A = \pi \cdot D^2, \quad F = \tfrac{3}{2}\pi \cdot D^2, \quad K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot D^3.$$

Beispiele.

1) Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiscylinder ist $L = D = 15$ Zoll.

D	1,17609	D	1,17609	D	1,17609	$A =$	706,85 □Z.
D	1,17609	D	1,17609	D^2	2,35218	$F =$	1060,3 □Z.
π	0,49715	$\frac{3}{2}\pi$	0,67324	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509	$K =$	2650,7 CZ.
A	2,84933	F	3,02542	K	3,42336		

2) Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist $L = P = 20$ Zoll.

P^2	2,60206	P^3	3,90309	$F = 463,66$ □Zoll
$1 + \frac{1}{2\pi}$	0,06414	$\frac{1}{4\pi}$	8,90078	$K = 636,62$ Cubikzoll.
F	2,66620	K	2,80387	

3) Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiscylinder ist $D = L = 100$, wie gross ist die Kante C eines Cubus von gleichem Inhalt?

$$C^3 = K = \tfrac{1}{4}\pi\, D^3$$

D^3	6,
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
K	5,89509
C	1,96503 $= 92,264$.

4) Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist: $L = 10$ Fuss, $D = 4$ Fuss.

L	1,
D^2	1,20412
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
K	2,09921 $= 125,66$ Cub.-F.

5) Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist: $L = 17\frac{5}{12}$ Z., $D = 8\frac{1}{3}$ Z.

L	1,24097
D	0,92082
D	0,92082
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
K	2,97770 $= 949,95$ Cub.-Z.

6) Bei einem rigischen runden Loof ist der Inhalt $K = 4202{,}5$ russ. Cubikzoll, die innere Weite $D = 20$ Z., wie gross die Höhe?

K	3,62351	
D^2	2,60206	
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509	
L	1,12636	= 13,377 Zoll.

7) Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist der Umfang $P = 81\frac{1}{2}$ Zoll, $L = 31\frac{1}{2}$ Zoll.

L	1,49831	
P	1,91116	
P	1,91116	
$\frac{1}{4}\pi$	8,90078	
1728	6,76246	
K	0,98387	= 9,6354 Cub.-F.

8) Bei einem senkrechten hohlen Kreiscylinder ist die innere Höhe $L = 13\frac{3}{8}$ Zoll, der äussere Durchmesser $D = 21\frac{1}{2}$ Zoll, der innere $d = 20$ Zoll, die Wand- und Bodendecke $w = \frac{3}{4}$ Zoll, wie gross ist der Inhalt der Wand und des untern Bodens?

L	1,12630	w	9,87506	Wand	653,93
w	9,87506	D	1,33244	Boden	272,29
$D-w$	1,31702	D	1,33244		926,22 Cub.-Z.
π	0,49715	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509		
Wand	2,81553	Boden	2,43503		

9) Bei einem senkrechten elliptischen Cylinder ist $D = 26$ Zoll, $d = 21\frac{1}{2}$ Zoll, $L = 37$ Zoll.

L	1,56820	
D	1,41497	
d	1,33244	
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509	
K	4,21070	= 16244 Cub.-Z.

10) Bei einem schiefen Kreiscylinder ist $E = 12$ Fuss, $D = 8$ Fuss, Neigung $n = 78^0 39'$.

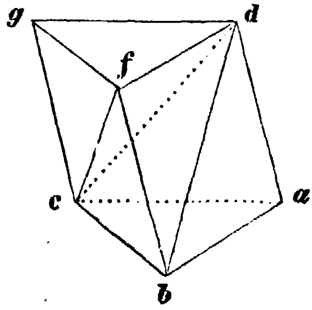
E	1,07918	
D	0,90309	
D	0,90309	
$\sin n$	9,99142	
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509	
K	2,77187	= 591,39 Cub.-F.

18.

Der körperliche Inhalt eines Tetraeders ist der dritte Theil des Products der Höhe mit der Grundfläche.

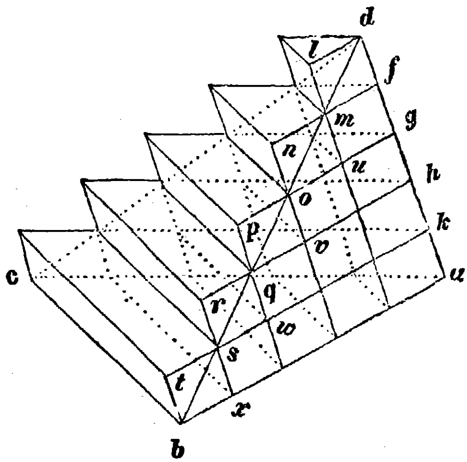
Das Tetraeder ist $abcd$. Man vollende das Prisma, indem man bf und $cg \mathrel{\widehat{=}} ad$ zieht, und man ziehe cf, so ergeben sich in dem Prisma drei Tetraeder $dabc$, $dbcf$

dcfg. Die Tetraeder *dabc*, *dbcf* haben die gemeinschaftliche Spitze *c*, und ihre Grundflächen *dab*, *dbf* sind die Hälften des Parallelogramms *dabf*, also haben *dabc*, *dbcf* gleiche Höhe und Grundfläche. Die Tetraeder *dbcf*, *dcfg* haben in *d* eine gemeinschaftliche Spitze, und ihre Grundflächen *bcf*, *cfg* sind die Hälften des Parallelogramms *bfgc*, also haben *dbcf*, *dcfg* gleiche Grundfläche und Höhe. Wenn also bewiesen wird, dass Tetraeder von gleicher Höhe und Grundfläche an körperlichem Inhalt gleich sind, so ist der Inhalt des Tetraeders *dabc* der dritte Theil des Inhalts des Prisma *abcdfg*, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat.



Erster Beweis.

Man theilt die Kante *ad* in *n* gleiche Theile, legt durch die Theilpuncte die Ebenen *fm*, *go* u. s. w. mit der Grundfläche *abc* parallel. Durch die Kanten dieser Ebenen auf der Endfläche *dbc* legt man Ebenen mit *ad* parallel. Dadurch erhält man eine Reihe von Prismen, welche dem Tetraeder *abcd* eingeschrieben und umschrieben sind. Der körperliche Inhalt des Prisma *dlmf* = *fmug* sey *M*, so ist *fnog* = *govh* = $4M$, *gpqh* = *hqwk* = $9M$, *hrsk* = *ksxa* = $16M$, *ktba* = $25M$ u. s. w. Der körperliche Inhalt des Tetraeders *abcd* sey *K*, so ist



$$K > M + 4M + 16M \ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 \cdot M$$
$$K < M + 4M + 16M \ldots\ldots\ldots + n^2 \cdot M.$$

$$\text{Aber } 1 + 4 + 9 \ldots + (n-1)^2 = \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}$$

$$1 + 4 + 9 \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1).}{6}$$

Also $K > M \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

$K < M \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

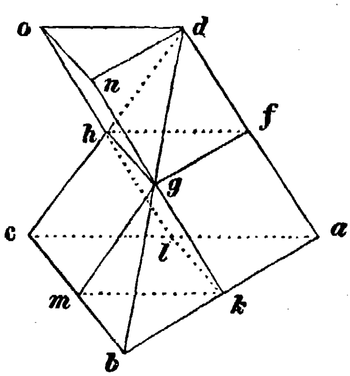
Die Höhe des Tetraeders $abcd$ sey $= L$, die Grundfläche $abc = G$, so ist $M = \frac{L \cdot G}{n^3}$, also

$$K > \tfrac{1}{3} L \cdot G \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

$$K < \tfrac{1}{3} L \cdot G \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

Indem man nun die Anzahl der Theile n immer grösser nimmt, werden die Brüche $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ immer kleiner, und können kleiner als jede denkbare Grösse werden. Folglich ist genau $K = \frac{1}{3} L \cdot G$.

Zweiter Beweis.



Das Tetraeder $abcd$ hat die Grundfläche $abc = G$, die Höhe L. Man halbirt die Kanten in f, g, h, k, l, m, so sind (II. 36.) $fh \stackrel{\frown}{=} km \stackrel{\frown}{=} ac$, $fg \stackrel{\frown}{=} ab$, $gh \stackrel{\frown}{=} kl \stackrel{\frown}{=} bc$, also (IV. 32.) die Ebene $fgh \stackrel{\frown}{=} abc$, $gkm \stackrel{\frown}{=} dac$, $\triangle\, fgh = akl = kbm = \frac{1}{4} G$, $lkmc = \frac{1}{2} G$, die Höhe der Prismen $aklfgh$, $klcmgh$ ist $\frac{1}{2} L$, also (VII. 12.) $aklfgh = \frac{1}{8} L \cdot G$. Das Prisma $klcmgh$ ist (VII. 13.) die Hälfte eines Parallelepipedums, dessen Grundfläche $lkmc = \frac{1}{2} G$, dessen Höhe $\frac{1}{2} L$, also ist ebenfalls $klcmgh = \frac{1}{8} L \cdot G$, also beide Prismen zusammen $= \frac{1}{4} L \cdot G$. Vollendet man über fgh das Prisma $fghdno = aklfgh = \frac{1}{8} L \cdot G$, so ist das Tetraeder $fghd < fghdno$, also $< \frac{1}{8} L \cdot G$. Das Tetraeder $kbmg$ ist mit dem Tetraeder $fghd$ identisch, also ebenfalls $< \frac{1}{8} L \cdot G$, also beide Tetraeder zusammen $< \frac{1}{4} L \cdot G$. Wenn also der körperliche Inhalt des Tetraeders $abcd = K$ ist, so ist

$$K > \tfrac{1}{4} L \cdot G \text{ und } K < \tfrac{1}{4} L \cdot G + \tfrac{1}{4} L \cdot G.$$

Halbirt man auf dieselbe Art die Kanten der Tetraeder $fghd$, $kbmg$, so ist jedes derselben $> \frac{1}{32} L \cdot G$ und $< \frac{1}{32} L \cdot G +$

$+ \frac{1}{32} L \cdot G$, also beide zusammen $> \frac{1}{16} L \cdot G$ und $< \frac{1}{16} L \cdot G + \frac{1}{16} L \cdot G$, also $K > \frac{1}{4} L \cdot G + \frac{1}{16} L \cdot G$ und $K < \frac{1}{4} L \cdot G + \frac{1}{16} L \cdot G + \frac{1}{16} L \cdot G$.

Bei dieser Halbirung entstehen vier Tetraeder. Wenn man die Kanten derselben wieder halbirt, so ist jedes derselben $> \frac{1}{256} L \cdot G$, und $< \frac{1}{256} L \cdot G + \frac{1}{256} L \cdot G$, also alle vier zusammen $> \frac{1}{64} L \cdot G$ und $< \frac{1}{64} L \cdot G + \frac{1}{64} L \cdot G$, also

$$K > \tfrac{1}{4} L \cdot G + \tfrac{1}{16} L \cdot G + \tfrac{1}{64} L \cdot G,$$

und $K < \frac{1}{4} L \cdot G + \frac{1}{16} L \cdot G + \frac{1}{64} L \cdot G + \frac{1}{64} L \cdot G$.

Nach n Halbirungen der Kanten ist also

$$K > L \cdot G \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \cdots + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$K < L \cdot G \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right)$$

oder durch Summirung dieser geometrischen Progression:

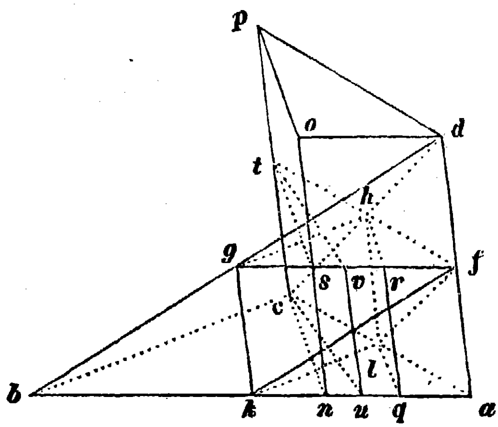
$$K > \tfrac{1}{3} L \cdot G - \tfrac{1}{3} L \cdot G \cdot \frac{1}{4^n},$$

$$K < \tfrac{1}{3} \cdot L \cdot G + \tfrac{2}{3} L \cdot G \cdot \frac{1}{4^n}.$$

Da bei fortgesetzter Halbirung der zweite Theil kleiner als jede denkbare Grösse werden kann, so ist genau

$$K = \tfrac{1}{3} L \cdot G.$$

Dritter Beweis.

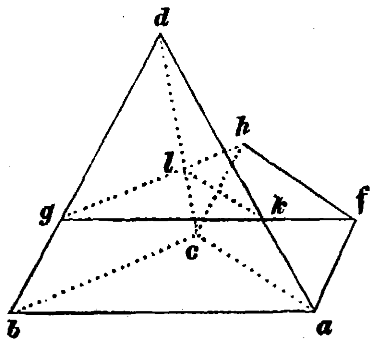


Das Tetraeder ist $abcd$, die Kanten da, db, dc, ab, ca sind in f, g, h, k, l halbirt, also ist nach dem vorigen Beweis $abcd = 2 \cdot dfgh + 2 \cdot aklfgh$ oder $abcd = 2 \cdot aklf + 2 \cdot aklfgh$. Das Tetraeder $abcd$ sey an körperlichem Inhalt einem Prisma $ancdop$ von gleicher Höhe gleich, dessen Grundfläche das $\triangle\, anc$ ist. Das Tetraeder $aklf$ ist (IV. 56.) dem Tetraeder $abcd$ ähnlich. Man ziehe $lq \parallel cn$, $hr \parallel cn \parallel po$, so ist das Prisma $aqlfrh$ (IV. 57.) dem Prisma $ancdop$ ähnlich, und

$\triangle\, alq : akl = acn : abc$, also ist auch an körperlichem Inhalt Tetraeder $aklf = aqlfrh$. Aber vermöge der Annahme ist $ancdop = 2 \cdot aklf + 2 \cdot aklfgh$, also $\frac{1}{2} ancdop$ oder $ancfst = aklf + aklfgh$, also $ancfst = aqlfrh + aklfgh$. Diese drei Prismen haben gleiche Höhen, also sind ihre Grundflächen $\triangle\, anc = aql + akl$. Man halbire ak in u, so ist $\triangle\, akl = acu$, also ist $\triangle\, anc = aql + acu$, also $\triangle\, cnu = aql$. Aber $\frac{aql}{anc} = \frac{al^2}{ac^2} = \frac{1}{4}$, also $\triangle\, cnu = \frac{1}{4} anc$. Also $\triangle\, anc = \frac{4}{3} acu = \frac{1}{3} abc$.

Wenn also das Tetraeder $abcd$ den körperlichen Inhalt K, die Höhe L, die Grundfläche $abc = G$ hat, so ist $K = \frac{1}{3} L \cdot G$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = \frac{1}{3} c \cdot L \cdot D^2$.

Theilt man die Kanten des Tetraeders in drei gleiche Theile $ak = \frac{1}{3} ad$, $bg = \frac{1}{3} bd$, $cl = \frac{1}{3} cd$, so ist (IV. 32.) die Ebene kgl oder fgh der Grundfläche des Tetraeders parallel, und geht (V. 13.) durch die Schwerpuncte der Endflächen dab, dbc, dca. Das Tetraeder ist an körperlichem Inhalt dem Prisma $abcfgh$ gleich.



Beispiele.

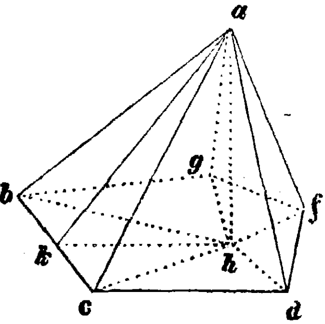
1) Bei einem regelmässigen Tetraeder sind alle Endflächen gleichseitige Dreiecke. Wenn die Endkante $= D$, so ist der Cosinus ihrer Neigung gegen die Grundfläche (VI. Aufg. 72.) $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, also $L = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D$. Es sey $D = 10'5''$, wie gross ist der körperliche Inhalt?

D	2,09691
D^2	4,19382
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	9,91195
$\sqrt{\frac{3}{16}} = c$	9,63650
$\frac{1}{3}$	9,52288
1728	6,76246
K	2,12452 = 133,21 Cubikfuss.

2) Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck, $D = 11' \, 7''$, $L = 30' \, 5''$.

L	2,56229
D	2,14301
D	2,14301
c	9,63650
$\frac{1}{3}$	9,52288
1728	6,76246
K	2,77015 = 589,04 Cub.-F.

19.



Der körperliche Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Products der Höhe mit der Grundfläche.

Die Höhe der Pyramide sey $ah = L$. Man theilt ihre Grundfläche $bcdfg$ durch Diagonallinien in Dreiecke, so ist (VII. 18.) $abch = \frac{1}{3}L \cdot bch$, $acdh = \frac{1}{3}L \cdot cdh$, $adfh = \frac{1}{3}L \cdot dfh$, $afgh = \frac{1}{3}L \cdot fgh$, $agbh = \frac{1}{3}L \cdot gbh$, also durch Summirung der körperliche Inhalt der ganzen Pyramide $abcdfg$ oder $K = \frac{1}{3}L \cdot bcdfg$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$.

Bei einer regelmässigen Pyramide ist die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck, dessen Mittelpunct h, Umfang $= P$, Centralwinkel $bhc = m$, und die Seitenfläche (IV. 54.) $A = \frac{1}{2}ak \cdot P$, wenn ak, hk (IV. 19.) senkrecht auf bc sind. Es sey hier die Randkante $bc = D$, so ist $bk = \frac{1}{2}D$,

$$hk = \tfrac{1}{2}D \cdot \cot \tfrac{1}{2}m, \quad tg\, k = \frac{2L}{D} \cdot tg\, \tfrac{1}{2}m, \quad ak = \frac{L}{\sin k}.$$

Beispiele.

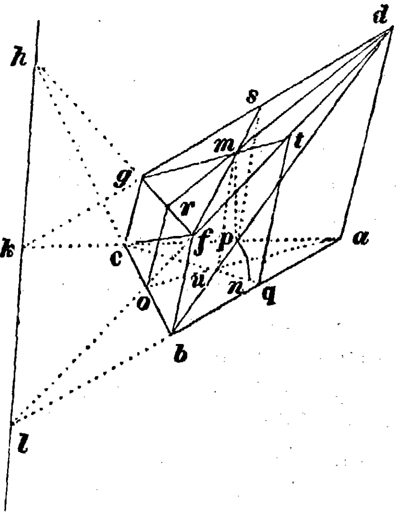
1) Bei einer unregelmässigen Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat, die Randkante $D = 8' \, 7''$, die Höhe $L = 21' \, 6''$, $c = 1$.

L	2,41162
D	2,01284
D	2,01284
$\frac{1}{3}$	9,52288
1728	6,76246
K	2,72264 = 528 Cub.-F.

2) Bei einer regelmässigen Pyramide ist die Höhe $L = 15'$, die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck, die Randkante $D = 7$ Fuss, also (V. 51.) $c = 2,59807$, $m = 60^0$.

L	1,17609	$tg\,\frac{1}{2}m$	9,76144	ak	1,20895
D	0,84510	$2L$	1,47712	$\frac{1}{2}P$	1,32222
D	0,84510	D	0,84510	A	2,53117
c	0,41465	$tg\,k$	0,39342		
$\frac{1}{3}$	9,52288	$sin\,k$	9,96714	A	$=$ 339,75
K	2,80382 $=$ 636,53 Cub.-F.	L	1,17609		□F.
		ak	1,20895		

20.



Der körperliche Inhalt eines schiefgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist gleich dem dritten Theil des Products der Summe der Höhen mit der Grundfläche, oder gleich dem Product der Höhe des obern Schwerpuncts mit der Grundfläche.

Die Grundfläche ist $abc = G$, die parallelen Endkanten sind ad, bf, cg, die von d, f, g auf die Grundfläche gefällten Höhen sind L', L'', L''', der schiefe Schnitt dfg schneidet die Grundfläche abc in der Kante hkl. Der prismatische Körper $abcdfg = K$ besteht aus den Tetraedern $dabc$, $dbcf$, $dcfg$. Das Tetraeder $dabc$ (VII. 18.) ist $= \frac{1}{3}L' \cdot G$. Die Tetraeder $dabc$, $dbcf$ haben in c eine gemeinschaftliche Spitze und verhalten sich also (VII. 18.) wie ihre Grundflächen, wie $\triangle\, dab : dbf = ad : bf = L' : L''$, also Tetraeder $dbcf = \frac{1}{3}L'' \cdot G$. Die Tetraeder $dbcf$, $dcfg$ haben in d eine gemeinschaftliche Spitze und verhalten sich also wie ihre Grundflächen, wie $\triangle\, bcf : cfg = bf : cg = L'' : L'''$, also Tetraeder $dcfg = \frac{1}{3}L''' \cdot G$. Also ihre Summe $K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''') \cdot G$.

Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$ und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 mit c, so ist $G = c \cdot D^2$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot (L' + L'' + L''') \cdot D^2$.

Halbirt man bc, ca, ab in o, p, q, und fg, gd, df in r, s, t, so sind die Linien or, ps, qt den Endkanten ad, bf, cg parallel, die Diagonallinien ao, bp, cq schneiden einander in u, die Diagonallinien dr, fs, gt schneiden einander in m. Die Puncte u, m sind (V. 13.) die Schwerpuncte der

Dreiecke abc, dfg, und um den Endkanten ad, bf, cg parallel. Also ist $bf + cg = 2 \cdot or$, $2 \cdot or + ad = 3 \cdot um$, also $ad + bf + cg = 3 \cdot um$. Fället man also von dem obern Schwerpunct m auf die Grundfläche abc die senkrechte Höhe $mn = L$, so ist $3L = L' + L'' + L'''$, also ist $K = L \cdot G$ oder $K = c \cdot L \cdot D^2$.

Bezeichnet man die Schwerpunctslinie mu durch E, und den Neigungswinkel der Endkanten ad, bf, cg, oder der Schwerpunctslinie E gegen die Grundfläche abc durch n, so ist $E \cdot \sin n = L$, also $K = \sin n \cdot E \cdot G$ oder $K = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2$. Wenn eine Ebene die Endkanten senkrecht durchschneidet, und der Inhalt des senkrechten Schnitts durch Q bezeichnet wird, so ist (VII. 15.) $G \cdot \sin n = Q$, also $K = E \cdot Q$.

Beispiele.

1) Die Grundfläche $G = 56$ □Fuss, die Höhen $L' = 7'\ 8''$, $L'' = 9'\ 3''$, $L''' = 8'\ 7''$.

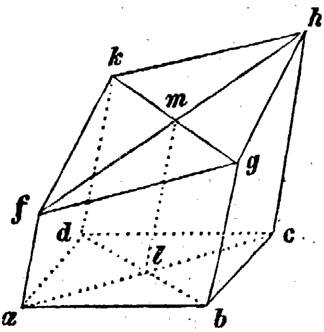
$L' + L'' + L'''$	1,40654
G	1,74819
$\frac{1}{3}$	9,52288
K	2,67761 = 476 C.-F.

2) Die Grundfläche $G = 18\frac{1}{2}$ □Zoll, die Höhen $L' = 10''$, $L'' = 12''$, $L''' = 13'''$.

$L' + L'' + L'''$	1,54407
G	1,26717
$\frac{1}{3}$	9,52288
K	2,33412 = 215,83.

21.

Der körperliche Inhalt eines schiefgeschnittenen Parallelepipedums ist gleich der Hälfte des Products der Gegenhöhen mit der Grundfläche, oder gleich dem Product der Höhe des obern Schwerpuncts mit der Grundfläche.



Die Grundfläche ist $abcd = G$, der schiefe Schnitt $fghk$ ist ebenfalls ein Parallelogramm. Die Durchschnitte der Diagonallinien l, m sind die Schwerpuncte dieser Parallelogramme, und lm den Endkanten af, bg, ch, dk parallel. Also ist $2\,lm = af + ch = bg + dk$. Also wenn man die Endkanten durch E, die Höhen durch L, den Neigungswinkel der Endkanten gegen die Grundfläche durch n bezeichnet, so ist

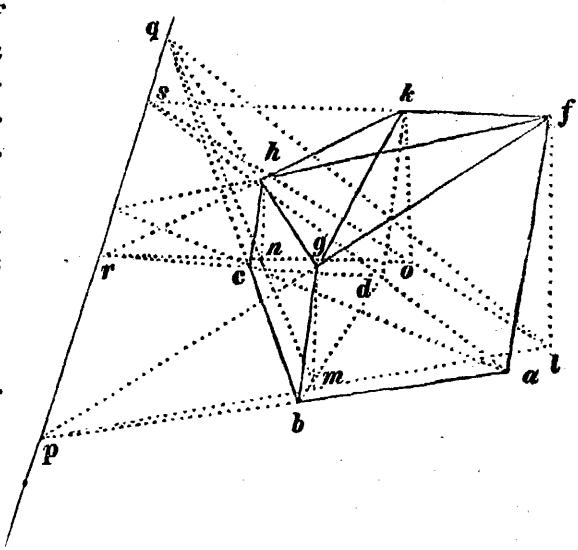
$$2E = E' + E''' = E'' + E'''',$$

also $6E = (E' + E'' + E''') + (E' + E''' + E'''')$, $E \cdot \sin n = L$, also auch $6 \cdot L = (L' + L'' + L''') + (L' + L''' + L'''')$. Aber (VII. 20.) $abcfgh = \frac{1}{6}(L' + L'' + L''') \cdot G$, und $acdfhk = \frac{1}{6}(L' + L''' + L'''') \cdot G$, also der körperliche Inhalt des ganzen schiefgeschnittenen Parallelepipedums $K = L \cdot G = c \cdot L \cdot D^2 = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2$.

Beispiel. Die Grundfläche

$G = 56\frac{1}{2}$ □F., $L' = 10\frac{1}{2}$ F.	L 1,11394
$L'' = 12\frac{1}{2}$ F., $L''' = 15\frac{1}{2}$ F.	G 1,75205
also $L'''' = 13\frac{1}{2}$ F., $L = 13$ F.	K 2,86599 = 734,5 Cub.-F.

22.



Bei einem schief geschnittenen Prisma aus den Höhen oder Endkanten dreier Puncte die Höhe oder Endkante des vierten Puncts zu bestimmen.

Die Grundfläche ist $abcd$, der schiefe Schnitt $fghk$, ihre gemeinschaftliche Kante pq, die Endkanten $af = E'$, $bg = E''$, $ch = E'''$, $dk = E''''$, ihre Neigung gegen die Grundfläche $= n$, die Höhen $fl = E' \cdot \sin n = L'$, $gm = E'' \cdot \sin n = L''$, $hn = E''' \cdot \sin n = L'''$, $ko = E'''' \cdot \sin n = L''''$. Der körperliche Inhalt des vierseitigen schief geschnittenen Prisma ist durch Addition der beiden dreiseitigen (VII. 20.) $K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''') \cdot abc + \frac{1}{3}(L' + L''' + L'''') \cdot acd$ und $K = \frac{1}{3}(L'' + L''' + L'''')\, bcd + \frac{1}{3}(L'' + L''' + L') \cdot bda$, also $K = \frac{1}{3}(L'\ L'' + L''' + L'''') \cdot abcd = \frac{1}{3}L'''' \cdot abc - \frac{1}{3}L'' \cdot acd$ und $K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''' + L'''')\, abcd - \frac{1}{3}L' \cdot bcd - \frac{1}{3}L''' \cdot bda$. Also $L'''' \cdot abc = L' \cdot bcd - L'' \cdot acd + L''' \cdot bda$ und $E'''' \cdot abc = E' \cdot bcd - E'' \cdot acd + E''' \cdot bda$.

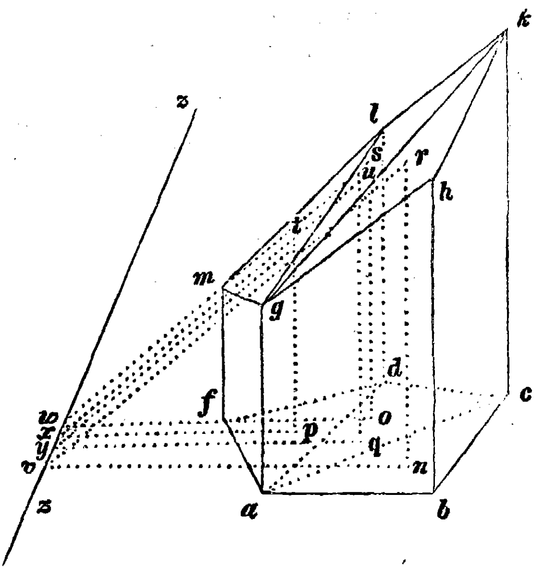
Wenn also die Grundfläche und ihre Theile gegeben sind, so kann man aus drei Höhen L', L'', L''' die vierte L'''', und aus drei Endkanten E', E'', E''' die vierte E'''' finden. Die obige Gleichung heisst in der analytischen Geometrie die *Gleichung der Ebene.*

Beispiele.

1) Es ist $abcd = 18$, $abc = 6$, $acd = 12$, $bda = 10$, $bcd = 8$ □Zoll, $L' = 10$, $L'' = 12$, $L''' = 13$ Zoll, so ist $L'''' = \frac{10 \cdot 8 - 12 \cdot 12 + 13 \cdot 10}{6} = 11$ Zoll, und hieraus $K = 206$ Cubikzoll.

2) Es ist $abcdfg$ ein regelmässiges Sechseck, dessen Theile $abc = 1$, $acd = 2$, $acf = 3$ □Zoll, $L' = 10$, $L'' = 12$, $L''' = 13$ Zoll.
Hieraus das 4te $L = 10 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 13 \cdot 2 = 12$ Zoll,
das 5te $L = 10 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + 13 \cdot 2 = 10$ Zoll,
das 6te $L = 10 \cdot 2 - 12 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = 9$ Zoll.
Hieraus das mittlere L von $bcd = 12\frac{1}{3}$ Zoll, von $afg = 9\frac{2}{3}$, von $abd = 11\frac{1}{3}$, von $afd = 10\frac{2}{3}$, also $K = 12\frac{1}{3} \cdot 1 + 9\frac{2}{3} \cdot 1 + 11\frac{1}{3} \cdot 2 + 10\frac{2}{3} \cdot 2 = 66$ □Zoll.

23.



Der körperliche Inhalt eines schief geschnittenen Prisma ist gleich dem Product der Höhe des obern Schwerpuncts mit der Grundfläche.

Der senkrechte Durchschnitt des prismatischen Körpers sey ein beliebiges Vieleck $abcdf$, der schiefe Schnitt sey $ghklm$. Die Endkanten ag, bh, ck, dl, fm sind auf der Ebene $abcdf$ senkrecht und bilden mit der Ebene des schiefen Schnitts $ghklm$ den Neigungswinkel $= n$, so ist der Winkel des schiefen und senkrechten Schnitts an ihrer gemeinschaftlichen Kante $zz = R - n$.

Durch Halbirung der Seiten ergeben sich in den Dreiecken abc, acd, adf die Schwerpuncte (V. 13.) n, o, p, und in den Dreiecken ghk, gkl, glm die Schwerpuncte r, s, t. Die Linien nr, os, pt sind (VII. 20.) den Endkanten ag, bh u. s. w. parallel, also auf der Ebene $abcdf$ senkrecht. Auch ist (VII. 20.) der Inhalt der dreiseitigen schiefgeschnittenen Prismen $abcdfg = nr \cdot abc$, $acdgkl = os \cdot acd$, $adfglm = pt \cdot adf$, also der körperliche Inhalt des schiefgeschnittenen vielseitigen Prisma $K = nr \cdot abc + os \cdot acd + pt \cdot adf$. Zieht man von den Puncten n, o, p auf die Kante zz die senkrechten Linien nv, ow, px, so sind auch (IV. 19.) die Linien rv, sw, tx auf der Kante zz senkrecht, also die Winkel $nrv = osw = ptx = n$, also $nr = nv \cdot cot\, n$, $os = ow \cdot cot\, n$, $pt = px \cdot cot\, n$. Wenn man also die obige Gleichung durch $cot\, n$ dividirt, oder mit $tg\, n$ multiplicirt, so ist $K \cdot tg\, n = nv \cdot abc + ow \cdot acd + px \cdot adf$. Es sey nun q der Schwerpunct der ganzen Figur $abcdf$, und qy senkrecht auf die Kante zz gezogen, so wird die Lage dieses Schwerpuncts durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

1) $qy \cdot abcdf = nv \cdot abc + ow \cdot acd + px \cdot adf$.
2) $zy \cdot abcdf = zv \cdot abc + zw \cdot acd + zx \cdot adf$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$K \cdot tg\, n = qy \cdot abcdf, \text{ also } K = cot\, n \cdot qy \cdot abcdf.$$

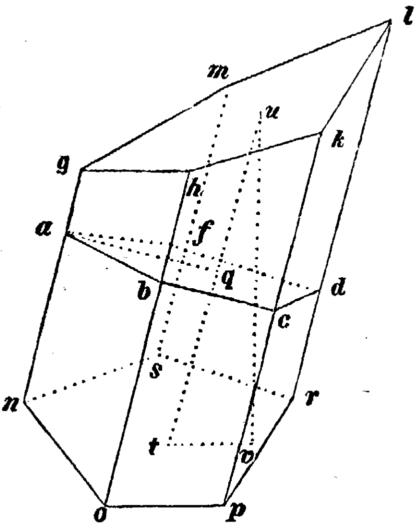
Errichtet man in q eine senkrechte Linie auf die Grundfläche, so ist $cot\, n \cdot qy = qu = L$, also $K = L \cdot abcdf$, d. h. der körperliche Inhalt ist gleich dem Product der im Schwerpunct der Grundfläche bis an die schiefe Ebene errichteten Höhe mit der Grundfläche.

Es ist aber (VII. 15.) $abc = ghk \cdot sin\, n$, $acd = gkl \cdot sin\, n$, $adf = glm \cdot sin\, n$, $abcdf = ghklm \cdot sin\, n$; ferner $nv = rv \cdot sin\, n$, $ow = sw \cdot sin\, n$, $px = tx \cdot sin\, n$, $qy = uy \cdot sin\, n$. Wenn man also jene Gleichungen zu beiden Seiten, die erste zwei Mal, die andre einmal mit $sin\, n$ dividirt, so ergiebt sich:

$$uy \cdot ghklm = rv \cdot ghk + sw \cdot gkl + tx \cdot glm,$$
$$zy \cdot ghklm = zv \cdot ghk + zw \cdot gkl + zx \cdot glm.$$

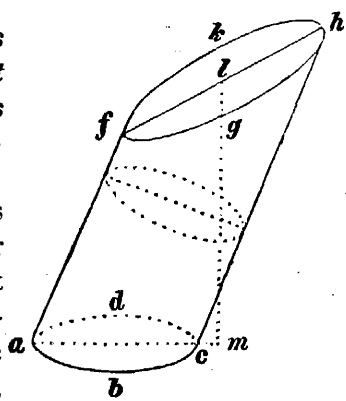
Dieses sind aber die Gleichungen des Schwerpuncts des schiefen Schnitts $ghklm$, also ist u dieser Schwerpunct, also ist $qu = L$ die Höhe des Schwerpuncts der schiefen Fläche $ghklm$ über dem senkrechten Durchschnitt $abcdf$.

Es sey nun $noprs$ die Grundfläche eines prismatischen Körpers, $ghklm$ ein schiefer Schnitt, $abcdf$ ein auf die Endkanten senkrechter Schnitt, q der Schwerpunct desselben, und in q auf die Ebene $abcdf$ eine senkrechte Linie bis an



die Ebenen $noprs$, $ghklm$ errichtet, welche dieselben in den Puncten t, u schneidet, so sind t, u die Schwerpuncte der Flächen $noprs$, $ghklm$, und es ist der körperliche Inhalt von dem obern Stück $= qu \cdot abcd$, der körperliche Inhalt von dem untern Stück $= qt \cdot abcd$, also der Inhalt des zwischen den Flächen $noprs$, $ghklm$ enthaltenen Körpers $K = tu \cdot abcdf$. Nimmt man zur Grundfläche das Vieleck $noprs = G$ an, und setzt man den Winkel, welchen die Endkanten ng, oh u. s. w. mit der Grundfläche $noprs$ bilden, $= n$, so ist (VII. 15.) $abcdf = G \cdot \sin n$, also $K = tu \cdot \sin n \cdot G$. Fället man von dem Schwerpunct u der obern Fläche $ghklm$ eine senkrechte Linie $uv = L$ auf die Grundfläche, so ist $tu \cdot \sin n = uv = L$, also $K = L \cdot G$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $G = c \cdot D^2$, also $K = c \cdot L \cdot D^2$.

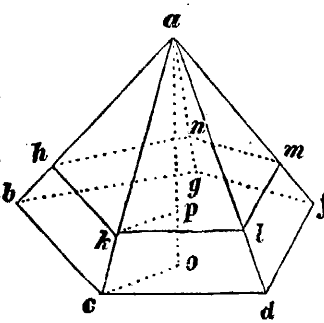
24.



Der körperliche Inhalt eines schief geschnittenen Cylinders ist gleich dem Product der Höhe des obern Schwerpuncts mit der Grundfläche.

Die Grundfläche des Cylinders sey die krumme Linie $abcd$, der schiefe Schnitt $fghk$, der Schwerpunct desselben l, die von diesem Schwerpunct auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie oder Höhe $lm = L$, der Inhalt der Grundfläche $abcd = G$. Man beschreibt in und um die Grundfläche Vielecke, deren Flächen G' und G'' seyen, so ist $G > G'$ und $G < G''$. Durch die Seiten des innern Vielecks legt man Ebenen, deren Endkanten in der Seitenfläche des Cylinders liegen, und in der krummen Linie des schiefen Schnitts $fghk$ ein eingeschriebenes Vieleck bilden, dessen Schwerpunct l' sey, die von demselben auf die Grundfläche gefällte Höhe $l'm' = L'$. Durch die Seiten des äussern Vielecks lege man Ebenen, welche die Seitenfläche des Cylinders berühren, und um die krumme Linie des schiefen Schnitts $fghk$ ein umschriebenes Vieleck bilden, dessen Schwerpunct l'' sey, die von demselben auf die Grundfläche gefällte Höhe $l''m'' = L''$. Also ist (VII. 23.) der körperliche Inhalt des eingeschriebenen Prisma $= L' \cdot G'$, des umschriebenen Prisma $= L'' \cdot G''$, und der körperliche Inhalt des schief geschnittenen Cylinders $K > L' \cdot G'$ und $K < L'' \cdot G''$. Je grösser die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks genommen wird, desto mehr nähern sich die Flächen G', G'' der Fläche G, und die Höhen L', L'' der Höhe L als ihrer gemeinschaftlichen Grenze. Die Unterschiede zwischen G', G'' und G, zwischen L', L'' und L, können kleiner als jede denkbare Grösse werden. Folglich ist genau $K = L \cdot G$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = c \cdot L \cdot D^2$.

25.



Die körperlichen Räume ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.

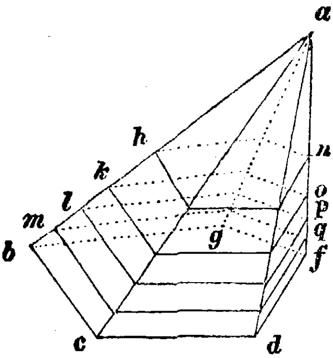
Wenn die Pyramide $abcdfg$ durch eine mit der Grundfläche $bcdfg$ parallele Ebene $hklmn$ geschnitten wird, so ist (IV. 56.) $abcdfg \sim ahklmn$. Fället man von der Spitze a auf die parallelen Grundflächen $bcdfg = G$, $hklmn = G'$ die Höhen $ao = L$, $ap = L'$, so ist (VII. 19.) der körperliche Inhalt $abcdfg$ oder $K = \frac{1}{3}L \cdot G$, $ahklmn$ oder $K' = \frac{1}{3}L' \cdot G'$. Zieht man in den Grundflächen zwei beliebige gleichnamige oder parallele Linien, z. B. $bd = D$, $hl = D'$, und setzt man $G = c \cdot D^2$, so ist auch $G' = c \cdot D'^2$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$, $K' = \frac{1}{3}c \cdot L' \cdot D'^2$, und $L : L' = D : D'$, also $L \cdot D^2 : L' \cdot D'^2 = D^3 : D'^3$, also $K : K' = D^3 : D'^3$, oder $K : K' = L^3 : L'^3$.

26.

Die körperlichen Räume ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.

Aehnliche Polyeder bestehen (IV. 57.) aus ähnlichen auf ähnliche Art zusammengestellten Pyramiden. Sind also D, D' zwei gleichnamige oder parallele Linien der Polyeder, so verhalten sich (VII. 25.) je zwei ähnliche Pyramiden wie $D^3 : D'^3$, also auch die körperlichen Räume der ganzen Polyeder $K : K' = D^3 : D'^3$.

27.



Eine Pyramide durch Ebenen, welche der Grundfläche parallel sind, in Theile von gleichem körperlichem Inhalt zu theilen.

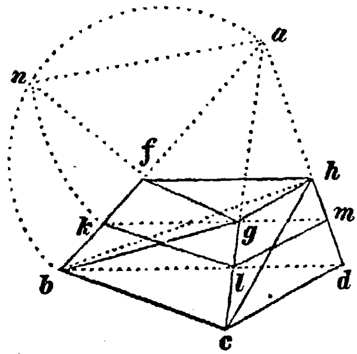
Wenn die Ebene lp der Grundfläche $bcdfg$ parallel ist, so sind die Pyramiden alp, $abcdfg$ (IV. 56.) einander ähnlich, also verhalten sich (VII. 25.) ihre körperlichen Räume wie $al^3 : ab^3$. Wenn sich also diese körperlichen Räume auch wie die Zahlen $m : n$ verhalten sollen, so muss $al^3 : ab^3 = m : n$, also $al : ab = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$ seyn, oder $al = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot ab$. Soll also die Pyramide in n gleiche Theile getheilt werden, so berechnet man (VII. 6.) die Cubikwurzeln der Brüche $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ u. s. w. und nimmt $ah = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \cdot ab$, $ak = \sqrt[3]{\frac{2}{n}} \cdot ab$, $al = \sqrt[3]{\frac{3}{n}} \cdot ab$ u. s. w.

Wenn ein Polyeder in gleiche Theile zu theilen ist, so zerlegt man es durch Ebenen in Pyramiden, welche einen angenommenen Punct zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Endflächen des Polyeders zu Grundflächen haben.

Beispiel. Eine Pyramide, in welcher eine Kante $D = 36$ Zoll gemessen worden ist, in fünf gleiche Theile zu theilen, d. h. die der Linie D gleichnamigen Linien in den parallelen Abtheilungsebenen zu finden.

$\frac{1}{5}$ 9,30103	$\frac{2}{5}$ 9,60206	$\frac{3}{5}$ 9,77815	$\frac{4}{5}$ 9,90309
9,76701	9,86735	9,92605	9,96770
D 1,55630	D 1,55630	D 1,55630	D 1,55630
1,32331	1,42365	1,48235	1,52400
21″,053	26″,525	30″,363	33″,419

28.



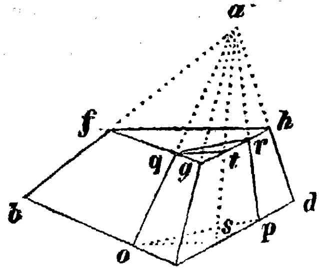
Der körperliche Inhalt eines parallel abgestumpften Tetraeders ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittlern Proportionalfläche.

Das parallel abgestumpfte Tetraeder ist $bcdfgh$, die parallelen Grundflächen sind $\triangle\, bcd = A$, $\triangle\, fgh = C$, die Endkanten bf, cg, dh treffen in a zusammen, die von einem Puncte der obern Grundfläche fgh auf die untere Grundfläche gefällte Höhe ist L, der körperliche Inhalt des abgestumpften Tetraeders $bcdfgh$ ist K.

Erster Beweis.

Man zieht hb, hc, bg, so ist $K = hbcd + hbcg + hbfg$ (VII. 18.), $hbcd = \frac{1}{3}L \cdot A$, $hbfg = \frac{1}{3}L \cdot C$. Die Tetraeder $hbcd$, $hbcg$ haben in b eine gemeinschaftliche Spitze und verhalten sich also (VII. 18.) wie ihre Grundflächen, wie $\triangle\, hcd : hcg = cd : gh$. Die Tetraeder $hbcg$, $hbfg$ haben in h eine gemeinschaftliche Spitze und verhalten sich also wie ihre Grundflächen, wie $\triangle\, bcg : bfg = bc : fg$. Aber $cd : gh = bc : fg$, also $hbcd : hbcg = hbcg : hbfg$. Setzt man $hbcg = \frac{1}{3}L \cdot B$, so ist $hbcd : hbcg = A : B$, $hbcg : hbfg = B : C$, also $A : B = B : C$. Nimmt man zwischen ab, af die mittlere Proportionallinie ak (III. 59.), so ist $ab : ak = ak : af$, $ab^2 : ak^2 = ak^2 : af^2$. Zieht man durch eine Ebene klm mit bcd und fgh parallel, so ist $\triangle\, bcd : klm = bc^2 : kl^2 = ab^2 : ak^2$, $\triangle\, klm : fgh = kl^2 : fg^2 = ak^2 \;\; af^2$, also $A : klm = klm : C$, also $\triangle\, klm = B$, und $K = \frac{1}{3}L \cdot (A + B + C)$.

Zweiter Beweis.



Man ziehe in der untern Grundfläche eine beliebige Linie $op = D$, ziehe eine Ebene aop, welche die obere Grundfläche in $qr = d$ schneidet. Man setze $\triangle\, bcd = A = c \cdot D^2$, so ist $\triangle\, fgh = C = c \cdot d^2$. Man fälle von a auf bcd die Höhe $as = L'$, welche die Ebene fgh in t schneidet,

$a\,t = L''$, so ist das Tetraeder $a\,b\,c\,d$ oder $K' = \frac{1}{3}L' \cdot A = \frac{1}{3}c \cdot L' \cdot D^2$, das Tetraeder $a\,f\,g\,h$ oder $K'' = \frac{1}{3}L'' \cdot C = \frac{1}{3}c \cdot L'' \cdot d^2$. Die körperlichen Räume der ähnlichen Tetraeder verhalten sich (VII. 25.) wie $K' : K'' = D^3 : d^3$, $K = K' - K''$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also $K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3)$, aber $\frac{K'}{D^3} = \frac{\frac{1}{3}c \cdot L'}{D}$, also ist $K = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L'}{D}(D^3 - d^3)$. Aber $L' : L'' = D : d$, $L' - L'' = L$, also $L' : L = D : D - d$, also $\frac{L'}{D} = \frac{L}{D - d}$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L}{D - d}(D^3 - d^3)$. Aber (VII. 4.) $\frac{D^3 - d^3}{D - d} = D^2 + D \cdot d + d^2$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L(D^2 + D \cdot d + d^2)$.

Hier ist $c \cdot D^2 = A, \quad c \cdot d^2 = C$,

$$c \cdot D^2 : c \cdot D \cdot d = D : d,$$
$$c \cdot D \cdot d : c \cdot d^2 = D : d,$$

also $\qquad A : c \cdot D \cdot d = c \cdot D \cdot d : C.$

Setzt man also $c \cdot D \cdot d = B$, so ist $A : B = B : C$.

Der dreitheilige Ausdruck $K = \frac{1}{3}c \cdot L(D^2 + D \cdot d + d^2)$ lässt sich zur bequemern Berechnung in einen zweitheiligen Ausdruck verwandeln. Nämlich

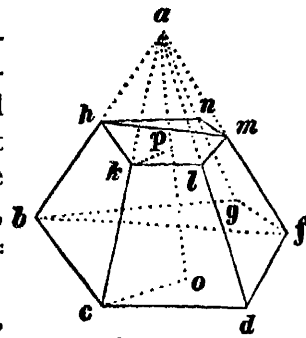
$(D + d)^2 = D^2 + 2D \cdot d + d^2$, $(D - d)^2 = D^2 - 2D \cdot d + d^2$,
also $3(D + d)^2 + (D - d)^2 = 4D^2 + 4D \cdot d + 4d^2$,
also $K = \frac{1}{4}c \cdot L \cdot (D + d)^2 + \frac{1}{12}c \cdot L \cdot (D - d)^2$.

Beispiel. Die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, die untere Randkante $D = 10'\ 3''$, die obere $d = 8'\ 5''$, (V. 51.) $c = 0{,}4330127$, die Höhe $L = 30'\ 7''$.

L	2,56467	L	2,56467	I	1153,63
$D + d$	2,35025	$D - d$	1,34242	II	3,71
$D + d$	2,35025	$D - d$	1,34242	$K =$	1157,34 Cub.-F.
c	9,63650	c	9,63650		
$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{12}$	8,92082		
1728	6,76246	1728	6,76246		
I	3,06207	II	0,56929		

29.

Der körperliche Inhalt einer parallel abgestumpften Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittlern Proportionalfläche.



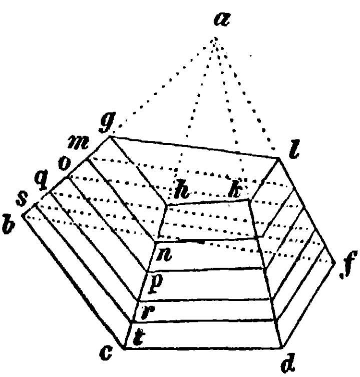
Man wählt in den parallelen Grundflächen zwei beliebige gleichnamige parallele Linien $bf = D$, $hm = d$, und setzt $bcdfg$ oder $A = c \cdot D^2$, so ist $hklmn$ oder $C = c \cdot d^2$. Man setzt die Höhe $ao = L'$, $ap = L''$, $op = L$, so ist (VII. 19.) $abcdfg$ oder $K' = \frac{1}{3}c \cdot L' \cdot D^2$, $ahklmn$ oder $K'' = \frac{1}{3}c \cdot L'' \cdot d^2$, (VII. 25.) $K' : K'' = D^3 : d^3$, $K' - K'' = K$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also $K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L'}{D}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L}{D - d}(D^3 - d^3)$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot (D^2 + D \cdot d + d^2)$. Oder $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot (A + B + C)$, wenn $A : B = B : C$. Oder

$$K = \tfrac{1}{4}c \cdot L \cdot (D + d)^2 + \tfrac{1}{12}c \cdot L \cdot (D - d)^2.$$

Beispiel. Die Grundflächen sind regelmässige Achtecke, die Halbmesser der umschriebenen Kreise $D = 5$ Fuss, $d = 4\frac{1}{2}$ Fuss, also (VI. 51.) $c = 2{,}8284$, die Höhe $L = 7\frac{1}{2}$ Fuss.

L	0,87506	L	0,87506	I	478,61
$D + d$	0,97772	$D - d$	9,69897	II	0,44
$D + d$	0,97772	$D - d$	9,69897	$K =$	479,05 Cub.-F.
c	0,45154	c	0,45154		
$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{12}$	8,92082		
I	2,67998	II	9,64536		

30.



Eine parallel abgestumpfte Pyramide durch Ebenen, welche den Grundflächen parallel sind, in Theile von gleichem körperlichen Inhalt zu theilen.

Es soll z. B. $ghop : ghbc = m : n$ seyn. Es ist aber (VII. 25.) $agh : aop = ag^3 : ao^3 = gh^3 : op^3$, $agh : abc = ag^3 : ab^3 = gh^3 : bc^3$.

Hieraus folgt:

$$oghp : agh = ao^3 - ag^3 : ag^3,$$
$$agh : bghc = ag^3 : ab^3 - ag^3,$$

also $oghp : bghc = ao^3 - ag^3 : ab^3 - ag^3$,

also $ao^3 - ag^3 : ab^3 - ag^3 = m : n$,

ebenso $op^3 - gh^3 : bc^3 - gh^3 = m : n$.

Hieraus $ao^3 - ag^3 = (ab^3 - ag^3)\cdot\frac{m}{n}$, $op^3 - gh^3 = (bc^3 - gh^3)\cdot\frac{m}{n}$

also $ao^3 = ab^3\cdot\frac{m}{n} + ag^3\left(1 - \frac{m}{n}\right)$, $op^3 = bc^3\cdot\frac{m}{n} + gh^3\left(1 - \frac{m}{n}\right)$.

Bei der Berechnung lässt sich mit Vortheil die Aufgabe anwenden (VI. Aufg. 71.): aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe zu finden.

Beispiel. $bc = 80$, $gh = 30$, $bg = 100$, also $ab = 160$, $ag = 60$; die Zahl der Theile $n = 5$, also die Theilungsbrüche 0,2; 0,4; 0,6; 0,8.

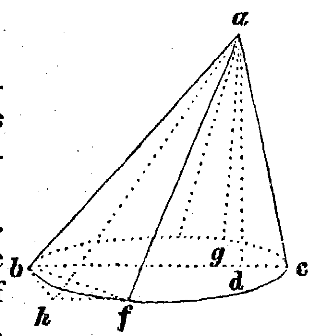
ag^3	5,33445	ag^3	5,33445
0,8	9,90309	0,6	9,77815
ab^3	6,61236	ab^3	6,61236
0,2	9,30103	0,4	9,60206
	5,23754		5,11260
	5,91339		6,21442
$tg^2\ x$	9,32415	$tg^2\ x$	8,89818
$tg\ x$	9,66207	$tg\ x$	9,44909
$cos\ x$	9,95844	$cos\ x$	9,98347
$cos^2\ x$	9,91688	$cos^2\ x$	9,96694
am^3	5,99651	ao^3	6,24748
am	1,99884	ao	2,08249
gh	1,47712	gh	1,47712
ag	1,77815	ag	1,77815
mn	1,69781	op	1,78146

ag^3	5,33445	ag^3	5,33445
0,4	9,60206	0,2	9,30103
ab^3	6,61236	ab^3	6,61236
0,6	9,77815	0,8	9,90309
	4,93651		4,63548
	6,39051		6,51545
$tg^2\ x$	8,54600	$tg^2\ x$	8,12003
$tg\ x$	9,27300	$tg\ x$	9,06002
$cos\ x$	9,99250	$cos\ x$	9,99716
$cos^2\ x$	9,98500	$cos^2\ x$	9,99432
aq^3	6,40551	as^3	6,52113
aq	2,13517	as	2,17371
gh	1,47712	gh	1,47712
ag	1,77815	ag	1,77815
qr	1,83414	st	1,87268

$am = 99{,}73$, $ao = 120{,}92$, $aq = 136{,}51$, $as = 149{,}18$,
$mn = 49{,}866$, $op = 60{,}458$, $qr = 68{,}256$, $st = 74{,}590$,
$mo = 21{,}19$, $oq = 15{,}59$, $qs = 12{,}67$, $sb = 10{,}82$.
$gm = 39{,}73$

Um die Probe zu machen, ob die abgestumpften Pyramiden *gmnh*, *mopn* u. s. w. einander gleich, und der fünfte Theil von *gbch* sind, berechnet man ihren Inhalt nach VII. 29., indem man statt der Höhen die denselben proportionirten Abschnitte *gm*, *mo* u. s. w. setzt.

31.



Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche des Kegels (IV. 60.) sey eine beliebige krumme Linie *bfc*, die Höhe $ad = L$ senkrecht auf die Ebene der Grundfläche gezogen, der Inhalt der Grundfläche $bfc = G$. Man beschreibe in und um die Grundfläche ein Vieleck; *bf* sey eine Seite des eingeschriebenen Vielecks; *bh*, *fh* Theile der Umfangslinie des umschriebenen Vielecks. Durch die Seiten des eingeschriebenen Vielecks und die Spitze *a* lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen einer dem Kegel eingeschriebenen Pyramide, deren Endkanten in der Seitenfläche des Kegels liegen. Durch die Seiten des umschriebenen Vielecks und die Spitze *a* lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen einer dem Kegel umschriebenen Pyramide, und berühren die Seitenflächen desselben in graden Linien, welche durch die Spitze *a* gehen. Wenn man den Inhalt des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks durch G', G'' bezeichnet, so ist der körperliche Inhalt der innern Pyramide (VII. 19.) $= \frac{1}{3}L \cdot G'$, der der äussern Pyramide $= \frac{1}{3}L \cdot G''$. Also ist der körperliche Inhalt des Kegels $K > \frac{1}{3}L \cdot G'$ und $< \frac{1}{3}L \cdot G''$. Je kleiner aber die Seiten der Vielecke genommen werden, desto mehr nähern sich die Pyramiden in Rücksicht des körperlichen Inhalts dem Kegel, desto kleiner werden also die Unterschiede $K - \frac{1}{3}L \cdot G'$ und $\frac{1}{3}L \cdot G'' - K$. Zugleich ist auch $G > G'$ und $G < G''$, und die Unterschiede $G - G'$, $G'' - G$ werden desto kleiner, je kleiner die Seiten der Vielecke genommen werden. Da $K > \frac{1}{3}L \cdot G - \frac{1}{3}L\,(G - G')$, und $K <$

$\frac{1}{3}L \cdot G + \frac{1}{3}L\,(G'' - G)$, der zweite Theil aber kleiner als jede denkbare Grösse werden kann, so muss genau $K = \frac{1}{3}L \cdot G$ seyn.

Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniss der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $G = c \cdot D^2$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$.

Wenn die Grundfläche ein Kreis ist, dessen Durchmesser $= D$, Umfang $= P$, so ist (V. 58.)

$$K = \tfrac{1}{12}\pi\, L \cdot D^2, \quad \text{oder } K = \frac{1}{12\pi}\, L \cdot P^2.$$

Wenn die Grundfläche eine Ellipse ist, deren Axen D, d sind, so ist (V. 67.)

$$K = \tfrac{1}{12}\pi\, L \cdot D \cdot d = \tfrac{1}{48}\pi\, L \cdot (D + d)^2 - \tfrac{1}{48}\pi\, L \cdot (D - d)^2,$$

d. h. der elliptische Kegel kann als der Unterschied zweier Kreiskegel berechnet werden. Bei einem gleichseitigen Kegel (IV. 61.) ist die Grundfläche immer ein Kreis, die Seitenlinie $= E$ ist gegen die Grundfläche unter dem Winkel n geneigt. Wenn also der Durchmesser des Kreises $= D$, Umfang $= P$, so ist beim gleichseitigen Kegel:

$$tg\; n = \frac{2L}{D} = \frac{2\pi \cdot L}{P}, \quad E \cdot sin\; n = L,$$

(IV. 61.) die Seitenfläche $A = \frac{1}{2}E \cdot P = \frac{1}{2}\pi\, E \cdot D$, die ganze Oberfläche $F = \frac{1}{4}\pi\, D\,(2E + D)$, der körperliche Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi\, L \cdot D^2 = \dfrac{1}{12\pi}\, L \cdot P^2$.

B e i s p i e l e.

1) Bei einem schiefen Kreiskegel ist die Höhe $L = 15'$, der Durchmesser $D = 14'$.

L	1,17609	
D	1,14613	
D	1,14613	
$\frac{1}{12}\pi$	9,41797	
K	2,88632	= 769,69 Cub.-F.

2) Bei einem schiefen Kreiskegel ist die Höhe $L = 15'$, Umfang der Grundfläche $P = 42'$.

L	1,17609	
P	1,62325	
P	1,62325	
$\frac{1}{12}\pi$	8,42367	
K	2,84626	= 701,87 Cub.-F.

3) Bei einem senkrechten Kreiskegel ist der Durchmesser der Grundfläche $D = 8'$, die Höhe $L = 3'$.

L	0,47712	L	0,47712	E	0,69897
D	0,90309	2	0,30103	D	0,90309
D	0,90309	D	0,90309	$\frac{1}{2}\pi$	0,19612
$\frac{\pi}{12}$	9,41797	$tg\,n$	9,87506	A	1,79818 $=$ 62,832 □F.
		$sin\,n$	9,77815	D^2	1,80618
K	1,70127	E	0,69897	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
				G	1,70127 $=$ 50,265 □F.

$K = 50{,}265$ Cub.-F.

$F = 113{,}097$ □F.

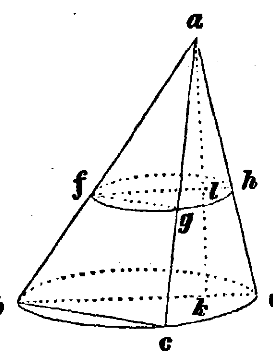
4) Bei einem senkrechten Kreiskegel ist $P = 64'6''$, $L = 8'7''$.

L	0,93366	L	0,93366	E	1,12649
P	1,80956	2	0,30103	P	1,80956
P	1,80956	π	0,49715	$\frac{1}{2}$	9,69897
$\frac{1}{12\pi}$	8,42367	P	1,80956	A	2,63502 $=$ 431,54 □F.
K	2,97645	$tg\,n$	9,92228	P^2	3,61912
		$sin\,n$	9,80717	$\frac{1}{4\pi}$	8,90078
		E	1,12649	G	2,51990 $=$ 331,05

$K = 947{,}22$ Cub.-F.

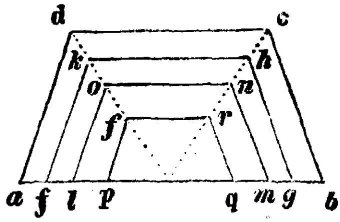
$F = 762{,}59$ □F.

32.



Die körperlichen Räume ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.

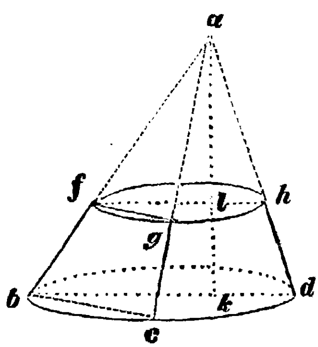
Wenn der Kegel $abcd$ durch eine mit der Grundfläche bcd parallele Ebene fgh geschnitten wird, so ist (IV. 64.) $abcd \sim afgh$. Fället man von der Spitze a auf die parallelen Grundflächen $bcd = G$, $fgh = G'$, die Höhen $ak = L$, $al = L'$, so ist (VII. 31.) der körperliche Inhalt $abcd$ oder $K = \frac{1}{3}L \cdot G$, $afgh$ oder $K' = \frac{1}{3}L' \cdot G'$. Zieht man in den Grundflächen zwei beliebige gleichnamige oder parallele Linien z. B. $bc = D$, $fg = D'$, und setzt man $G = c \cdot D^2$, so ist auch $G' = c \cdot D'^2$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$, $K' = \frac{1}{3}c \cdot L' \cdot D'^2$, $L : L' = D : D'$, also $L \cdot D^2 : L' \cdot D'^2 = D^3 : D'^3$, also $K : K' = D^3 : D'^3$, oder $K : K' = L^3 : L'^3$.



Beispiel. Ein Einsatzgewicht von einem Pfunde *a b c d,* in Form eines abgestumpften Kegels soll in einzelne Gewichtstheile so getheilt werden, dass die vollen Stücke *f g h k, l m n o, p q r s* u. s. w. dem ganzen Stück *a b c d* ähnlich sind. Die Verhältnisse der gleichnamigen Linien sind also:

für 32 Loth .... $= 1$,
» 16 » $\sqrt[3]{\frac{16}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79370$,
» 8 » $\sqrt[3]{\frac{8}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}62996$,
» 4 » $\sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$,
» 2 » $\sqrt[3]{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}39685$,
» 1 » $\sqrt[3]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}31498$,
» $\frac{1}{2}$ » $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$,
» $\frac{1}{4}$ » $\sqrt[3]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}19842$.

33.



Der körperliche Inhalt eines parallel abgestumpften Kegels ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittlern Proportionalfläche.

Man wählt in den parallelen Grundflächen *b c d, f g h* zwei beliebige gleichnamige parallele Linien $bc = D$, $fg = d$, und setzt die Grundfläche *b c d* oder $A = c \cdot D^2$, so ist (IV. 62. 61.) die Grundfläche *f g h* oder $C = c \cdot d^2$. Man setzt die Höhe $ak = L'$, $al = L''$, $bk = L$, so ist (VII. 31.) der Inhalt des Kegels *a b c d* oder $K' = \frac{1}{3}c \cdot L' \cdot D^2$, *a f g h* oder $K'' = \frac{1}{3}c \cdot L'' \cdot d^2$, (VII. 32.) $K' : K'' = D^3 : d^3$ der Inhalt des abgestumpften Kegels *b c d f g h* oder $K = K' - K''$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also $K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L'}{D}(D^3 - d^3)$. Aber (VII. 4.) $D^3 - d^3 = (D - d)(D^2 + D \cdot d + d^2)$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot \frac{L'(D - d)}{D}(D^2 + D \cdot d + d^2)$. Aber $L' : L'' = D : d$, $L' - L'' = L$, also $L' : L = D : D - d$, also $K = \frac{1}{3}c \cdot L (D^2 + D \cdot d + d^2)$.

Setzt man $A:B = B:C$, so ist $c \cdot D^2 : B = B : c \cdot d^2$, also $B = c \cdot D \cdot d$, also $K = \frac{1}{3}L \cdot (A + B + C)$. Der dreitheilige Ausdruck lässt sich zur bequemern Berechnung in einen zweitheiligen verwandeln:
$(D+d)^2 = D^2 + 2D \cdot d + d^2$, $(D-d)^2 = D^2 - 2D \cdot d + d^2$, $3(D+d)^2 + (D-d)^2 = 4D^2 + 4D \cdot d + 4d^2$. Also

$$K = \tfrac{1}{4}c \cdot L \cdot (D+d)^2 + \tfrac{1}{12}c \cdot L \cdot (D-d)^2.$$

Wenn die Grundflächen Kreise sind, deren Durchmesser $= D$ und d, Umfänge $= P$ und p,
so ist $K = \frac{1}{16}\pi \cdot L \cdot (D+d)^2 + \frac{1}{48}\pi \cdot L \cdot (D-d)^2$,

$$\text{oder } K = \frac{1}{16\pi} \cdot L \cdot (P+p)^2 + \frac{1}{48\pi} \cdot L \cdot (P-p)^2.$$

Bei einem parallel abgestumpften gleichseitigen Kegel (IV. 63.) sind die Grundflächen immer Kreise, die Seitenlinie $= E$ ist gegen die Grundflächen unter dem Winkel n geneigt, also ist hier

$$tg\,n = \frac{2L}{D-d}, \quad E \cdot sin\,n = L, \quad E \cdot cos\,n = \tfrac{1}{2}(D-d),$$

(IV. 63.) die Seitenfläche $A = \frac{1}{2}E \cdot (P+p) = \frac{1}{2}\pi \cdot E \cdot (D+d)$.

Beispiele.

1) Bei einem runden Gefässe ist die Höhe $L = 36$ Zoll, die innere Weite oben $d = 18''$, unten $D = 22''$.

L	1,55630	L	1,55630	L	1,55630
$D+d$	1,60206	$D-d$	0,60206	2	0,30103
$D+d$	0,60206	$D-d$	0,60206	$D-d$	0,60206
$\frac{1}{16}\pi$	9,29303	$\frac{1}{48}\pi$	8,81591	$tg\,n$	1,25527
I	4,05345	II	1,57633	$sin\,n$	9,99933
				E	1,55697

E	1,55697
$D+d$	1,60206
$\frac{1}{2}\pi$	0,19612
A	3,35515

$A = 2265{,}4$ □Zoll.

I $= 11309{,}7$
II $= 37{,}7$
$K = 11347{,}4$ Cubikzoll.

2) Bei einem runden Gefässe ist die Höhe $L = 36''$, der innere Umfang oben $p = 54''$, unten $P = 66''$.

L	1,55630	L	1,55630	L	1,55630
$P+p$	2,07918	$P-p$	1,07918	2π	0,79818
$P+p$	2,07918	$P-p$	1,07918	$P-p$	1,07918
$\frac{1}{16\pi}$	8,29873	$\frac{1}{48\pi}$	7,82161	$tg\ n$	1,27530
I	4,01339	II	1,53627	$sin\ n$	9,99939
				E	1,55691

E	1,55691
$P+p$	2,07918
$\frac{1}{2}$	9,69897
A	3,33506

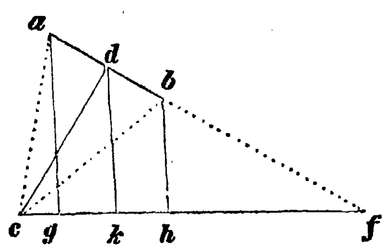
$A = 2163$ □Zoll.

$\mathrm{I} = 10313,2$
$\mathrm{II} = 34,4$
$K = 10347,6$ Cubikzoll.

34.

Die durch die Umdrehung einer graden Linie um eine Axe beschriebene Kegelfläche ist an Inhalt gleich dem Product der beschreibenden Linie mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser der Abstand der Mitte der beschreibenden Linie von der Axe ist.

Oder gleich dem Product der Höhe der Zone mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser die in der Mitte der beschreibenden Linie senkrecht auf dieselbe bis an die Axe gezogene Linie ist.

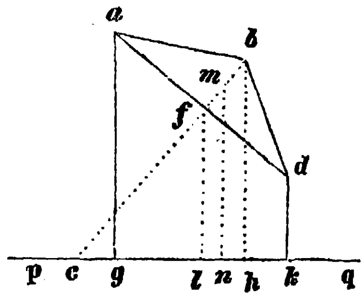


Die Linie ab dreht sich um die Axe cf. Fället man von a, b, d senkrechte Linien ag, bh, dk auf die Axe, so beschreiben bei dieser Umdrehung die Puncte a, b, d Kreise, deren Halbmesser ag, bh, dk sind. Der Punct d ist die Mitte von ab. Der Abstand gh heisst die Projection von ab, oder die Höhe der Zone. Die von fa, fb beschriebenen Kegelflächen sind (IV. 61. VII. 31.) $\pi \cdot ag \cdot af$, $\pi \cdot bh \cdot bf$, also die von ab beschriebene Kegelfläche $A = \pi\,(ag \cdot af - bh \cdot bf)$. Aber $ag = af \cdot \frac{dk}{df}$, $bh = bf \cdot \frac{dk}{df}$, also $A = \pi\,\frac{dk}{df}(af^2 - bf^2)$.

Aber $af^2 - bf^2 = (af + bf)\,(af - bf) = 2\,df \cdot ab$, also $A = 2\pi\,dk \cdot ab$. Zieht man dc senkrecht auf ab, so ist $\frac{dk}{cd} = \frac{gh}{ab}$, also $A = 2\pi\,cd \cdot gh$.

35.

Die durch die Umdrehung eines gleichschenkligen Dreiecks um eine Axe, von den Schenkeln desselben beschriebene Kegelfläche ist an Inhalt gleich dem Product der Höhe der Zone mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser grösser als die von der Mitte des Dreiecks senkrecht auf die Grundlinie, bis an die Axe gezogene Linie ist, und zwar im Verhältniss des Schenkels zur halben Grundlinie.



Das gleichschenklige Dreieck abd dreht sich um die Axe pq. Die Grundlinie ad des Dreiecks ist in f halbirt, die Höhe bf in m halbirt, und bis zur Axe pq in c verlängert. Die Puncte a, b, d, f, m beschreiben bei der Umdrehung Kreise, deren Halbmesser die auf die Axe senkrecht gezogenen Linien ag, bh, dk, fl, mn sind. Die von ab, bd beschriebene Kegelfläche ist (VII. 34.) $A = \pi\, ab\,(ag + bh) + \pi\, bd\,(bh + dk)$.

Da $ab = bd$ ist, so ist $A = \pi\, ab\,(ag + 2bh + dk)$, oder $A = 2\pi\, ab\,(fl + bh) = 4\pi\, ab \cdot mn$.

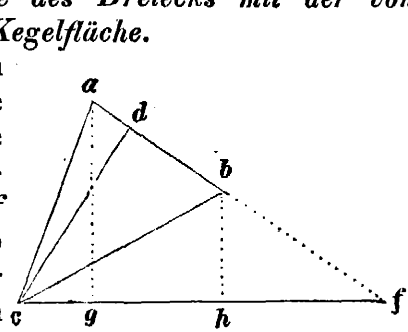
Aber $\frac{mn}{mc} = \frac{gk}{ad} = \frac{gk}{2af}$, also $A = 2\pi \cdot mc \cdot gk \cdot \frac{ab}{af}$.

Also $A : 2\pi \cdot mc \cdot gk = ab : af$.

Die Linie gk heisst die Höhe der Zone oder die Projection der Grundlinie ad auf die Axe.

36.

Der körperliche Inhalt des Sectors, welcher durch Umdrehung eines Dreiecks um eine Axe, in welcher die Spitze des Dreiecks liegt, beschrieben wird, ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe des Dreiecks mit der von der Gegenseite beschriebenen Kegelfläche.



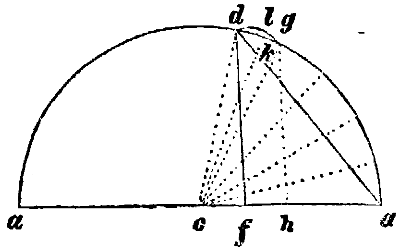
Das Dreieck abc dreht sich um die Axe cf, die Gegenseite des Dreiecks ist ab, die Höhe cd, die Linien ag, bh sind senkrecht auf cf. Der vom $\triangle\, caf$ beschriebene Körper ist (VII. 31.) $= \frac{1}{3}\pi \cdot ag^2 \cdot cg + \frac{1}{3}\pi \cdot ag^2 \cdot fg = \frac{1}{3}\pi \cdot ag^2 \cdot cf$. Der vom

$\triangle\ cbf$ beschriebene Körper ist $= \frac{1}{3}\pi \cdot bh^2 \cdot ch + \frac{1}{3}\pi \cdot bh^2 \cdot fh = \frac{1}{3}\pi \cdot bh^2 \cdot cf$. Also der vom $\triangle\ abc$ beschriebene Körper an Inhalt $K = \frac{1}{3}\pi \cdot ag^2 \cdot cf - \frac{1}{3}\pi \cdot bh^2 \cdot cf$.

Aber $\frac{ag}{cd} = \frac{af}{cf}$, $\frac{bh}{cd} = \frac{bf}{cf}$.

Also $K = \frac{1}{3}cd \cdot (\pi \cdot ag \cdot af - \pi \cdot bh \cdot bf)$. Hier ist (VII. 34.) $\pi \cdot ag \cdot af - \pi \cdot bh \cdot bf$, die von ab beschriebene Kegelfläche.

37.



Die Seitenfläche eines Kugelsegments ist gleich dem Product der Höhe des Segments mit dem Umfange der Kugel.

Der körperliche Inhalt eines Kugelsectors ist gleich dem dritten Theile des Products des Halbmessers der Kugel mit der Seitenfläche des Segments.

Der Halbkreis ada beschreibt durch Umdrehung um die Axe aa eine Kugel (IV. 67.), deren Halbmesser $cd = ca = r$. Man fälle df senkrecht auf aa, so beschreibt der Bogen ad die Seitenfläche eines Kugelsegments, dessen Höhe $af = L$ ist, und dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser df ist. Der Kreissector $acda$ beschreibt einen Kugelsector, dessen Grundfläche die Seitenfläche jenes Kugelsegments ist. Man beschreibe in und um den Bogen ad die Seiten eines regelmässigen Vielecks. Es sey dg eine Seite des eingeschriebenen Vielecks, gh senkrecht auf die Axe gezogen, die berührenden Linien $dl = gl$, die halben Seiten des umschriebenen Vielecks, also ckl senkrecht auf dg. Bei der Umdrehung um die Axe beschreiben die graden Linien dg, dl, lg Kegelflächen, und die Dreiecke dcg, dcl, gcl beschreiben Sectoren. Setzt man $ck = r'$, $\frac{1}{2}(ck + cl) \cdot \frac{dl}{dk} = r''$, so ist die von dg beschriebene Kegelfläche (VII. 34.) $= 2\pi \cdot r' \cdot fh$, die von dl, lg beschriebene Kegelfläche (VII. 35.) $= 2\pi \cdot r'' \cdot fh$, der vom $\triangle\ dcg$ beschriebene Sector (VII. 36.) $= \frac{2}{3}\pi \cdot r' \cdot r' \cdot fh$, der vom Viereck $dclg$ beschriebene Sector $= \frac{2}{3}\pi \cdot r \cdot r'' \cdot fh$. Da alle Seiten des eingeschriebenen Vielecks, so wie alle Seiten des umschriebenen Vielecks gleich sind, so sind in den obigen Ausdrücken alle Abschnitte fh mit denselben Factoren multiplicirt, die Summe dieser Abschnitte von a bis f ist $af = L$. Wenn also die Seitenfläche des Kugelsegments $= A$, der körperliche Inhalt des Kugelsectors $= K$, so ist

$$A > 2\pi \cdot r' \cdot L, \qquad A < 2\pi \cdot r'' \cdot L,$$
$$K > \tfrac{2}{3}\pi \cdot r' \cdot r' \cdot L, \qquad K < \tfrac{2}{3}\pi \cdot r \cdot r'' \cdot L.$$

Oder:

$$A > 2\pi \cdot r \cdot L - 2\pi (r - r') \cdot L, \quad A < 2\pi r \cdot L + 2\pi (r'' - r) \cdot L,$$
$$K > \tfrac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot L - \tfrac{2}{3}\pi (r^2 - r'^2) \cdot L, \quad K < \tfrac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot L + \tfrac{2}{3}\pi \cdot r (r'' - r) \cdot L.$$

Je grösser man die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks nimmt, desto mehr nähern sich die Linien r', r'' dem Halbmesser als ihrer gemeinschaftlichen Grenze. In den obigen Ausdrücken können also die Unterschiede $r - r'$, $r^2 - r'^2$, $r'' - r$ kleiner als jede denkbare Grösse werden, folglich ist genau

$$A = 2\pi \cdot r \cdot L, \qquad K = \tfrac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot L = \tfrac{1}{3} r \cdot A.$$

Hier ist $2\pi \cdot r = P$ der Umfang der Kugel, also $A = P \cdot L$.

Setzt man die Seitenlinie des Segments $ad = E$, ihren Neigungswinkel gegen die Grundfläche $\angle\, adf = n$, den Durchmesser der Grundfläche $2\,df = D$, so ist der halbe Centralwinkel $acd = 2n$, der ganze Centralwinkel $m = 2 \cdot acd = 4n$, auch ist

$$\frac{2L}{D} = tg\ n, \quad E = \frac{L}{sin\ n} = \frac{D}{2cos\ n}, \quad L = 2r \cdot sin^2\ n,$$

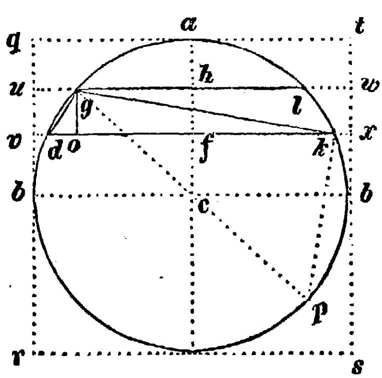
also die Seitenfläche des Segments:

$$A = 4\pi \cdot r^2 \cdot sin^2\ n = 4\pi \cdot r^2 \cdot sin^2\ \tfrac{1}{4}m,$$
$$A = \pi \cdot E^2 = \pi \cdot L^2 + \tfrac{1}{4}\pi \cdot D^2 = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot \frac{D}{cos\ n}.$$

Der körperliche Inhalt des Kugelsectors:

$$K = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot sin^2\ \tfrac{1}{4}m.$$

38.



Die Seitenfläche einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Kugelzone ist gleich dem Product der Höhe der Zone mit dem Umfang der Kugel.

Der Umfang der Kugel sey $P = 2\pi \cdot r$, so ist (VII. 37.) die Seitenfläche des Segments $gal = P \cdot ah$, des Segments $dak = P \cdot af$. Wenn also $gl \frown dk$, $fh = go = L$ die Höhe der Zone ist, so ist ihre Seitenfläche $A = P \cdot L$ oder $A = 2\pi \cdot r \cdot L$.

Da $\triangle\, god \sim gpk$, so ist $\frac{go}{dg} = \frac{gk}{gp}$, also $gp \cdot go = dg \cdot gk$. Setzt man also die Seitenlinien der Zone $dg = E$, $gk = E'$, so ist die Seitenfläche $A = \pi \cdot E \cdot E'$.

Setzt man die Durchmesser der Grundflächen der Kugelzone $dk = D$, $gl = d$, die Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundfläche $gdk = n$, $gkd = n'$, so ist $\frac{2L}{D-d} = tg\, n$, $\frac{2L}{D+d} = tg\, n'$, $E = \frac{L}{sin\, n} = \frac{D-d}{2cos\, n'}$,

$$E' = \frac{L}{sin\, n'} = \frac{D+d}{2cos\, n'},\quad A = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot \frac{D+d}{cos\, n'}.$$

Wenn man um die Kugel einen gleichseitigen Cylinder $qrst$ beschreibt, so schneiden die Ebenen der Grundflächen oder Parallelkreise auf der Seitenfläche dieses Cylinders eine Zone ab, deren Seitenfläche derjenigen der Kugelzone gleich ist. Parallelkreise, welche die Axe der Kugel in gleiche oder proportionirte Theile theilen, theilen auch die Oberfläche der Kugel in gleiche oder proportionirte Theile. Setzt man die Mittelpunctswinkel $dck = M$, $gcl = m$, so ist $dg = E = 2r \cdot sin\, \frac{1}{4}\,(M - m)$, $gk = E' = 2r \cdot sin\, \frac{1}{4}\,(M + m)$, also $A = 4\pi \cdot r^2 \cdot sin\, \frac{1}{4}\,(M + m) \cdot sin\, \frac{1}{4}\,(M - m)$.

Dieser Ausdruck bleibt immer gültig, die Grundflächen der Zone mögen parallel seyn oder nicht.

Beispiele.

1) Die Höhe der Kugelzone ist $L = 15$ Zoll, die Durchmesser der Grundflächen sind $D = 14$ Zoll, $d = 8$ Zoll, wie gross die Seitenfläche A?

L	1,17609	L	1,17609
2	0,30103	$\frac{1}{2}(D+d)$	1,04139
$D-d$	0,77815	$tg\, n'$	0,13470
$tg\, n$	0,69897	$cos\, n'$	9,77185
$sin\, n$	9,99148	E'	1,26954
E	1,18461		
E'	1,26954		
π	0,49715		
A	2,95130 = 893,92 □Zoll.		

2) Die scheinbare Schiefe der Ecliptik ist im Jahr 1841 $23^0 27',7 = \varepsilon$, wie verhält sich die kalte, gemässigte und halbe heisse Zone zur Halbkugel, oder die beiden kalten, die beiden gemässigten, und die ganze heisse Zone zur Oberfläche der ganzen Erdkugel?

Für die kalte Zone ist (VII. 37.) $m = 2\varepsilon$, also die beiden kalten $= 4\pi \cdot r^2 \cdot 2sin^2\, \frac{1}{2}\varepsilon$. Für die gemässigte Zone ist $M = 2R - 2\varepsilon$, $m = 2\varepsilon$, also die beiden gemässigten $= 4\pi \cdot r^2 \cdot 2 sin\ \frac{1}{2}R \cdot sin\ (\frac{1}{2}R - \varepsilon)$. Für die halbe heisse Zone ist $M = 2R$, $m = 2R - 2\varepsilon$, also die ganze heisse Zone $= 4\pi \cdot r^2 \cdot 2 sin\ (R - \frac{1}{2}\varepsilon)\ sin\ \frac{1}{2}\varepsilon = 4\pi \cdot r^2 \cdot sin\ \varepsilon$.

2	0,30103	2	0,30103	2	0,30103
$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817	$\frac{1}{2}R$	9,84949	$R - \frac{1}{2}\varepsilon$	9,99083
$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817	$\frac{1}{2}R - \varepsilon$	9,56482	$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817
I	8,91737	II	9,71534	III	9,60003

I	kalte	0,08266
II	gem.	0,51921
III	heisse	0,39813
		1,00000

39.

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Product ihres Durchmessers mit dem Umfange, ihr körperlicher Inhalt gleich dem dritten Theile des Products ihres Halbmessers mit ihrer Oberfläche.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus VII. 37., indem man die Höhe des Segments dem Durchmesser gleich setzt, wodurch sich die Seitenfläche des Segments in die Oberfläche der Kugel, der körperliche Inhalt des Kugelsectors in den der Kugel verwandelt.

Demnach ist die Oberfläche einer Kugel 4mal so gross als ihr grösster Kreis, oder gleich einem Kreise, dessen Halbmesser der Durchmesser der Kugel ist. Ihr Inhalt ist gleich dem eines auf dieser Grundfläche ruhenden Kegels, dessen Höhe der Halbmesser der Kugel ist. Auch ist die Oberfläche der Kugel gleich der Seitenfläche des umschriebenen gleichseitigen Cylinders, und der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ des Inhalts dieses Cylinders.

Die Oberfläche der Halbkugel ist doppelt so gross als ihre Grundfläche, der körperliche Inhalt derselben $\frac{2}{3}$ des Products der Höhe mit der Grundfläche.

Setzt man bei der Kugel den Halbmesser $= r$, Durchmesser $= D$, Umfang $= P$, die Länge eines Grades oder den 360sten Theil von $P = G$, die Oberfläche $= F$, den körperlichen Inhalt $= K$, so ist:

$$F = 4\pi \cdot r^2 = \pi \cdot D^2 = \frac{1}{\pi} P^2 = \frac{129600}{\pi} \cdot G^2 = \sqrt[3]{36\pi} \cdot K^{\frac{2}{3}},$$

$$K = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{6}\pi \cdot D^3 = \frac{1}{6\pi^2}P^3 = \frac{7776000}{\pi^2} \cdot G^3 = \sqrt{\frac{1}{36\pi}} \cdot F^{\frac{3}{2}},$$

$$D = \frac{360}{\pi} \cdot G = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot F^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot K^{\frac{1}{3}},$$

$$P = 360 \cdot G = \sqrt{\pi} \cdot F^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{6\pi^2} \cdot K^{\frac{1}{3}}.$$

Hier ist $\frac{360}{\pi} = 114{,}5915590\ 2616464,$

$$\frac{129600}{\pi} = 41252{,}9612494\ 1927103$$

$$\frac{7776000}{\pi^2} = 787873{,}5240028\ 1851074.$$

Die Grösse der Erde wird am bequemsten nach Graden angegeben. Bei jeder Kugel enthält der Umfang 360, der Durchmesser 114,5915 Grade, die Oberfläche nahe 41253 Quadratgrade, der Inhalt 787873,5 Cubikgrade. Die Erde ist ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe entstandenes Sphäroid, wird aber bei genäherten Bestimmungen in der mathematischen Geographie als eine Kugel angenommen, deren Umfang dem des elliptischen Meridians gleich ist, also 360 Erdgrade enthält, welche man in runder Zahl zu 15 geograph. Meilen annimmt, wonach ein Erd-Quadratgrad 225 geogr. □Meilen, ein Erd-Cubikgrad 3375 geogr. Cubikmeilen enthält. Ein solcher Erdgrad beträgt (VI. Aufg. 77.) 364554,765 russ. engl. Fuss oder 104,158 Werst, also ein Erd-Quadratgrad 10849 Quadratwerst, ein Erd-Cubikgrad 1'130016 Cubikwerst.

Bei einer hohlen Kugel, deren äusserer Durchmesser $= D$, Wanddicke $= w$, innerer Durchmesser $= D - 2w = d$ ist, ist der körperliche Inhalt der Wand $\tfrac{1}{6}\pi \cdot (D^3 - d^3) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot w\,(D^2 + D \cdot d + d^2) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot w\,(3D \cdot d + D^2 - 2D \cdot d + d^2) = \pi \cdot w \cdot D \cdot d + \tfrac{4}{3}\pi \cdot w^3$.

Um aus dem Durchmesser den körperlichen Inhalt der Kugel auf eine sehr genäherte Art zu finden, lässt sich eine der folgenden Regeln anwenden:

1) $K = k + a - b - c,\ k = \frac{14}{27}D^3,\ a = \frac{k}{100},\ b = \frac{2a}{100},\ c = \frac{b}{100}.$

2) $K = k - a - b + c,\ k = \frac{11}{21}D^3,\ a = \frac{4k}{10000},\ b = \frac{6 \cdot a}{1000},\ c = \frac{b}{40}.$

Z. B. $D = 14$, $D^3 = 2744$.

Erste Art.		Zweite Art.	
	2744		2744
	10976		2744
	38416		30184
9)	4268,4444	7)	4312
3)		3)	
k . . .	1422,8148	k . . .	1437,33333
a +	14,2281	a —	57493
b —	2845	b —	345
c —	28	c +	8
K =	1436,7556	K =	1436,755

Beispiele.

1) Der Durchmesser $D = 7'$, wie gross die Oberfläche und der Inhalt?

D	0,84510	D	0,84510
D	0,84510	D^2	1,69020
π	0,49715	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900
F	2,18735	K	2,25430

$F = 153,94$ □Fuss, $K = 179,59$ Cub.-Fuss.

2) Der Umfang $P = 22$ Fuss, wie gross die Oberfläche und der Inhalt?

P	1,34242	P	1,34242
P	1,34242	P^2	2,68484
$\frac{1}{\pi}$	9,50285	$\frac{1}{6\pi^2}$	8,22754
F	2,18769	K	2,25480

$F = 154,06$ □Fuss, $K = 179,81$ Cub.-F.

3) Die Oberfläche $F = 156\frac{1}{4}$ □Fuss, wie gross der Durchmesser, Umfang und Inhalt?

F	2,19382	F	2,19382
$F^{\frac{1}{2}}$	1,09691	$F^{\frac{1}{2}}$	1,09691
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	9,75142	$\sqrt{\frac{1}{36\pi}}$	8,97328
$\sqrt{\pi}$	0,24857	K	2,26401
D	0,84833		
P	1,34548		

$D = 7,0523$ F., $P = 22,155$ F., $K = 183,655$ Cub.-F.

4) Der körperliche Inhalt $K = 750,568$ Cubikzoll oder ein Wedro, wie gross der Durchmesser, Umfang und die Oberfläche?

K	2,87539	$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846
$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846	$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846
$\sqrt[3]{6\pi^2}$	0,59081	$\sqrt[3]{36\pi}$	0,68449
$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$	0,09366	F	2,60141
P	1,54927 = 35,422 Zoll.		
D	1,05212 = 11,275 Zoll.		

$F = 399,40$ □Zoll.

5) Vier Kugeln haben die Durchmesser 8′ 7″, 11′, 12′, 17′, wie gross sind ihre körperlichen Räume?

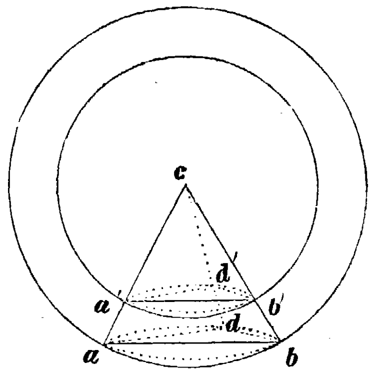
D	0,93366	D	1,04139	D	1,07918	D	1,23045
D^2	1,86732	D^2	2,08278	D^2	2,15836	D^2	2,46090
$\frac{1}{6}\pi$	9,71900	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900
K	2,51998	K	2,84317	K	2,95654	K	3,41035
$K =$	331,1	$=$	696,9	$=$	904,78	$=$	2572,4 Cbf.

6) Wie gross ist der Durchmesser einer Kugel, welche mit einem gleichseitigen Cylinder von 100 Zoll Höhe, gleiche Oberfläche oder gleichen Inhalt hat?

bei gleicher Oberfläche $D = 100 \sqrt{\frac{3}{2}} = 122{,}47$ Zoll,
bei gleichem Inhalt $D = 100 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 114{,}47$ Zoll.

40.

Alle Kugeln sind einander ähnlich, ihre Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate, die körperlichen Räume aber wie die Cuben der Halbmesser, Durchmesser, Umfänge, oder der gleichnamigen Linien überhaupt.



Denn der Mittelpunct einer Kugel bildet mit zwei Puncten der Oberfläche ein Dreieck, dessen Ebene jede concentrische Kugel in einem Kreise schneidet (IV. 67.), in welchem die Halbmesser ein ähnliches Dreieck abschneiden, dessen Sehne jener Sehne parallel ist (V. 53.). Sind also auf der Oberfläche der Kugel drei oder mehrere Puncte gegeben, so werden die vom Mittelpunct nach diesen Puncten gezogenen Halbmesser die Oberfläche der concentrischen Kugel in Puncten schneiden, welche eine ähnliche Figur bilden.

Da (VII. 39.) die Oberfläche der Kugel aus dem Quadrat, der körperliche Inhalt aus dem Cubus des Halbmessers, Durchmessers oder Umfangs, durch Multiplication mit unveränderlichen Zahlen gefunden wird, so ist bei zwei Kugeln

$$\frac{F'}{F} = \frac{r'^2}{r^2} = \frac{D'^2}{D^2} = \frac{P'^2}{P^2} = \frac{G'^2}{G^2},$$

$$\frac{K'}{K} = \frac{r'^3}{r^3} = \frac{D'^3}{D^3} = \frac{P'^3}{P^3} = \frac{G'^3}{G^3},$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{G'}{G} = \frac{F'^{\frac{1}{2}}}{F^{\frac{1}{2}}} = \frac{K'^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}},$$
$$\frac{F'^3}{F^3} = \frac{K'^2}{K^2}.$$

Beispiele.

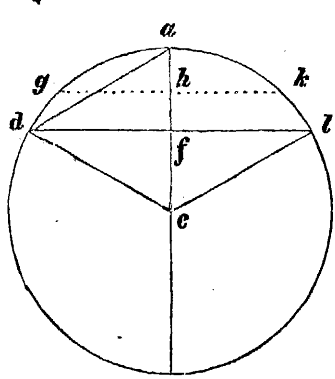
1) Es sey $\frac{D'}{D} = \frac{21}{32}$, so ist
$$\frac{F'}{F} = \frac{441}{1024},\quad \frac{K'}{K} = \frac{9261}{32768}.$$

2) Es sey $\frac{F'}{F} = \frac{1}{20}$, so ist
$$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{1}{4{,}472}.$$

3) Es sey $\frac{K'}{K} = \frac{1}{20}$, so ist
$$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{1}{2{,}7144}.$$

4) Es sey $\frac{D'}{D} = \frac{2}{3}$, so ist
$$\frac{F'}{F} = \frac{4}{9},\quad \frac{K'}{K} = \frac{8}{27},\quad \text{also}\quad \frac{F'^3}{F^3} = \frac{K'^2}{K^2} = \frac{64}{729}.$$

41.



Der körperliche Inhalt eines Kugelsegments ist gleich dem halben Product der Höhe mit der Grundfläche, nebst dem Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser die Höhe des Segments ist.

Der Halbmesser der Kugel sey $= r$, so ist (VII. 37.) der Inhalt des Kugelsectors $dcla = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot af$, und (VII. 31.) der Inhalt des Kegels $dclf = \frac{1}{3}\pi \cdot df^2 \cdot cf = \frac{1}{3}\pi\,(2r - af) \cdot af \cdot cf$, also der körperliche Inhalt des Kugelsegments $dalf$ oder K, durch Subtraction des Kegels vom Kugelsector,

$K = \frac{1}{3}\pi \cdot af(2r^2 - 2r \cdot cf + af \cdot cf)$. Aber $cf = r - af$, also $K = \frac{1}{3}\pi \cdot af^2 \cdot (2r + cf) = \frac{1}{3}\pi \cdot af^2 \cdot (3r - af)$. Setzt man also die Höhe des Segments $af = L$, so erhält man einen Ausdruck, welcher von dieser Höhe und dem Halbmesser der Kugel abhängt, nämlich $K = \pi \cdot L^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi \cdot L^3$.

Es sey der Neigungswinkel der Seitenlinie ad oder E gegen die Grundfläche $adf = n$, so ist der Mittelpunctswinkel des Segments $dcl = m = 4n$, $ad = E = 2r \cdot \sin n$, $af = L = 2r \cdot \sin^2 n$, also

$$K = 4\pi \cdot r^3 \cdot \sin^4 n - \frac{8\pi}{3} r^3 \cdot \sin^6 n, \text{ oder (VII. 39.)}$$

$$K = \frac{23328000}{\pi^2} \cdot G^3 \cdot \sin^4 n - \frac{15552000}{\pi^2} \cdot G^3 \cdot \sin^6 n.$$

Hierdurch lässt sich aus dem Centralwinkel der Inhalt des Segments in Cubikgraden finden. Setzt man

$$3r - af = \tfrac{3}{2}(2r - af) + \tfrac{1}{2}af, \text{ so ist}$$

$$af(3r - af) = \tfrac{3}{2}af \cdot (2r - af) + \tfrac{1}{2}af^2 = \tfrac{3}{2}dl^2 + \tfrac{1}{2}af^2.$$

Setzt man also den Durchmesser der Grundfläche des Segments $dl = D$, so ist

$$K = \tfrac{1}{8}\pi \cdot L \cdot D^2 + \tfrac{1}{6}\pi \cdot L^3,$$

welches der im Lehrsatz ausgesprochene Ausdruck ist. Halbirt man die Höhe af in h, und zieht man durch h die Linie $gk \frown dl$, so ist $3r - af = \frac{3}{2}(2r - \frac{1}{2}af) - \frac{1}{4}af$, also

$$af(3r - af) = 3gh^2 - \tfrac{1}{4}af^2.$$

Setzt man also den Durchmesser des mittlern Querschnitts des Segments $gk = D'$, so ist

$$K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot L \cdot D'^2 - \tfrac{1}{12}\pi \cdot L^3.$$

Setzt man das Verhältniss des körperlichen Inhalts des Segments zu dem der ganzen Kugel $= S$, das Verhältniss der Höhe des Segments zum dreifachen Halbmesser der Kugel $\frac{af}{3r} = x$, so ist: $\frac{4}{27}S = x^2 - x^3$.

Um also den körperlichen Inhalt einer Kugel durch eine Ebene nach gegebenem Verhältniss zu theilen, muss man diese kubische Gleichung auflösen.

Beispiele.

1) Der Durchmesser der Kugel ist 10 Fuss, die Höhe des Segments $L = 2\frac{1}{2}$ Fuss, wie gross die Oberfläche und der körperliche Inhalt?

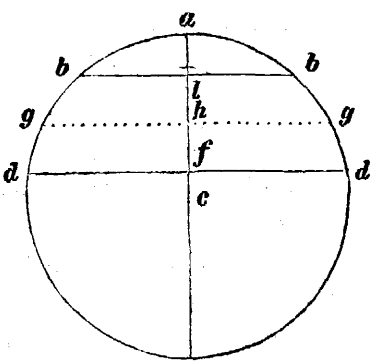
16*

$2r$ 1	r 0,69897	L 0,39794	I 98,175
L 0,39794	L 0,39794	L^2 0,79588	II 16,363
π 0,49715	L 0,39794	$\frac{1}{3}\pi$ 0,02003	$K =$ 81,812 Cub.-F.
A 1,89509	π 0,49715	II 1,21385	$A =$ 78,54 □Fuss.
	I 1,99200		

2) Die Höhe des Segments $L = 15'$, der Durchmesser der Grundfläche $D = 14'$.

L 1,17609	L 1,17609	L 1,17609	I 1154,54
$\frac{1}{2}D$ 0,84510	D 1,14613	L^2 2,35218	II 1767,14
$tg\,n$ 0,33099	D 1,14613	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	$K =$ 2921,68 C.-F.
$sin\,n$ 9,95722	$\frac{1}{8}\pi$ 9,59406	II 3,24727	$A =$ 860,79 □F.
E 1,21887	I 3,06241		
E 1,21887			
π 0,49715			
A 2,93489			

42.



Der körperliche Inhalt einer zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Kugelzone ist gleich dem halben Product der Höhe mit der Summe der Grundflächen, nebst dem Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser die Höhe der Zone ist.

Nach VII. 41. ist der Inhalt des Kugelsegments $dadf = \pi \cdot r \cdot af^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot af^3$, des Kugelsegments $babl = \pi \cdot r \cdot al^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot al^3$, also der körperliche Inhalt der Kugelzone $dbbl$ oder $K = \pi \cdot r\,(af^2 - al^2) - \frac{1}{3}\pi\,(af^3 - al^3)$,

(III. 7.) $af^2 - al^2 = (af - al) \cdot (af + al) = fl\,(af + al)$,

(VII. 4.) $af^3 - al^3 = (af - al)\,(af^2 + af \cdot al + al^2)$

$$= fl\,(af^2 + af \cdot al + al^2),$$

also $K = \pi \cdot fl\,(r \cdot af + r \cdot al) - \frac{1}{3}\pi \cdot fl\,(af^2 + af \cdot al + al^2)$,

aber $df^2 = 2r \cdot af - af^2$, $bl^2 = 2r \cdot al - al^2$,

also $r \cdot af = \frac{1}{2}df^2 + \frac{1}{2}af^2$, $r \cdot al = \frac{1}{2}bl^2 + \frac{1}{2}al^2$,

also $K = \frac{1}{2}\pi \cdot fl\,(df^2 + bl^2) + \pi \cdot fl\,(\frac{1}{2}af^2 + \frac{1}{2}al^2 - \frac{1}{3}af^2 - \frac{1}{3}af \cdot al - \frac{1}{3}al^2)$,

oder $K = \frac{1}{8}\pi \cdot fl\,(dd^2 + bb^2) + \frac{1}{6}\pi \cdot fl\,(af^2 - 2af \cdot al + al^2)$.

Setzt man also die Durchmesser der Grundflächen $dd = D$, $bb = d$, die Höhe $fl = af - al = L$, so ist $K = \frac{1}{8}\pi \cdot L \cdot D^2 + \frac{1}{8}\pi \cdot L \cdot d^2 + \frac{1}{6}\pi \cdot L^3$, welches der im Lehrsatz ausgesprochene Ausdruck ist.

Halbirt man die Höhe fl in h, und zieht man durch h die Linie $gg \frown dd \frown bb$, so ist $af + al = 2ah$, also $K = \pi \cdot fl \cdot 2r \cdot ah - \frac{1}{3}\pi \cdot fl \cdot (af^2 + af \cdot al + al^2)$. Aber $2r \cdot ah = ag^2 = gh^2 + ah^2 = \frac{1}{4}gg^2 + \frac{1}{4}(af + al)^2$, also

$$K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot fl \cdot gg^2 - \pi \cdot fl \cdot \left(\tfrac{1}{3}af^2 + \tfrac{1}{3}af \cdot al + \tfrac{1}{3}al^2 - \tfrac{1}{4}(af + al)^2\right),$$

oder

$$K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot fl \cdot gg^2 - \frac{\pi}{12} \cdot fl \cdot (4af^2 + 4af \cdot al + 4al^2 - 3af^2 - 6af \cdot al - 3al^2),$$

oder $K = \frac{1}{4}\pi \cdot fl \cdot gg^2 - \frac{1}{12}\pi \cdot fl \cdot (af - al)^2$.

Setzt man also den Durchmesser des mittlern Querschnitts $gg = D'$, so ist

$$K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot L \cdot D'^2 - \tfrac{1}{12}\pi \cdot L^3.$$

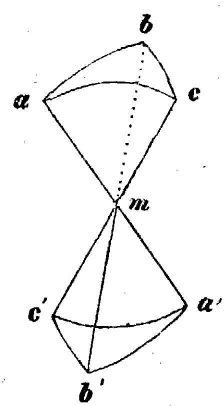
Beispiel.

Die Höhe der Kugelzone ist (VII. 38.) $L = 15''$, die Durchmesser der Grundflächen $D = 14''$, $d = 8''$.

L 1,17609	L 1,17609	L 1,17609	I 1154,54
D 1,14613	d 0,90309	L^2 2,35218	II 376,99
D 1,14613	d 0,90309	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	III 1767,13
$\frac{1}{8}\pi$ 9,59406	$\frac{1}{8}\pi$ 9,59406	III 3,24727	$K =$ 3298,66 C.-Z.
I 3,06241	II 2,57633		

43.

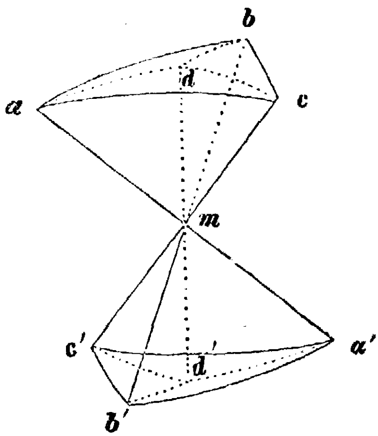
Gleichschenklige sphärische Dreiecke von gegenseitig gleichen Zwischenwinkeln und Nebenseiten sind identisch.



Es sind cab, $c'a'b'$ sphärische Dreiecke (IV. 68.) auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct m ist. Die Dreiecke sind gleichschenklig, die Zwischenwinkel gegenseitig gleich, $a = a'$, die Nebenseiten sind ebenfalls gegenseitig gleich: $ca = ab = c'a' = a'b'$. Man kann also diese Dreiecke an den Ecken a', a zusammenlegen, alsdann fällt $a'b'$ mit ac, und $c'a'$ mit ba zusammen, b' mit c, c' mit b zusammen; die Dreiecke sind also identisch, folglich auch an Oberfläche und körperlichem Inhalt gleich.

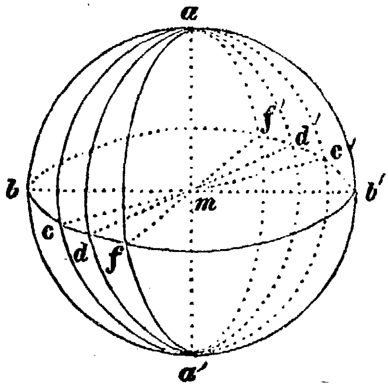
44.

Sphärische Verticaldreiecke sind nicht identisch, aber gleich.



Es sind abc, $a'b'c'$ sphärische Dreiecke auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct m ist. Da ihre gleichnamigen Puncte a, a'; b, b'; c, c' einander diametral entgegengesetzt sind, so heissen sie Verticaldreiecke. Bringt man die gradlinigen Dreiecke mbc, $mb'c'$ zusammen, so dass m mit m, b' mit b, c' mit c zusammenfällt, so fallen die Puncte a', a auf entgegengesetzte Seiten der Ebene mbc; die Dreiecke abc, $a'b'c'$ sind also symmetrisch (IV. 44.) und ihre Gleichheit kann daher nicht durch das Decken oder die Identität bewiesen werden. Da aber die Sehnen $ab \frown = a'b'$, $bc \frown = b'c'$, $ca \frown = c'a'$, so sind (IV. 32.) die durch die Puncte a, b, c, und a', b', c' gelegten Ebenen parallel. Fället man also von m auf die Ebene abc eine Senkrechte, welche die Kugel in d trifft, so ist ihre Verlängerung (IV. 29.) auf der Ebene $a'b'c'$ senkrecht und trifft die Kugel in d', so dass d, d' diametral entgegengesetzte Puncte der Kugeloberfläche sind. Da die gradlinigen Verticalwinkel $amd = a'md'$, $bmd = b'md'$, $cmd = c'md'$; da md, md' auf den Ebenen abc, $a'b'c'$ senkrecht sind, also auch (I. 36.) die gradlinigen Winkel $amd = bmd = cmd$, $a'md' = b'md' = c'md'$, so sind die sphärischen Dreiecke adb, bdc, cda, $a'd'b'$, $b'd'c'$, $c'd'a'$ gleichschenklig, und alle sechs Bögen einander gleich, nämlich $ad = bd = cd = a'd' = b'd' = c'd'$. Auch sind die Kantenwinkel je zweier durch dd' gehenden Ebenen gleich, nämlich: $\angle\, adb = a'd'b'$, $\angle\, bdc = b'd'c'$, $\angle\, cda = c'd'a'$. Also sind (VII. 43.) diese gleichschenkligen sphärischen Dreiecke identisch, nämlich $\triangle\, adb = a'd'b'$, $\triangle\, bdc = b'd'c'$, $\triangle\, cda = c'd'a'$. Aber aus den Winkeln, Flächen und körperlichen Räumen dieser gleichschenkligen sphärischen Dreiecke sind die Winkel, Flächen und körperlichen Räume der sphärischen Dreiecke abc, $a'b'c'$ auf gleiche Art zusammengesetzt. Also sind diese sphärischen Verticaldreiecke zwar nicht identisch, aber ihre Seiten, Winkel, Flächen und körperlichen Räume gegenseitig gleich..

45.



Ein durch zwei grösste Halbkreise oder Meridianhälften gebildeter Kugelstreifen verhält sich zur ganzen Kugel wie sein Winkel zu vier rechten Winkeln.

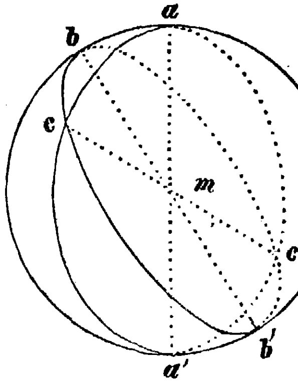
Die Axe aa', deren Aequator $bfb'f'$ ist, ist die Kante der beiden Halbkreise oder Meridianhälften aba', afa', welche auf der Oberfläche der Kugel einen Kugelstreifen oder ein sphärisches Zweieck abschneiden, dessen Winkel $baf = a$ durch den Aequatorsbogen bf gemessen wird. Theilt man diesen Bogen in soviel gleiche Theile bc, cd, df, als der Winkel a Grade enthält, so erhält man (VII. 43.) eben soviel identische Kugelstreifen. Die ganze Kugel enthält 360 solcher Kugelstreifen. Also verhält sich der Kugelstreifen $aba'fa$ zur ganzen Kugel wie $bf : P$, oder wie $a : 4R$. Wenn also der Winkel a in Graden ausgedrückt wird, und die Länge eines Grades der Kugel $= G$ ist, so ergiebt sich aus VII. 39. für den Kugelstreifen

$$\text{die Seitenfläche } A = \frac{360}{\pi} \cdot G^2 \cdot a,$$

$$\text{der körperliche Inhalt } K = \frac{21600}{\pi^2} \cdot G^3 \cdot a.$$

46.

Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur Oberfläche der Kugel, wie der halbe sphärische Ueberschuss zu vier rechten Winkeln oder 360^0.



Das sphärische Dreieck sey abc, der Mittelpunct der Kugel sey m. Durch die Verlängerung der Halbmesser am, bm, cm entsteht auf der entgegengesetzten Seite der Kugel das Verticaldreieck $a'b'c'$, welches (VII. 44.) dem Dreieck abc gleich ist. Folglich ist das sphärische Dreieck $a'b'c$ gleich dem durch die Meridiane $ca'c'$, $cb'c'$ gebildeten Kugelstreifen, weniger dem Dreieck abc. Eben so ist das sphärische Dreieck $ab'c$ gleich dem durch die Meridiane bab',

bcb' gebildeten Kugelstreifen, weniger dem Dreieck abc. Aber nach VII. 45. verhält sich der durch zwei Meridiane gebildete Kugelstreifen zur ganzen Kugel wie der Meridianwinkel zu 360^0. Diese Meridianwinkel sind hier die Winkel des Dreiecks abc. Wenn also diese in Graden ausgedrückten Winkel durch a, b, c, und die Oberfläche der Kugel durch F bezeichnet werden, so ist

$$\tfrac{1}{2} \cdot F = F \cdot \frac{a}{360} + F \cdot \frac{b}{360} - abc + F \cdot \frac{c}{360} - abc.$$

Setzt man also $a + b + c = 180^0 + 2\triangle$, wo $2\triangle$ der sphärische Ueberschuss heisst, so ist

$$\tfrac{1}{2} \cdot F = F \cdot \frac{180 + 2\triangle}{360} - 2 \cdot abc,$$

also

$$abc = F \cdot \frac{\triangle}{360}.$$

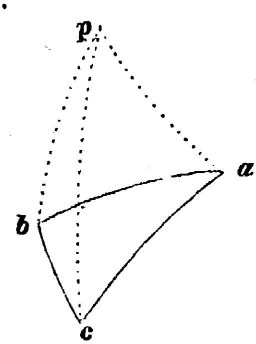
Da der Satz VII. 44. auch für den körperlichen Inhalt gilt, so folgt, dass der körperliche Inhalt $mabc$ gleich dem Product des Flächeninhalts von abc, mit dem dritten Theile des Halbmessers ist.

Da (VII. 39.) $F = \frac{129600}{\pi} \cdot G^2$, so ist, wenn $\triangle$ in Graden ausgedrückt wird, der Inhalt des Dreiecks $abc = \frac{360}{\pi} \cdot G^2 \cdot \triangle$.

Wenn $\triangle$ in Minuten ausgedrückt wird, so ist $abc = \frac{6}{\pi} \cdot G^2 \cdot \triangle$.

Wenn $\triangle$ in Secunden ausgedrückt wird, so ist $abc = \frac{1}{10\pi} \cdot G^2 \cdot \triangle$.

Dieser halbe sphärische Ueberschuss $\triangle$ kann also als das Maass des sphärischen Dreiecks angesehen werden. Kennt man den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks in Quadraten desselben Längenmaasses, durch welches der Grad G ausgedrückt wird, so giebt die Multiplication mit $\frac{\pi}{360 \cdot G^2}$ den halben sphärischen Ueberschuss in Graden.



Wenn a, b, c Puncte auf der Oberfläche der Erdkugel sind, p der Nordpol des Aequators, so sind in der Richtung der Meridiane die Bögen pa, pb, pc die Polardistanzen. Diese findet man, wenn man die nördliche geographische Breite von 90^0 abzieht, die südliche zu 90^0 addirt. Die Winkel am Pol sind die Unterschiede der geographischen Längen, und werden durch p bezeichnet.

In dem Dreieck pab sey $180^0 - pab - pba = 2 \cdot u$, so ist das Maass des Dreiecks pab, $= \frac{1}{2}p - u$. Verlängert man die Meridiane pa, pb bis zum Aequator, so ist das Maass dieses rechtwinkligen Dreiecks (VII. 45.) $= \frac{1}{2}p$. Also ist u das Maass des rechtwinkligen sphärischen Trapeziums, welches die Puncte a, b mit den Puncten im Aequator bilden. Bezeichnet man die halbe Summe der geographischen Breiten der Puncte a, b durch S, und ihren halben Unterschied durch d, so ist nach VI. 67. $tg\ u = tg\ \frac{1}{2}p \cdot \frac{sin\ S}{cos\ d}$.

Wenn also aus den geographischen Längen und Breiten dreier Puncte a, b, c auf der Erdoberfläche der Inhalt des sphärischen Dreiecks berechnet werden soll, so bestimmt man nach der obigen Formel für je zwei Puncte den Werth von u oder das Maass des Trapeziums, zieht die Summe der beiden kleinern vom grössern ab, so giebt der Rest das Maass des Dreiecks.

Beispiel.

		geogr. Länge.	geogr. Breite.	$\frac{1}{2}p$	S	d
Waigaz	a	$75^0\ 0'$	$70^0\ 0'$	$19^0 37',5$	$60^0 52',5$	$9^0\ 7',5$
Kalicz	b	$35^0 45'$	$51^0 45'$	$-15^0\ 7',5$	$44^0 52',5$	$6^0 52',5$
St. Nikolai	c	$66^0\ 0'$	$38^0\ 0'$	$-\ 4^0 30'$	$54^0\ 0'$	$16^0\ 0'$
Waigaz	a	$75^0\ 0'$	$70^0\ 0'$			

				u
$tg\ \frac{1}{2}p$	9,55215	9,43183	8,89598	$17^0 30',6$
$sin\ S$	9,94130	9,84854	9,90796	$-\ 10^0 52',4$
$cos\ d$	9,99447	9,99686	9,98284	$-\ 3^0 47',4$
$tg\ u$	9,49898	9,28351	8,82110	$2^0 50',8$
				$\triangle = 170,8$

$\triangle$	2,23249	21600′	4,33445
$\frac{6}{\pi}$	0,28100	$\triangle$	2,23249
326,21	2,51349	126,46	2,10196

Der Inhalt des von Waigaz, Kalicz und St. Nikolai am kaspischen See gebildeten Dreiecks beträgt also 326,21 Quadratgrade oder den 126sten Theil der ganzen Erde.

47.

Den Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks zu finden.

Man ziehe von allen Winkelpuncten Meridiane auf den Aequator. Für je zwei benachbarte Puncte sey die halbe Summe der geographischen Breiten $= S$, ihr halber Unterschied $= d$, der Längenunterschied $= p$. Man berechne u nach der Formel $tg\ u = tg\ \frac{1}{2}p \cdot \frac{sin\ S}{cos\ d}$, so ist (VI. 46.) das Maass des Trapeziums $= u$. Man berechne also die Summe der u, indem man zuerst von Westen nach Osten, dann von Osten nach Westen fortschreitet. Der Unterschied beider ist das Maass der sphärischen Figur. Dieses in Minuten ausgedrückte Maass giebt mit $\frac{6}{\pi}$ multiplicirt den Inhalt in Quadratgraden.

Beispiel.

	Länge.	Breite.	$\frac{1}{2}p$	S	d	u
Kalicz........ *a*	35°45′	51°45′	19°37′,5	60°52′,5	9° 7′,5	+17°30′,6
Waigaz....... *g*	75° 0′	70° 0′	67° 0′	68° 0′	2° 0′	+65°24′,9
Behringsstrasse *f*	209° 0	66° 0′	—16°16′	59°30′,5	6°29′,5	—14°12′,0
Peterpaulshafen *d*	176°28′	53° 1′	—26° 4′,5	51°40′,5	1°20′,5	—21° 0′,4
Kiachta....... *c*	124°19′	50°20′	—29° 9′,5	44°10′	6°10′	—21°21′,3
St. Nikolai.... *b*	66° 0′	38° 0′	—15° 7′,5	44°52′,5	6°52′,5	—10°52′,4
Kalicz........ *a*	35°45′	51°45′			$\triangle =$	15°29′,4
					$\triangle =$	929,4

$\frac{6}{\pi}$	0,28100	21600	4,33445
$\triangle$	2,96820	$\triangle$	2,96820
1775	3,24920	23,24	1,36625

Der Inhalt ist also 1775 Quadratgrade oder der 23ste Theil der ganzen Erde.

Wenn die Puncte nur wenige Grade in Länge und Breite verschieden sind, so ist $u = \frac{1}{2}p \cdot sin\ S$.

Beispiel.

Den Flächeninhalt von Kurland nach den in VI. Aufg. 82. gegebenem Verzeichniss der Grenzpuncte zu berechnen.

	Länge.	Breite.	S	p	$2u$
Libau	38°39′,6	56°30′,4	56°45′,2	20°,4	17°,061
Felixberg ...	39° 0′	57° 0′	57°11′,95	12°,5	10°,507
Windau	39°12′,5	57°23′,9	57°34′,75	62°,7	52°,928
Domesnäss ..	40°15′,2	57°45′,6	57°30′,3	39°,8	33°,568
Angern	40°55′	57°15′	57° 1′,5	40°	33°,557
Peterhof....	41°35′	56°48′	56°50′	27°	22°,601
Brambergshof	42° 2′	56°52′	56°44′,55	41°,8	34°,154
Friedrichstadt	42°43′,8	56°37′,1	56°33′,6	47°,4	39°,554
Jakobstadt ..	43°31′,2	56°30′,1	56°11′,65	38°,5	31°,991
Dünaburg...	44° 9′,7	55°53′,2	55°51′,6	50°,3	41°,632
Wernowicz ..	45° 0′	55°50′	55°45′	— 35°	— 28°,931
Ilgen	44°25′	55°40′	55°42′,5	— 28°	— 23°,133
Egipten	43°57′	55°45′	55°52′,65	— 23°,1	— 19°,123
Subbat	43°33′,9	56° 0′,3	56° 5′,15	— 21°,9	— 18°,174
Ellern	43°12′	56°10′	56°16′,45	— 54°,4	— 45°,245
Schönberg ..	42°17′,6	56°22′,9	56°24′,15	— 54°,7	— 45°,562
Sessau	41°22′,9	56°25′,4	56°24′,9	— 24°	— 19°,994
Grenzhof ...	40°58′,9	56°24′,4	56°25′	— 54°,1	— 45°,070
Essern	40° 4′,8	56°25′,6	56°23′,8	— 49°,7	— 41°,394
Gramsden...	39°15′,1	56°22′,0	56° 8′,55	— 32°,2	— 26°,740
Polangen ...	38°42′,9	55°55′,1	56°12′,75	— 3°,3	— 2°,743
Libau	38°39′,6	56°30′,4			

$2\triangle =$	2,244
$\triangle =$	1,122
$\triangle$	0,04999
$\frac{6}{\pi}$	0,28100
G^2	4,03709
23339	4,36808

Der Flächeninhalt von Kurland, sphärisch berechnet, beträgt also 23339 Quadratwerst.

Nach der Neumann'schen Charte 23195 Quadratwerst.

Diese Rechnung lässt sich auf folgende Art noch genauer führen:

Es sey m die geographische Breite eines mittlern Parallels. Man bezeichne die geographischen Breiten zweier benachbarten Grenzpuncte der Figur durch $m + x$, $m + y$, so ist $S = m + \frac{1}{2}(x + y)$, $d = \frac{1}{2}(x - y)$,

$$\sin S = \sin m \cdot \cos \tfrac{1}{2}(x + y) + \cos m \cdot \sin \tfrac{1}{2}(x + y),$$

$$\sin S = \sin m + \cos m \cdot \tfrac{1}{2}(x+y) - \sin m\, \tfrac{1}{8}(x+y)^2,$$

$$\cos d = 1 - \tfrac{1}{8}(x-y)^2, \qquad \frac{1}{\cos d} = 1 + \tfrac{1}{8}(x-y)^2,$$

$$\frac{\sin S}{\cos d} = \sin m + \cos m \cdot \tfrac{1}{2}(x+y) - \sin m \cdot \tfrac{1}{2}x \cdot y,$$

$$u = \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{\sin S}{\cos d},$$

also $u = \frac{1}{2}p \cdot \sin m + \cos m \cdot \frac{1}{4}p\,(x+y) - \sin m \cdot \frac{1}{4}p \cdot x \cdot y.$

Wenn p, x, y in Minuten ausgedrückt sind, so muss man den zweiten Theil rechts mit $\sin 1' = \frac{\pi}{10800}$, und den dritten Theil rechts mit $\sin^2 1'$ multipliciren, um alles auf Minuten zu bringen. Nachher multiplicirt man noch mit $\frac{6}{\pi} \cdot G^2$. Der zweite Theil rechts wird dann:

$$\frac{1}{7200} \cdot G^2 \cdot \cos m \cdot p \cdot (x+y) = \frac{1}{60} G \cdot \cos m \cdot p \cdot \frac{1}{120} G \cdot (x+y).$$

Hier ist $\frac{1}{60} G \cdot \cos m \cdot p$ der Abstand der Meridiane auf dem mittlern Parallel, und $\frac{1}{120} G \cdot (x+y)$ die halbe Summe der Perpendikel auf dem mittlern Parallel. Der zweite Theil ist also der Inhalt des Trapeziums, wenn man dessen Bogenseiten als grade Linien ansieht, und der dritte Theil die Verminderung wegen der Krümmung der Erde. Bezeichnet man die Summe aller Producte $p\,(x+y)$ durch a, und die Summe aller Producte $p \cdot x \cdot y$ durch b, so ist der Inhalt der Figur, da der erste Theil sich von selbst aufhebt,

$$\tfrac{1}{4}\sin 1' \cdot \frac{6}{\pi} \cdot G^2 \cdot \cos m \cdot a - \tfrac{1}{4}\sin^2 1' \cdot \frac{6}{\pi} G^2 \cdot \sin m \cdot b.$$

In dem obigen Beispiel sey für den mittlern Parallel die geographische Breite von Mitau $m = 56^0 39',1$ angenommen, so ist

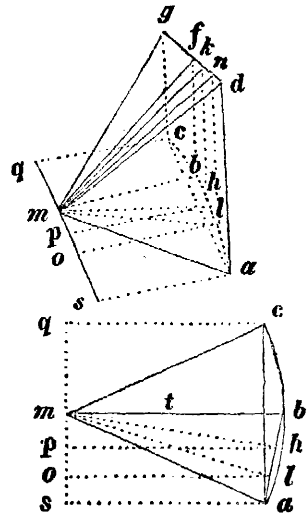
	p	x	$p \cdot (x + y)$	$p \cdot x \cdot y$
Libau	$20^0,4$	$-\ 8^0,7$	248,88	$-$ 3709
Felixberg	$12^0,5$	$20^0,9$	821,25	11704
Windau	$62^0,7$	$44^0,8$	6978,51	186796
Domesnäss	$39^0,8$	$66^0,5$	4075,52	95014
Angern	$40^0,0$	$35^0,9$	1792,00	12780
Peterhof	$27^0,0$	$8^0,9$	588,60	3100
Brambergshof . .	$41^0,8$	$12^0,9$	455,62	$-$ 1079
Friedrichstadt . .	$47^0,4$	$-\ 2^0,0$	$-$ 521,40	853
Jakobstadt	$38^0,5$	$-\ 9^0,0$	$-$ 2113,65	15904
Dünaburg	$50^0,3$	$-\ 45^0,9$	$-$ 4778,50	113360
Wernowicz	$-\ 35^0,0$	$-\ 49^0,1$	3787,00	$-$ 101588
Ilgen	$-\ 28^0,0$	$-\ 59^0,1$	3169,60	$-$ 89526
Egipten	$-\ 23^0,1$	$-\ 54^0,1$	2145,99	$-$ 48490
Subbat	$-\ 21^0,9$	$-\ 38^0,8$	1487,01	$-$ 24726
Ellern	$-\ 54^0,4$	$-\ 29^0,1$	2464,32	$-$ 25645
Schönberg	$-\ 54^0,7$	$-\ 16^0,2$	1635,53	$-$ 12140
Sessau	$-\ 24^0,0$	$-\ 13^0,7$	681,60	$-$ 4833
Grenzhof	$-\ 54^0,1$	$-\ 14^0,7$	1525,62	$-$ 10736
Essern	$-\ 49^0,7$	$-\ 13^0,5$	1528,82	$-$ 11474
Gramsden	$-\ 32^0,3$	$-\ 17^0,1$	1967,42	$-$ 24228
Polingen	$-\ 3^0,3$	$-\ 44^0,0$	173,91	$-$ 1263
Libau		$-\ 8^0,7$		
			$a = 2811365$	$b = 80074$

$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{4}$	9,39794
$sin\ 1'$	6,46373	$sin^2\ 1'$	2,92745
$\frac{6}{\pi}$	0,28100	$\frac{6}{\pi}$	0,28100
G^2	4,03709	G^2	4,03709
$cos\ m$	9,74015	$sin\ m$	9,92187
a	4,44892	b	4,90349
	4,36883		1,46884

23380
29

Inhalt von Kurland 23351 Quadratwerst.

48.



Die Seitenfläche eines senkrechten Cylindersectors, dessen Grundfläche ein Kreissector, ist gleich dem Product der Sehne mit der Höhe.

Der körperliche Inhalt desselben ist gleich dem dritten Theile des Products des Halbmessers mit der Seitenfläche.

Der Kreissector $amcb$ wird von dem Halbmesser $mb = r$ halbirt. Auf der Ebene desselben sind die Seitenlinien des Cylinders ad, hk, bf, cg senkrecht. Eine schiefe Ebene schneidet die Cylinderfläche in dfg, die Grundfläche in $sq \frown ac$, und bildet mit der Grundfläche den Winkel n, so dass also $ad = cg = as \cdot tg\ n = cq \cdot tg\ n$, $hk = hp \cdot tg\ n$, $bf = mb \cdot tg\ n$. Es sey ah eine beliebige Sehne des Bogens, ml senkrecht auf ah, lo senkrecht auf qs. Das Trapezium $ahkd = \frac{1}{2}(ad + hk) \cdot ah = \frac{1}{2} tg\ n\ (as + hp)\ ah = tg\ n \cdot lo \cdot ah = tg\ n \cdot ml \cdot sp$. Der körperliche Inhalt der Pyramide $mahkd = \frac{1}{3} tg\ n \cdot ml \cdot sp \cdot ml$. Beschreibt man also in den Bogen ac ein regelmässiges Vieleck, dessen Seite $= ah$, so ist die Linie ml für alle gleich, die Summe aller Abschnitte sp beträgt $qs = ac$, also ist die Seitenfläche des Cylindersectors $acgd$ oder $A > tg\ n \cdot ml \cdot ac$, der körperliche Inhalt $amcgd$ oder $K > \frac{1}{3} tg\ n \cdot ml^2 \cdot ac$. Je grösser man die Anzahl der Seiten des Vielecks nimmt, desto mehr nähert sich ml dem Halbmesser r, und der Unterschied kann kleiner als jede denkbare Grösse werden. Also ist genau $A = tg\ n \cdot r \cdot ac$ oder $A = bf \cdot ac$, und $K = \frac{1}{3} tg\ n \cdot r^2 \cdot ac$ oder $K = \frac{1}{3} r \cdot A$. Setzt man die Höhe $bf = r \cdot tg\ n = L$, den Durchmesser $2r = D$, den Centralwinkel $amc = m$, so ist

$$A = L \cdot D \cdot \sin \tfrac{1}{2}m, \qquad K = \tfrac{1}{6} L \cdot D^2 \cdot \sin \tfrac{1}{2}m.$$

Verwandelt sich die Grundfläche in einen Halbkreis, so ist $\sin \frac{1}{2}m = 1$, also:

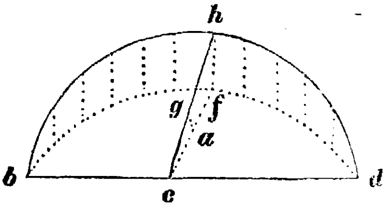
$$A = L \cdot D, \qquad K = \tfrac{1}{6} L \cdot D^2.$$

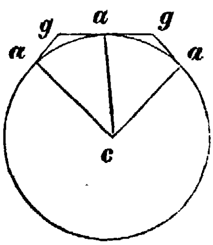
Durch Hülfe dieses Satzes lässt sich der Schwerpunct t des Kreissectors $amcb$ bestimmen. Da $ab = bc$, so liegt dieser Schwerpunct in der Linie mb, also ist die im Schwerpunct bis zur schiefen Ebene errichtete Höhe $= mt \cdot tg\ n$.

Die Grundfläche $amc = \frac{1}{2}r \cdot$ Bogen abc. Also der Inhalt des Cylindersectors (VII. 24.) $K = mt \cdot tg\ n \cdot \frac{1}{2}r \cdot$ Bogen abc. Aber auch, wie oben bewiesen worden $K = \frac{1}{3}tg\ n \cdot r^2 \cdot ac$. Also $\frac{1}{2}mt \cdot$ Bogen $abc = \frac{1}{3}r \cdot ac$ oder $mt = \frac{2}{3}r \cdot \frac{ac}{\text{Bogen } abc}$.

Bei einem Halbkreise ist also $mt = \frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{\pi}$ oder $mt = r \cdot \frac{4}{3\pi} = r \cdot 0{,}41831$.

49.





Der körperliche Inhalt des Raums, welcher durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe beschrieben wird, ist gleich dem Product des Umfangs des vom Schwerpunct der Figur beschriebenen Kreises mit dem Flächeninhalt der Figur.

Es sey $bfd = F$ die Rotationsfigur, bd ihre Axe, a ihr Schwerpunct, $ac = r$ senkrecht auf bd, der Halbmesser des vom Schwerpunct bei der Umdrehung beschriebenen Kreises. Man beschreibe um diesen Kreis ein regelmässiges Vieleck, dessen halbe Seite ag, dessen Umfang $= P$ sey, und lege durch die Axe bd und die Puncte a Ebenen, welche den Rotationskörper in der Figur bfd schneiden. Man lege senkrecht auf jede Ebene bfd Cylinderflächen, welche den Rotationskörper in der Figur bfd berühren, so ist der körperliche Inhalt jedes schief geschnittenen Cylinderstücks (VII. 24.) $= ag \cdot F$, also der Inhalt des ganzen den Rotationskörper umhüllenden Körpers $= P \cdot F$. Je grösser aber die Anzahl der Seiten des umschriebenen Vielecks genommen wird, desto mehr nähert sich der Umfang des umschriebenen Vielecks dem Umfang des Kreises $= 2\pi \cdot r$, und desto mehr nähert sich auch der Inhalt des umhüllenden Körpers dem Inhalt des Rotationskörpers. Also ist der Inhalt des Rotationskörpers $K = 2\pi r \cdot F$.

Inhalt der Stereometrie.

Bezeichnungen. Länge oder Höhe $= L$, Breite $= B$, Dicke oder Diagonallinie oder Durchmesser der Grundfläche $= D$, Verhältniss der Grundfläche zum Quadrat dieser Linie $= c$, Grundfläche $= c \cdot D^2$, Endkante oder Seitenlinie $= E$, Umfang $= P$, Dicke der Wand $= w$, Seitenfläche $= A$, ganze Oberfläche $= F$, Neigung der Endkante oder Seitenlinie gegen die Grundfläche $= n$, Centralwinkel $= m$, körperlicher Inhalt $= K$, Länge eines Grades der Kugel $= G$.

1. Cubus.... $F = 6 \cdot L^2$, $K = L^3$.

3. 7. Rechtwinkliges Parallelepipedum:
$A = 2L \cdot B + 2L \cdot D$, $F = 2L \cdot B + 2L \cdot D + 2B \cdot D$.
Axe $= \sqrt{L^2 + B^2 + D^2}$, $K = L \cdot B \cdot D$.
Wand $= A \cdot w - 4L \cdot w^2$.
Wand und Böden $= F \cdot w - 4\,(L + B + D) \cdot w^2 + 8 \cdot w^3$.

8—17. Senkrechtes und schiefes Parallelepipedum und Prisma, senkrechter und schiefer Cylinder:
$$K = c \cdot L \cdot D^2 = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2.$$

10. Säule.... $A = L \cdot P$.

14. Schiefes Parallelepipedum. Die Endkanten E, E', E'' bilden die gradlinigen Winkel a, b, c, und $a + b + c = 2S$
$$K = E \cdot E' \cdot E'' \cdot \sqrt{4 \sin S \cdot \sin (S-a) \cdot \sin (S-b) \cdot \sin (S-c)}.$$

17. Senkrechter Kreiscylinder:
$A = \pi \cdot L \cdot D$, $F = \pi \cdot L \cdot D + \frac{1}{2}\pi \cdot D^2$,
$K = \frac{1}{4}\pi \cdot L \cdot D^2 = \frac{1}{4\pi} L \cdot P^2$.
Wand $= \pi \cdot L \cdot w \cdot (D - w) = \pi \cdot L \cdot w \cdot (d + w)$.

18. 19. Tetraeder und Pyramide: $K = \frac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$.

20. Schiefgeschnittenes dreiseitiges Prisma:
$$K = \tfrac{1}{3}c \cdot (L' + L'' + L''') \cdot D^2.$$

21. Schiefgeschnittenes Parallelepipedum:
$$K = \tfrac{1}{2}c \cdot (L' + L''') \cdot D^2 = \tfrac{1}{2}c \cdot (L'' + L'''') \cdot D^2.$$

23. 24. Schiefgeschnittenes Prisma, schief geschnittener Cylinder, die Höhe des obern Schwerpuncts $= L$, die Verbindungslinie beider Schwerpuncte $= E$.

$$K = c \cdot L \cdot D^2 = c \cdot \sin n \cdot E \cdot D^2.$$

25—27. Aehnliche Körper $K : K' = D^3 : D'^3$.

28—30. Parallel abgestumpfte Pyramide:

$$K = \tfrac{1}{4}c \cdot L \cdot (D + d)^2 + \tfrac{1}{12}c \cdot L \cdot (D - d)^2.$$

31. Kegel überhaupt.... $K = \tfrac{1}{3}c \cdot L \cdot D^2$.

Gleichseitiger Kegel:

$$tg\, n = \frac{2L}{D} = \frac{2\pi L}{P}, \quad E \cdot \sin n = L.$$

$$A = \tfrac{1}{2}E \cdot P = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot D, \quad F = \tfrac{1}{4}\pi \cdot D \cdot (2E + D).$$

$$K = \tfrac{1}{12}\pi \cdot L \cdot D^2 = \frac{1}{12\pi} \cdot L \cdot P^2.$$

33. Parallel abgestumpfter Kegel überhaupt:

$$K = \tfrac{1}{4}c \cdot L \cdot (D + d)^2 + \tfrac{1}{12}c \cdot L \cdot (D - d)^2.$$

Parallel abgestumpfter gleichseitiger Kegel:

$$tg\, n = \frac{2L}{D - d}, \quad E = \frac{L}{\sin n} = \frac{\tfrac{1}{2}(D - d)}{\cos n}.$$

$$A = \tfrac{1}{2}E \cdot (P + p) = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot (D + d).$$

$$K = \tfrac{1}{16}\pi \cdot L \cdot (D + d)^2 + \tfrac{1}{48}\pi \cdot L \cdot (D - d)^2.$$

$$K = \frac{1}{16\pi} \cdot L \cdot (P + p)^2 + \frac{1}{48\pi} \cdot L \cdot (P - p)^2.$$

37. Kugelsector: $K = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{4}m$.

39. Kugel:

$$F = P \cdot D = 4\pi r^2 = \pi \cdot D^2 = \frac{1}{\pi} \cdot P^2 = \frac{129600}{\pi} \cdot G^2.$$

$$K = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{6}\pi \cdot D^3 = \frac{1}{6\pi^2} \cdot P^3 = \frac{7776000}{\pi^2} \cdot G^3.$$

$$\text{Wand} = \pi \cdot w \cdot D \cdot d + \tfrac{4}{3}\pi \cdot w^3.$$

37. 41. Kugelsegment:

$$m = 4n, \; \frac{2L}{D} = tg\, n, \; E = \frac{L}{\sin n} = \frac{D}{2\cos n}, \; L = 2r \cdot \sin^2 n.$$

$$A = 2\pi \cdot r \cdot L = 4\pi \cdot r^2 \cdot \sin^2 n = \pi \cdot E^2 = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot \frac{D}{\cos n}.$$

$$K = \pi \cdot L^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi \cdot L^3 = \tfrac{1}{8}\pi \cdot L \cdot D^2 + \tfrac{1}{6}\pi \cdot L^3.$$

38. 42. Kugelzone:

$$tg\, n = \frac{2L}{D - d}, \; tg\, n' = \frac{2L}{D + d}, \; E = \frac{L}{\sin n}, \; E' = \frac{L}{\sin n'}.$$

$$A = \pi \cdot E \cdot E' = \tfrac{1}{2}\pi \cdot E \cdot \frac{D + d}{\cos n'}.$$

$$K = \tfrac{1}{8}\pi \cdot L \cdot D^2 + \tfrac{1}{8}\pi \cdot L \cdot d^2 + \tfrac{1}{6}\pi \cdot L^3.$$

45. Kugelstreifen:

$$A = \frac{360}{\pi} \cdot G^2 \cdot a, \quad K = \frac{21600}{\pi^2} \cdot G^3 \cdot a.$$

46. Sphärisches Dreieck: $a + b + c - 180 = \triangle$.

$$A = \frac{180}{\pi} \cdot G^2 \cdot \triangle, \quad K = \frac{10800}{\pi^2} \cdot G^3 \cdot \triangle.$$

48. Cylindersector:

$$A = L \cdot D \cdot \sin \tfrac{1}{2}m, \quad K = \tfrac{1}{6}L \cdot D^2 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}m.$$

49. Rotationskörper.... $K = 2\pi \cdot r \cdot F$.

Zahlen, welche vom Kreisverhältniss abhängen, und bei der Berechnung des Kreises, Cylinders, Kegels und der Kugel angewandt werden, überhaupt auch in der höhern Geometrie von häufigem Gebrauche sind.

π = 3,1415926 5358979 3238462 6433832 7950288
4197169 3993751 0582097 4944592 3078164
0628620 8998628 0348253 4211706 7982148
0865132 8230664 7093844 6095505 8226136

Aus dieser von Vega berechneten Zahl habe ich die übrigen abgeleitet:

$\frac{1}{4}\pi$ = 0,7853981 6339744 8309615 6608458 1987572
1049292 3498437 76

$\frac{1}{6}\pi$ = 0,5235987 7559829 8873077 1072305 4658381
4032861 5665625 17

$\frac{1}{\pi}$ = 0,3183098 8618379 0671537 7675267 4502872
4068919 2914809 1289749 5334688 1177935
9526845 3070180 2276055 3250617 1912145
6854535 1591607 3785823 6922291 5730277

In Euler's *Introd. in Anal. Infin.* I. § 198. ist $\frac{1}{\pi}$ nur auf 36 Stellen angegeben, und daselbst die 25ste Stelle unrichtig 9 statt 5.

$\frac{1}{4\pi}$ = 0,0795774 7154594 7667884 4418816 8625718
1017229 8228702 28

$\frac{1}{\pi^2}$ = 0,1013211 8364233 7771443 8794632 0972763
8904358 7746722 46

$\frac{1}{6\pi^2}$ =	0,0168868	6394038	9628573	9799105	3495460
	6484059	7957787	07		
$\sqrt{\pi}$ =	1,7724538	5090551	6027298	1674833	4114518
	2797549	4561223	8712821	3807789	8529112
	8459103	2181374	9506567	3854466	5416226
	8236242	8257066	6236152	8657244	2261088
$2\sqrt{\pi}$ =	3,5449077	0181103	2054596	3349666	8229036
	5595098	9122447	74		
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ =	0,5641895	8354775	6286948	0794515	6077258
	5844050	6293289	9885684	4085721	709
$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ =	1,1283791	6709551	2573896	1589031	2154517
	1688101	2586579	9771368	8171443	418
$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ =	0,0940315	9725795	9381158	0132419	2679543
	0974008	4382214	9980947	4014286	951
$\sqrt[3]{6}$ =	1,8171205	9283213	9658891	2117563	2726050
	2428210	4631412	1967148		
$\sqrt[3]{36}$ =	3,3019272	4889462	6683874	6099524	0908495
	6846884	6443184	9333697		
$\sqrt[3]{\pi}$ =	1,4645918	8756152	3263020	1425272	6379039
	1738596	8556279	37		
$\sqrt[3]{\pi^2}$ =	2,1450293	9711102	5600077	4441009	4123559
	7486667	3654715	56		
$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ =	1,2407009	8179880	0033336	0136240	9555633
	4701572	4003720	0		
$\sqrt[3]{6\pi^2}$ =	3,8977770	8972075	3958963	4709177	9985674
	4015612	2958390	56		
$\sqrt[3]{36\pi}$ =	4,8359758	6204940	8922150	9005399	1785481
	6833842	2169715	85		
π^2 =	9,8696044	0108935	8618834	4909998	
	7615113	5313699	4072408		
π^3 =	31,0062766	8029982	0175476	3150671	
	0139520	222			
π^4 =	97,4090910	3400243	7236440	3326887	
	0511124	97			
π^5 =	306,0196847	8528145	3262741	3100434	
	3560648	02			
π^6 =	961,3891935	7530443	7030219	4436524	
	1989886	68			
π^7 =	3020,2932277	7679206	7514206	4930720	
	4183191	62			
π^8 =	9488,5310160	7057400	7128575	5039067	
	6579669	29			

π^9 = 29809,0993334 4621166 6509402 4012396
5536385 31

π^{10} = 93648,0474760 8302097 3716690 1849193
4563594 6

π^{11} = 294204,0179738 9059710 5695642 0071846
6702738

π^{12} = 924269,1815233 7418622 2579170 3584756
0717230

π^{13} = 2903677,2706132 8340498 8596199 4878031
3046839

π^{14} = 9122171,1817543 5317020 4375110 7628162
744956

π^{15} = 28658145,9693879 9845337 8821971 6605433
32966

π^{16} = 90032220,8429332 7956713 0768227 9165370
94380

Anhang.

Aufgaben zu practischem Gebrauch.

(Das hier vorkommende Längenmaass ist der russisch-englische Zoll und Fuss. Authentische Vergleichungen der Maasse und Gewichte findet man in meinem Rechenbuche.)

I.

Den Inhalt eines Kornspeichers in Tschetwert, rigischen Loofen und revalschen Tonnen durch Maassstöcke zu bestimmen.

	Cubikzoll.	Cubikwurzel in Zollen.
Tschetwert	12809,7	23,39805 $= \frac{1}{3}\,(72 - 1{,}806)$
rig. Loof	4202,5	16,1375 $= \frac{1}{5}\,(72 + 8\tfrac{11}{16})$
rev. Tonne	7757,7	19,796 $= \frac{1}{5}\,(99 - \frac{1}{50})$

Die Einheit des Maassstockes wird der hier angegebenen Cubikwurzel gleich genommen und in 10 gleiche Theile getheilt.

Beispiel. Nach einem für Tschetwert eingerichteten Maassstocke wurde ein Kornraum (Abzirk) gemessen. Es war die Länge $L = 7{,}9$; die Breite $B = 5{,}8$; die Höhe $D = 2{,}3$ Einheiten, also der Inhalt $L \cdot B \cdot D = 105\frac{1}{3}$ Tschetwert.

2.

Den Inhalt eines Kornspeichers, dessen Abmessungen in Fuss oder Faden gegeben sind, zu finden.

Die Formel ist $K = a \cdot L \cdot B \cdot D$. Hier bedeutet K den Inhalt in Tschetwert, oder Loof, oder Tonnen, oder Lasten u. s. w. Die Abmessungen L, B, D Länge, Breite, Höhe in Fuss, der Factor $a = \frac{1728}{m}$; m ist das Kornmaass in Cubikzollen.

	m	$log\ a$		$log\ a$
Garnez	200,1515	0,93618	rig. Last 45	7,96082
Tschetwerik	1601,2118	0,03309	rig. Last 48	7,93279
Tschetwert	12809,6948	9,13000	rig. Last 60	7,83588
rig. Loof	4202,5	9,61403	rev. Last 24	7,96760
rev. Tonne	7757,7	9,34781		

Sind die Abmessungen in Faden gemacht, so multiplicirt man noch: bei Faden von 6 Fuss mit 216, bei Saschen von 7 Fuss mit 343. Sind die Abmessungen in Zollen, so multiplicirt man mit $\frac{1}{1728}$, $log_r = 6{,}76246$.

Beispiele.

1) Bei einem Speicher ist $L = 50'\ 7''$, $B = 16'\ 5''$, $D = 4'\ 8''$, wieviel Tschetwert und Last enthält er?

L	2,78319	2,78319	2,78319
B	2,29447	2,29447	2,29447
D	1,74819	1,74819	1,74819
1728	6,76246	6,76246	6,76246
a	9,13000	7,96082	7,96760
	2,71831	1,54913	1,55591

Tschetwert $522\frac{3}{4}$; rig. Roggenlast 35,41; rev. Last 35,97.

2) Bei einem Speicher ist $L = 10\frac{1}{2}$ Faden, $B = 8\frac{1}{2}$ Faden, $D = 2\frac{1}{4}$ Faden, der Faden 6 Fuss.

L	1,02119
B	0,92942
D	0,35218
216	2,33445
a	9,13000
Tschetwert	3,76724 = 5851.

3) Bei einem Speicher ist L = $10\frac{1}{4}$ Saschen, B = $8\frac{1}{4}$ Saschen, D = $2\frac{1}{2}$ Saschen, die Saschen 7 Fuss.	L	1,01072
	B	0,91645
	D	0,39794
	343	2,53529
	a	9,13000
	Tschetwert	3,99040 = 9781.

3.

Den Inhalt eines Heuschobers zu berechnen.

Die Formel ist $K = a \cdot L \cdot B \cdot D$, die Abmessungen L, B, D sind Fuss, K Berkowez. Man rechnet auf eine Cubiksaschen 2 Berkowez Heu, also $a = \frac{2}{343}$, $\log a = 7{,}76574$.

Beispiel.

Bei einem Heuschober ist L = 65 Fuss, B = 32 Fuss, D = 15 Fuss.	L	1,81291
	B	1,50515
	D	1,17609
	a	7,76574
	Berkowez	2,25989 = 182.

4.

Eine Quantität Brennholz nach gesetzlichem Holzmaass zu berechnen.

Das gesetzliche Holzmaass ist $\frac{3}{4}$ Cubiksaschen oder $257\frac{1}{4}$ Cubikfuss. Das Holz wird eine Saschen hoch und breit aufgestellt, und der Scheit oder Kloben ist im Durchschnitt $2\frac{1}{4}$ Arschin oder $\frac{3}{4}$ Saschen = 63 Zoll lang. Dieses Maass heisst die dreibrändige Saschen, und beträgt ungefähr 9 Fuder. Nimmt man den Klobe nur eine Elle = 21 Zoll lang, so heisst dieses Maass eine einbrändige Saschen. Da aber in verschiedenen Gegenden des Reichs provincielle Holzmaasse im Gebrauch sind, so sey die Anzahl der Faden nach provinciellem Maass = M, das Verhältniss des provinciellen Holzmaasses zum gesetzlichen = a, so ist die Anzahl der Faden nach gesetzlichem Holzmaass $K = a \cdot M$. Wenn umgekehrt der Preis des provinciellen Holzmaasses durch a dividirt wird, so ergiebt sich der Preis des gesetzlichen Holzmaasses. Diese Reduction gewährt ein Mittel zur Vergleichung der Preise des Brennholzes in verschiedenen Gegenden des Reichs. Nach meinen Ausmittelungen kommen nachstehende provincielle Maasse vor:

Holzmaass	hoch	breit	Kloben	a	$log\ a$
gesetzlich	7 Fuss	7 Fuss	$5\frac{1}{4}$ Fuss	1	—
einbrändig	7′	7′	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	9,52288
Moskau	7′	7′	$5\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{9}$	0,04575
Finnland*)	3 Ellen	4 Ellen	$1\frac{1}{4}$ Ellen	0,43117	9,63465
Reval	88″,4	88″,4	21″,166	0,37208	9,57064
Riga	8′	9′	2′	0,55975	9,74800
Mitau					
Kronflossholz	7′	7′	6′$6\frac{3}{4}$″	1,25	0,09691
Forsteien	6′	6′	6′	0,83964	9,92409
— —	7′	7′	7′	$1\frac{1}{3}$	0,12493
Deputat	8′	8′	8′	1,9903	0,29891

*) Die finnländische oder schwedische Elle = 23,379 Zoll.

Beispiele.

1) Bei einem der Behörde zur Bestätigung vorgelegten Anschlage für das erste Halbjahr 1833 fand ich, dass man den halbjährlichen Bedarf von $94\frac{1}{2}$ einbrändigen Saschen auf 42 Faden Kronflossholz zu RS. 5,50 berechnet hatte. Um wie viel war dieser Anschlag zu hoch?

$94\frac{1}{2}$	1,97543	25,2	1,40140	
$\frac{1}{3}$	9,52288	42	1,62325	
1,25	0,09691	5,5	0,74036	
25,2	1,40140		2,14176	= RS. 138,60 sollte seyn
			2,36361	= RS. 231,00 angegeben

der Anschlag war zu hoch um RS. 92,40.

2) Im September 1833 kostete der Faden Kronflossholz auf dem Platz RS. 5, das Abführen 1, das Sägen 1, wie viel die gesetzliche Saschen?

RS. 7	0,84510
a	0,09691
RS. 5,60	0,74819

3) Im Januar 1841 kostete der Faden von 7 Fuss rundes Birken-Brennholz RS. 7,50, wie viel die gesetzliche Saschen?

RS. 7,50	0,87506
a	0,12493
RS. $5,62\frac{1}{2}$	0,75013

5.

Den Preis einer Stange russischen geschmiedeten Eisens aus den Preisen zweier andern Stangen von gleichem Gewicht zu berechnen.

Gesetzlich sollen sich (Rechenbuch II. 287.) bei gleichem Gewicht die Unterschiede der Preise wie die Unterschiede der Oberflächen verhalten. Das Stabeisen ist vierkantig, also $K = L \cdot B \cdot D$, $A = 2L \cdot B + 2L \cdot D = 2K\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{B}\right)$. Setzt man $\frac{1}{D} + \frac{1}{B} = c$, und bezeichnet man die Preise durch p, p', p'', so ist $\frac{p - p'}{p' - p''} = \frac{c - c'}{c' - c''}$. Sieht man p', p'' als die gegebenen Preise, p als den gesuchten Preis an, und setzt man den festen Preis $m = \frac{p'' \cdot c' - p' \cdot c''}{c' - c''}$, den festen Factor $a = \frac{p' - p''}{c' - c''}$, so ist jeder andre Preis $p = m + a \cdot c$, wornach man leicht eine Tabelle berechnen kann.

Beispiel. Ein Pud Stabeisen kostet bei 3 Zoll Breite, $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke Kop. S. $92\frac{1}{2}$, bei $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke Kop. S. 155, wie viel bei jeder andern Breite und Dicke?

$$B' = 3,\quad D' = \tfrac{1}{2},\quad c' = 2\tfrac{1}{3},\quad p' = 92\tfrac{1}{2},$$
$$B'' = 1\tfrac{1}{2},\quad D'' = \tfrac{1}{8},\quad c'' = 8\tfrac{2}{3},\quad p'' = 155,$$
$$\text{also } m = \frac{1320}{19} = 69{,}474,\quad a = \frac{1500}{152} = 9{,}868,$$
$$B = 2,\quad D = \tfrac{1}{4},\quad c = 4\tfrac{1}{2},\quad p = \text{Kop. S. } 113{,}88.$$

Bei dem sogenannten sortirten Eisen ist der Querschnitt ein regelmässiges Vieleck oder ein Kreis, also $K = \frac{1}{4}L \cdot D \cdot P$, $A = L \cdot P$, also $A = 4K \cdot \frac{1}{D}$. Setzt man also $\frac{1}{D} = c$, so erhält man dieselbe Formel wie oben.

Beispiel. Ein Pud sortirtes Eisen kostet bei $1\frac{1}{4}$ Zoll Dicke Kop. S. $92\frac{1}{2}$, bei $\frac{1}{4}$ Zoll Dicke Kop. S. 339; wie viel bei jeder andern Dicke?

$$D' = 1\tfrac{1}{4},\quad c' = \tfrac{4}{5},\quad p' = 92\tfrac{1}{2},$$
$$D'' = \tfrac{1}{4},\quad c'' = 4,\quad p'' = 339,$$
$$\text{also } m = 30{,}875,\quad a = 77{,}03125,$$
$$D = \tfrac{5}{8},\quad c = 1\tfrac{3}{5},\quad p = \text{Kop. S. } 154\tfrac{1}{8}.$$

6.

Das Gewicht eiserner Stangen, Platten, Kugeln u. s. w. zu berechnen.

Der körperliche Inhalt $= K$, der vom specifischen Gewicht abhängende Factor $= a$, das absolute Gewicht $= G$, also $G = a \cdot K$. Nach meiner Abwägung wiegt ein Cubikfuss russisches Schmiedeeisen 541,36 russische Pfund, Gusseisen aber 492,78 Pfund (englisches Schmiedeeisen 538,60, Gusseisen 498,40). Wenn also K in Cubikzollen, G in Pfund ausgedrückt ist, so ist für Schmiedeeisen $a = \frac{541,36}{1728}$, $\log a = 9,49595$; für Gusseisen $a = \frac{492,78}{1728}$, $\log a = 9,45511$. Wenn die Länge L in Fuss, Arschin oder Saschen angegeben ist, so muss man noch resp. mit 12, 28, 84 multipliciren.

Beispiele.

1) Eine vierkantige Stange Schmiedeeisen, $L = 5\frac{1}{2}$ Fuss, $B = 2\frac{1}{2}$ Zoll, $D = \frac{3}{4}$ Zoll.

	L	1,81954
	B	0,39794
	D	9,87506
	a	9,49595
Gewicht russ. Pfund 38,77		1,58849

2) Ein sechskantiger Stab Schmiedeeisen, $L = 3\frac{1}{2}$ Arschin; zwischen den Gegenflächen Dicke $D = 2\frac{1}{2}$ Zoll.

	L	1,99123
	D	0,39794
	D	0,39794
	c	9,93753
	a	9,49595
Gewicht russ. Pfund 166,18		2,22059

3) Eine runde Stange Schmiedeeisen, $L = 1\frac{3}{8}$ Saschen, $D = 1\frac{1}{4}$ Zoll.

	L	0,13830
	D	0,09691
	D	0,09691
	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
	a	9,49595
	84	1,92428
Gewicht russische Pfund 44,406		1,64744

4) Eisenplatten zum Dachdecken sind 2 Arschin lang, 1 Arschin breit, und wiegen 15 Pfund. Andre Eisenplatten sind $20\frac{1}{8}$ Zoll lang, 14 Zoll breit, und wiegen 1,275 Pfund. Wie viel Dicken gehen auf einen Zoll?

L	1,74819	L	1,30373
B	1,44716	B	1,14613
a	9,49595	a	9,49593
	2,69130		1,94579
G	1,17609	G	0,10551
	1,51521 = $32\frac{3}{4}$ auf einen Zoll.		1,84028 = $69\frac{1}{4}$ auf einen Zoll.

5) Drei Platten verzinntes Eisenblech waren jede 14 Zoll lang, 10,2 Zoll breit, wogen aber: die erste 0,8; die zweite 0,7; die dritte $\frac{7}{15}$ Pfund. Wie viel Dicken auf einen Zoll?

L	1,14613		1,65068
B	1,00860	G	9,90309
a	9,49595	G	9,84510
	1,65068	G	9,66901
			1,74759 = 55,9 auf einen Zoll
			1,80558 = 63,9 » » »
			1,98167 = 95,9 » » »

6) Ein Pfeiler von Gusseisen $L = 5\frac{1}{2}$ Fuss, $D = 6\frac{1}{2}$ Zoll.

L	1,81954
D	0,81291
D	0,81291
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
a	9,45511
Gewicht russ. Pfund 624,5	2,79556

7) Röhre von Gusseisen L = eine Saschen; die Wand $w = \frac{1}{3}$ Zoll, der äussere Durchmesser $D = 3\frac{1}{2}''$.

L	1,92428
w	9,52288
$D - w$	0,50060
π	0,49715
a	9,45511
Gewicht russ. Pfund 79,44	1,90002

8) Das Gewicht einer Kanonenkugel von Gusseisen von 2 Zoll Durchmesser heisst in der russischen Artillerie das Scalenpfund. Wie schwer ist dieses Pfund, und wie viel wiegt demnach eine 8pfündige Kanonenkugel nach russischem Gewicht?

D^3	0,90309
$\frac{1}{6}\pi$	9,71900
a	9,45511
	0,07720 = 1,1945 russ. Pf. ein Scalenpfund
8	0,90309
	0,98029 = 9 Pf. $53\frac{1}{3}$ Sol. die 8pf. Kanonenkugel.

7.

Das Gewicht von Goldstangen, Goldplatten u. s. w. zu berechnen.

Die Formel ist $G = a \cdot K$. Ein Cubikfuss gemünztes Gold von der 94 Probe wiegt 1300,62 russ. Pfund, jedes Pfund beträgt $117\frac{1}{2}$ Dukaten.

Also für Pfunde ist $a = \frac{1300,62}{1728}$, $\log a = 9,87660$,

für Dukaten ist $a = \frac{1300,62 \times 117\frac{1}{2}}{1728}$, $\log a = 1,94664$.

Beispiele.

1) Bei einer Barre Dukatengold ist $L = 5''$, $B = \frac{3}{4}''$, $D = \frac{1}{2}''$.

	L	9,69897
	B	9,87506
	D	9,69897
	a	9,87660
Gewicht russ. Pf. 1. 39 Sol. 45 Doli		0,14960
	$117\frac{1}{2}$	2,07004
Werth Dukaten 165,8		2,21964

2) Das Gewicht eines Drahtes Dukatengold ist 1 russ. Pf., die Dicke $\frac{1}{100}$ Zoll.

	D^2	6,
	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
	a	9,87660
	12	1,07918
		6,85087
Die Länge 1409,7 Fuss...	L	3,14913

3) Das Gewicht eines Drahts Dukatengold ist 1 russ. Pfund, die Dicke $\frac{1}{1000}$ Zoll.

	D^2	4,
	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
	a	9,87660
	42000	4,62325
		8,39494
Die Länge 40,277 Werst...	L	1,60506

4) Ein Dukaten liefert 2729,73 Quadratzoll Blattgold, wie dick ist es?

	2729,73	3,43612
	a	9,87660
	$117\frac{1}{2}$	2,07004
Auf einen Zoll 24141...	$\frac{1}{L}$	5,38276

5) Bei Vergoldung des Silbers liefert ein Dukaten 36 Quadratzoll Vergoldung.

	36	1,55630
	a	9,87660
	$117\frac{1}{2}$	2,07004
Auf einen Zoll 3184...	$\frac{1}{L}$	3,50294

8.

Die Menge des zu Bauten erforderlichen Materials zu berechnen.

Die gesetzlichen Bestimmungen für Bauanschläge enthält der Befehl vom 15. Januar 1825, No. 30194, aus welchem ich folgendes aushebe: „Bei Mauerwerk zu Fundamenten schlägt man zu der berechneten Anzahl Cubiksaschen, für Ausfüllung der Zwischenräume noch den 6ten Theil hinzu. Nach dieser Zugabe rechnet man auf 5 Cubiksaschen Steine, für Mörtel 1 Cubiksaschen oder 480 Pud ungelöschten Kalk und 1 Cubiksaschen Sand.“

„Bei Mauern von Ziegeln rechnet man auf 1 Saschen mit Inbegriff der Mörtelfugen 8 Ziegellängen, 16 Ziegelbreiten, 30 Ziegeldicken, so dass 3840 Ziegel eine Cubiksaschen machen.“ (Nach meiner Ausmessung an mitauischen Ziegeln 1835, enthält eine Saschen mit Inbegriff der Mörtelfugen $7\frac{1}{2}$ Ziegellängen, 15 Ziegelbreiten, 23 Ziegeldicken, also 1 Cubiksaschen $2587\frac{1}{2}$ Ziegel.)

„Zu der berechneten Anzahl Ziegel schlägt man noch den 10ten Theil für zerbrochene hinzu. Nach dieser Zugabe rechnet man, bei Gebäuden, welche nicht über 6 Saschen hoch sind, auf 100,000 Ziegel für Mörtel 6 Cubiksaschen ungelöschten Kalk und 10 Cubiksaschen Sand, oder 10 Cubiksaschen gelöschten Kalk.“

„Bei eisernen Stangen rechnet man auf 3 Cubikzoll ein Pfund. Bei Eisenplatten zu Dächern rechnet man das Gewicht einer Platte von zwei Quadratarschin zu 15 Pfund, und wegen der Umbiegung der Ränder 16 Platten auf 3 Quadratarschin. Eine Platte von 1 Quadratarschin rechnet man zu $7\frac{1}{2}$ Pfund, und wegen der Umbiegung 12 Platten auf 1 Quadratarschin.“

Beiläufige Angaben des Gewichts der Materialien sind, auf einen Cubikfuss: Fichtenholz 1 Pud, Erde 2 Pud, Sand und Grand $2\frac{1}{2}$, Ziegel $3 - 3\frac{1}{4}$, feuchter Mörtel $3\frac{1}{2}$, Sandstein $3\frac{3}{4} - 4\frac{1}{3}$, Granit $4\frac{1}{2}$, Kalkstein $4\frac{2}{3}$ Pud. Genauere Bestimmungen findet man in meinem Rechenbuch II. 275—277.

9.

Den Inhalt cylindrischer Röhren und Gefässe zu berechnen.

Die Formel ist: $K = a \cdot L \cdot D^2$, die Länge L in Fuss, die innere Weite D in Zoll. Soll der Inhalt K in Cubikzoll angegeben werden, so ist $a = 3\pi$, $log\ a = 0{,}97427$.

Für K Cubikfuss ist $a = \frac{\pi}{576}$, $log\ a = 7,73673$. Für K russische Stoof ist, weil ein Stoof = 75,0568 Cubikzoll, $a = \frac{3\pi}{75,0568}$, $log\ a = 9,09888$. Da ein Cubikzoll destillirtes Wasser in der Luft bei $13\frac{1}{3}^0$ Réaum. und 30 Zoll Barometerhöhe 367,96315 Doli wiegt, so ist für K russ. Pfund Wasser bei dieser Temperatur, $a = \frac{3\pi \cdot 367,96315}{9216}$, $log\ a = 9,57553$.

Beispiele.

1) Bei einem cylindrischen Fasse ist $L = 3'\ 4''$, innere Weite $D = 30''$.

	L	0,52288
	D	1,47712
	D	1,47712
	a	9,09888
Inhalt russ. Stoof 376,7		2,57600

2) Bei einer Wasserröhre ist $L = 81\frac{1}{2}$ Fuss, der Durchmesser $D = 3\frac{1}{4}$ Zoll.

	L	1,91116
	D	0,51188
	D	0,51188
	a	9,57553
Wassergewicht russ. Pfund 323,93		2,51045

10.

Aus dem Inhalt cylindrischer Röhren oder Gefässe, ihre Länge oder Weite zu berechnen.

Da hier K gegeben, L oder D gesucht, so ist die Formel: $a \cdot K = L \cdot D^2$, wo a den umgekehrten Werth des a in der vorigen Aufgabe hat, also wenn L in Fuss, D in Zoll, so ist für K Cubikzoll $log\ a = 9,02573$,
für K Cubikfuss $log\ a = 2,26327$,
für K Stoof $log\ a = 0,90112$,
für K Pfund Wasser $log\ a = 0,42447$.

Beispiele.

1) Bei einem runden Balken ist $K = 18$ Cubikfuss, $L = 20$ Fuss.

	K	1,25527
	a	2,26327
	L	1,30103
	D^2	2,21751
Durchmesser 12,845 Zoll	D	1,10875

2) Bei einer Röhre ist $K = 3750$ Cubikzoll, $D = 5\frac{1}{2}$ Zoll.	K	3,57403
	a	9,02573
	D	0,74036
	D	0,74036
Länge in Fuss 13,153	L	1,11904

3) Bei einem cylindrischen Fasse ist $K = 125$ Stoof, $L = 3\frac{1}{2}$ Fuss.	K	2,09691
	a	0,90112
	L	0,54407
	D^2	2,45396
Weite in Zollen 16,864	D	1,22698

4) Bei einer Wasserröhre ist $K = 68$ Pfund Wasser, innere Weite $D = 2\frac{1}{3}$ Zoll.	K	1,83251
	a	0,42447
	D	0,36797
	D	0,36797
Länge in Fuss 33,192	L	1,52104

11.

Den Inhalt vierkantiger gleichförmig breiter und dicker Balken und Breter zu berechnen.

Die Formel ist $K = a \cdot L \cdot B \cdot D$, wo L in Fuss, B und D in Zollen, K in Cubikfuss, also $a = \frac{1}{144}$, $\log a = 7{,}84164$.

Beispiele.

1) Bei einem Balken ist $L = 57'$, $B = 25''$, $D = 18''$.	L	1,75587
	B	1,39794
	D	1,25527
	a	7,84164
Cubikfuss $178\frac{1}{8}$	K	2,25072

2) Bei 1000 Stück Bretern ist $L = 28'$, $B = 11\frac{1}{2}''$, $D = 1\frac{1}{2}''$.	1000	3,
	L	1,44716
	B	1,06070
	D	0,17609
	a	7,84164
Cubikfuss 3354	K	3,52559

3) Bei 1583 Stück Bretern ist im Durchschnitt $L = 32'$, $B = 12\frac{1}{2}''$, $D = 1\frac{3}{4}''$.	1583	3,19948
	L	1,50515
	B	1,09691
	D	0,24304
	a	7,84164
Cubikfuss 7695	K	3,88622

12.

Den Inhalt vierkantiger, sechskantiger, überhaupt abgestumpft pyramidalischer Balken zu berechnen, welche von unten nach oben einen Abfall haben oder schmäler werden.

Die Formel ist: $K = a \cdot c \cdot L\,(D + d)^2 + \frac{1}{3}a \cdot c \cdot L\,(D - d)^2$, wo die Länge oder Höhe L in Fuss; D und d in Zollen, sind zwei gleichnamige Linien, Kanten oder Durchmesser der Querschnitte, $c \cdot D^2$ und $c \cdot d^2$ sind die Flächen der Querschnitte, $a = \frac{1}{576}$, $\log a = 7{,}23958$; $\frac{1}{3}a = \frac{1}{1728}$, $\log = 6{,}76246$. Beim Quadrat ist $c = 1$. Bei andern regelmässigen Figuren bestimmt man c nach V. 51.

Beispiele.

1) Bei einem vierkantigen Balken ist $L = 49$ Fuss, die Querschnitte Quadrate, $D = 14''$, $d = 12''$, $c = 1$.

L	1,69020	L	1,69020
$D+d$	1,41497	$D-d$	0,30103
$D+d$	1,41497	$D-d$	0,30103
a	7,23958	$\frac{1}{3}a$	6,76246
	1,75972		9,05472
Cubikfuss	57,507		0,114

Hieraus $K = 57{,}621$ Cubikfuss

2) Bei einem vierkantigen Balken ist $L = 48$ Fuss, die Querschnitte sind keine Quadrate, unten $D = 14''$, $D' = 12''$, also $c = \frac{12}{14}$, oben $d = 10''$.

L	1,68124	L	1,68124
$D+d$	1,38021	$D-d$	0,60206
$D+d$	1,38021	$D-d$	0,60206
c	9,93305	c	9,93305
a	7,23958	$\frac{1}{3}a$	6,76246
	1,61429		9,58087
Cubikfuss	41,143		0,381

Hieraus $K = 41{,}524$ Cubikfuss

3) Bei einem sechskantigen Balken ist $L = 37'$, der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises $D = 14''$, $d = 11''$, $c = 0{,}8660254$.

L	1,56820	L	1,56820
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,47712
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,47712
c	9,93753	c	9,93753
a	7,23958	$\frac{1}{3}a$	6,76246
	1,54119		9,22243
Cubikfuss	34,769		0,167

Hieraus $K = 34{,}936$ Cubikfuss

13.

Den Inhalt runder Balken von gleichförmiger Stärke zu berechnen.

Die Formel ist $K = a \cdot L \cdot D^2$, $a = \frac{\pi}{576}$, $\log a = 7{,}73673$, oder $K = a \cdot L \cdot P^2$, $a = \frac{1}{576\pi}$, $\log a = 6{,}74243$, wo

L in Fuss, D und P in Zollen. Wenn die Balken noch mit Rinde bedeckt sind, so nimmt man die Dicke der Rinde zu $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, oder $\frac{1}{8}$ des äussern Durchmessers an, und muss dann den obigen Inhalt resp. mit $\frac{121}{144}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{49}{64}$ multipliciren. Bei den Masten, Spieren, Bugsprieten, Burtillen wird der Umfang mittelst eines umgelegten Bandes von Fischbein in einer Höhe von 12 Fuss über dem untern behauenen Ende gemessen. Die Einheit ist der holländische Palm $= \frac{1}{3}$ holländische Fuss $=$ 3,717 engl. Zoll. Wenn P in Palmen, so ist $\log a = 7{,}88281$ (rigische Handelsordnung 7. Dec. 1765, Kap. I. § 136. Instruction für die russischen Mastenbraker 15. Juni 1784, Art. 7. In der Schrift: „Berechnung der Zölle und Unkosten, Riga 1829", sind die Verhältnisse S. 26. 30. nach der obigen Bestimmung des Palm zu berichtigen).

Beispiele.

1) Bei einem runden Balken ist $L = 49'$, der Durchmesser ohne Rinde $D = 12''$.

L	1,69020
D	1,07918
D	1,07918
a	7,73673
Cubikfuss 38,484 $= K$	1,58529

2) Bei einem runden Balken ist $L = 36'$, ohne Rinde $D = 14''$.

L	1,55630
D	1,14613
D	1,14613
a	7,73673
Cubikfuss 38,484 $= K$	1,58529

3) Bei einem runden Balken ist $L = 46'$, $D = 13''$, ohne Rinde.

L	1,66276
D	1,11394
D	1,11394
a	7,73673
Cubikfuss 42,40 $= K$	1,62737

4) Bei einem runden Balken ist $L = 26'$, $D = 15''$ mit Rinde, welche $\frac{1}{12}$.

L	1,41497
D	1,17609
D	1,17609
a	7,73673
$\frac{121}{144}$	9,92443
Cubikfuss 26,81 $= K$	1,42831

5) Bei einem runden Balken ist $L = 35'$, der Umfang ohne Rinde $P = 32''$.	L	1,54407
	P	1,50515
	P	1,50515
	a	6,74243
Cubikfuss 19,806 =	K	1,29680

6) Bei einem runden Balken ist $L = 49'$, $D = 12\frac{3}{4}''$ ohne Rinde	L	1,69020
	D	1,10551
	D	1,10551
	a	7,73673
Cubikfuss 43,446 =	K	1,63795

7) Bei einem runden Balken ist $L = 35'$, der Umfang $P = 11$ Palmen.	L	1,54407
	P	1,04139
	P	1,04139
	a	7,88281
Cubikfuss 32,334 =	K	1,50966

14.

Den Inhalt runder abgestumpft konischer Balken zu berechnen, welche von unten nach oben einen Abfall haben, oder schmäler werden.

Die Formeln sind, für L in Fuss, D, d, P, p in Zollen:

$$K = a \cdot L \cdot (D + d)^2 + \tfrac{1}{3}a \cdot L \cdot (D - d)^2,$$

$$a = \frac{\pi}{2304}, \quad \tfrac{1}{3}a = \frac{\pi}{6912},$$

$$log = 7{,}13467, \quad log = 6{,}65755,$$

$$K = a \cdot L \cdot (P + p)^2 + \tfrac{1}{3}a \cdot L \cdot (P - p)^2,$$

$$a = \frac{1}{2304\pi}, \quad \tfrac{1}{3}a = \frac{1}{6912\pi},$$

$$log = 6{,}14037, \quad log = 5{,}66325.$$

Wenn der Umfang in Palmen gemessen ist, so ist $log\ a = 7{,}28075$, $log\ \tfrac{1}{3}a = 6{,}80363$.

Beispiele.

1) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 46'$, $D = 15''$, $d = 10''$.	L	1,66276	L	1,66276
	$D + d$	1,39794	$D - d$	0,69897
	$D + d$	1,39794	$D - d$	0,69897
	a	7,13467	$\frac{1}{3}a$	6,65755
		1,59331		9,71825
Hieraus $K = 39{,}725$ Cubikfuss.		39,202		0,523

2) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 47\frac{1}{2}'$, $P = 45''$, $p = 31\frac{1}{2}''$.

L	1,67669	L	1,67669
$P+p$	1,88366	$P+p$	1,13033
$P+p$	1,88366	$P+p$	1,13033
a	6,14037	$\frac{1}{3}a$	5,66325
	1,58438		9,60060
	38,405		0,399

Hieraus $K = 38,804$ Cubikfuss.

3) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 50'$, $D = 13''$, $d = 9''$.

L	1,69897	L	1,69897
$D+d$	1,34242	$D-d$	0,60206
$D+d$	1,34242	$D-d$	0,60206
a	7,13467	$\frac{1}{3}a$	6,65755
	1,51848		9,56064
	32,998		0,363

Hieraus $K = 33,361$ Cubikfuss.

4) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 46\frac{3}{4}'$, $P = 16\frac{1}{4}$ Palm, $p = 11\frac{1}{2}$ Palm.

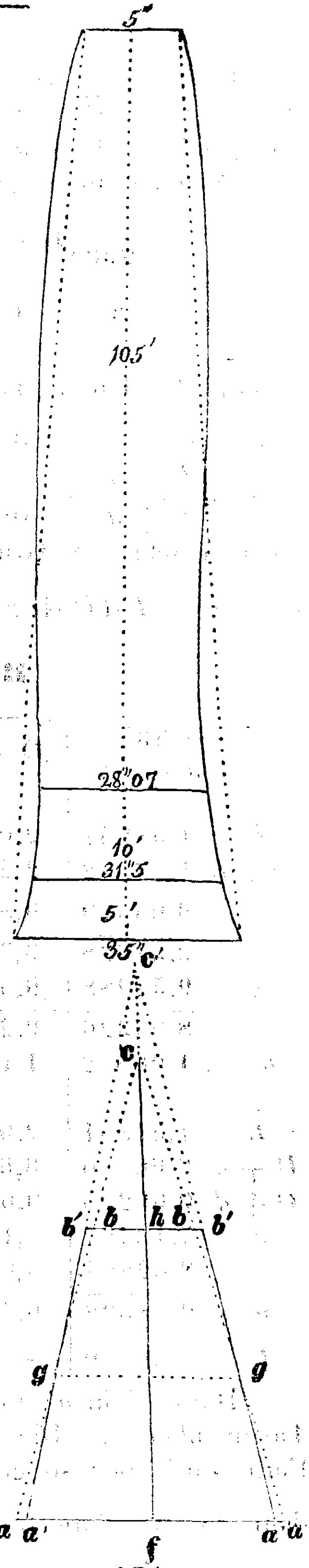
L	1,66978	L	1,66978
$P+p$	1,44326	$P-p$	0,67669
$P+p$	1,44326	$P-p$	0,67669
a	7,28075	$\frac{1}{3}a$	6,80363
	1,83705		9,82679
	68,715		0,671

Hieraus $K = 69,386$ Cubikfuss.

15.

Den Inhalt eines Baumes zu berechnen.

Der berühmte königl. sächsische Oberforstrath Cotta, dessen „Tafeln zur Bestimmung des Inhalts der runden Hölzer, Dresden 1838, 3te Auflage“, in allgemeinem Gebrauch sind, hat nach vielfachen Untersuchungen ausgemittelt, dass jeder ausgewachsene Baum durchschnittlich eine gewisse mittlere Form hat, welche er den Normalbaum nennt. Dieser Baum besteht aus drei Theilen 1) aus einem untern hohl oder einwärts gekrümmten Stück von 5 Fuss Höhe, unten 35 Zoll, oben 31,5 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 29,60 Cubikfuss (konisch berechnet 30,18 Cubikfuss); 2) aus einem gradlinig abfallenden oder konischen Stück von 10 Fuss Höhe, unten 31,5 Zoll, oben 28,07 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 48,44 Cubikfuss; 3) aus einem erhaben oder auswärts gekrümmten Stück von 105 Fuss Höhe, unten 28,07 Zoll, oben 5 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 232,77 Cubikfuss (konisch berechnet 181,975 Cubikfuss). Der Gesammtinhalt dieser drei Stücke ist 310,81 Cubikfuss. Ein parallel abgestumpfter Kegel von 120 Fuss Höhe, unten 35, oben 5 Zoll im Durchmesser, hat nahezu denselben Inhalt, nämlich 310,89 Cubikfuss.



Bei einem solchen Kegel ist der mittlere Durchmesser $gg = 20''$, die Spitze c hat eine Höhe $ch = 20'$ über dem obern Ende, der mittlere Durchmesser $20''$ verhält sich also zur Baumhöhe $fh = 120'$ wie $1 : 72$, die Summe der beiden Durchmesser $35'' + 5''$, welche die **Stärke** heisst, verhält sich zur Baumhöhe wie $1 : 36$. Wenn nun die Form aller Bäume diesem Normalbaum ähnlich wäre, so müsste ihr mittlerer Durchmesser $\frac{1}{72}$, ihre Stärke $\frac{1}{36}$ der Höhe seyn. Man verlangt aber kubische Tafeln, welche für jede Baumhöhe und jede Stärke den Inhalt anzeigen. Die Cotta'schen Tafeln bestehen aus drei Abtheilungen 1) $1'' - 4''$ Stärke bei $1' - 33'$ Höhe; 2) $5'' - 28''$ Stärke bei $1' - 125'$ Höhe; 3) $29'' - 100''$ Stärke bei $1' - 61'$ Höhe. Der Verf. hat die Art der Berechnung nicht geometrisch erläutert, da es ihm, wie er S. 10 sagt, nicht um mathematische Spitzfindigkeit (?) zu thun war. Aus den von ihm gegebenen Andeutungen lässt sich indessen folgendes entnehmen:

Es sey $a'a'b'b'$ der gegebene Baum, die Höhe $fh = L$ in Fuss, die Durchmesser unten $a'a'$, oben $b'b'$ in Zollen angegeben. Man theilt die Seitenlinien $a'b'$, $a'b'$ in g, g in die Hälfte, verlängert die Axe fh nach c, so dass $ch = 20$ Fuss, und zieht cg, cg, welche die Durchmesser oben bb, unten aa abschneiden. Nun sind zwar die Flächen, nicht aber die körperlichen Räume $aabb$, $a'a'b'b'$ einander gleich. Indessen diese Voraussetzung liegt den Cotta'schen Tafeln zum Grunde.

Es ist nämlich $bb = gg \cdot \dfrac{20}{20 + \frac{1}{2}L}$,

und $aa = gg \cdot \dfrac{20 + L}{20 + \frac{1}{2}L}$, also

$aa + bb = 2 \cdot gg$, und $aa - bb = gg \cdot \frac{L}{20 + \frac{1}{2}L}$, also $\frac{aa - bb}{aa + bb} = \frac{D - d}{D + d} = \frac{L}{40 + L}$.

Nun ist die allgemeine Formel:

$$K = \frac{\pi}{2304} L \cdot (D + d)^2 + \frac{\pi}{6912} L \cdot (D - d)^2,$$

oder $K = K' + K''$, wo $K' = \frac{\pi}{2304} L \cdot (D + d)^2$ der cylindrische Theil, und $K'' = \frac{1}{3} K' \cdot \left(\frac{D - d}{D + d}\right)^2$ die Ergänzung heisst. Nach der Voraussetzung der Cotta'schen Tafeln ist nun $\frac{D - d}{D + d} = \frac{L}{40 + L}$. Die Formel, welche den Cotta'schen Tafeln zum Grunde liegt, ist also folgende:

$$K = a \cdot b \cdot L \cdot (D + d)^2,\ a = \frac{\pi}{2304},\ b = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{40 + L}\right)^2.$$

Beispiele.

	$L = 33'$ $D + d = 4''$	$L = 125'$ $D + d = 5''$	$L = 120'$ $D + d = 28''$	$L = 61'$ $D + d = 62''$	$L = 60'$ $D + d = 100$
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$40 + L$	1,86332	2,21748	2,20412	2,00432	2
	9,65519	9,87943	9,87506	9,78101	9,77815
	9,31038	9,75886	9,75012	9,56202	9,55630
$\frac{1}{3}$	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288
	8,83326	9,28174	9,27300	9,08490	9,07918
$b =$	1,06812	1,19131	1,1875	1,12159	1,1200
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$D + d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2
$D + d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2
a	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467
b	0,02862	0,07602	0,07463	0,04984	0,04922
K	9,88592	0,70554	2,18280	2,55462	2,96204
$K =$	0,769	= 5,076	= 152,33	= 358,61	= 916,3

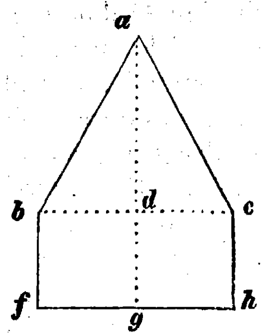
Diese Zahlen stimmen vollkommen mit den Cotta'schen Tafeln überein. Die genaue Rechnung nach der konischen Form wird eben so geführt, indem man nur statt des hypothetischen Verhältnisses $\frac{L}{40 + L}$ das richtige $\frac{D - d}{D + d}$ setzt.

	$L = 33'$ $D = 3''$, $d = 1''$	$L = 125'$ $D = 4''$, $d = 1''$	$L = 120'$ $D = 18''$, $d = 10''$	$L = 61'$ $D = 59''$, $d = 3''$	$L = 60'$ $D = 58''$, $d = 42''$
$D - d$	0,30103	0,47712	0,90309	1,74819	1,20412
$D + d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2
	9,69897	9,77815	9,45593	9,95580	9,20412
	9,39794	9,55630	8,91186	9,91160	8,40824
$\frac{1}{3}$	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288
	8,92082	9,07918	8,43474	9,43448	7,93112
$b =$	1,08333	1,1200	1,02721	1,27194	1,00853
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$D + d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2
$D + d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2
a	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467
b	0,03476	0,04922	0,01166	0,10447	0,00369
	9,89206	0,67874	2,11983	2,60925	2,91651
K	$=$ 0,780	$=$ 4,772	$=$ 131,77	$=$ 406,68	$=$ 825,1

16.

Den Inhalt der Garbenhaufen zu berechnen.

Auf meine Bitte veranstaltete ein erfahrner Landwirth in Litthauen eine sorgfältige Ausmessung eines Garbenhaufens (Kuje), wie solche in dortiger Gegend nach der Erndte aufgeschichtet werden. Bei dem cylindrischen Rumpf $bchf$ war die Höhe $dg = L = 8$ Fuss, der Durchmesser der Grundfläche $bc = D = 18$ Fuss. Von dem konischen Dache abc war die Höhe $ad = L' = 13$ Fuss.



Der Inhalt war $94\frac{1}{2}$ Schock oder 5670 Garben, welche einen reinen Ertrag von $155\frac{1}{6}$ rig. Loof Roggen lieferten. Die Formel ist $K = \frac{\pi}{12} \cdot D^2 \cdot (3L + L')$.

$3L + L'$	1,56820	K	3,49671	K	3,49671
D	1,25527	100	2	100	2
D	1,25527	$94\frac{1}{2}$	1,97543	$155\frac{1}{6}$	2,19080
$\frac{1}{12}\pi$	9,41797	3321	3,52128	2023	3,30591
K	3,49671				

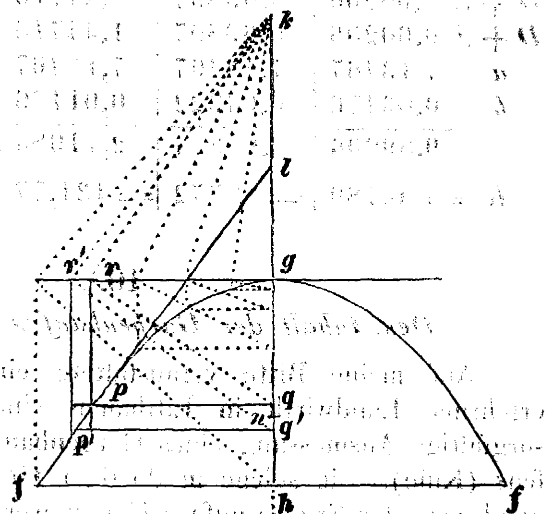
Demnach war der Inhalt des Garbenhaufens 3138 Cubikfuss; in einem Garbenhaufen von 3321 Cubikfuss sind 100 Schock Garben, und in einem Haufen von 2023 Cubikfuss sind 100 rig. Loof Roggen enthalten.

17.

Den Inhalt eines Fasses bei vorausgesetzter parabolischer Krümmung der Dauben zu berechnen.

Erster Theil.

Den Flächeninhalt eines parabolischen Segments zu bestimmen.



Es sey fgf (V. 64. 69.) ein Bogen der Parabel, g der Scheitel, gh, gr die beiden rechtwinklig einander schneidenden Axen der Abscissen und Ordinaten, $gk = A$ eine feste Linie, welche der Parameter heisst. Für jede beliebige Ordinate $gr = y$ zieht man kr, und darauf rq senkrecht, wodurch sich die Abscisse $gq = x$ ergiebt. Der Durchschnitt der Parallellinien rp, qp giebt den entsprechenden Punct p der Parabel. Also ist für jeden Punct derselben $y^2 = A \cdot x$. Für einen zweiten Punct p' ist $y'^2 = A \cdot x'$, also $y'^2 - y^2 = A \cdot (x' - x)$. Aber $y'^2 - y^2 = (y' - y) \cdot (y' + y)$, also $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{A}{y' + y}$. Es sey lp eine Berührende, so ist, je näher y und y' einander sind, desto genauer $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{pq}{lq} = \frac{y}{lq}$, und $\frac{A}{y' + y} = \frac{A}{2y}$. Also ist genau $\frac{y}{lq} = \frac{A}{2y}$, also $2y^2 = A \cdot lq$, also $lq = 2x$, $gl = x$. Hierdurch ergiebt sich der Punct l, aus welchem die Berührende gezogen wird.

Je näher y und y' einander sind, desto genauer ist $y' + y = \frac{4}{3} \cdot \frac{y'^2 + y'y + y^2}{y' + y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(y' - y)(y'^2 + y'y + y^2)}{(y' - y)(y' + y)}$ $= \frac{4}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{y'^2 - y^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{A \cdot (x' - x)}$, also desto genauer $\frac{1}{2}(y' + y)(x' - x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{A}$. Das Glied links ist das zwischen den Ordinaten $pq = y$, und $p'q' = y'$ enthaltene Trapezium. Je näher y und y' einander sind, desto genauer ist die Summe aller Glieder links dem halben Segment $fgh = \frac{1}{2}F$ gleich. Auf der rechten Seite heben sich bei der Summirung aller Differenzen $y'^3 - y^3$ alle Zwischenglieder auf, und die Summe ist also fh^3. Folglich ist genau das halbe Segment $\frac{1}{2}F = \frac{2}{3} \cdot \frac{fh^3}{A} = \frac{2}{3}fh \cdot gh$, also $F = \frac{4}{3}ff \cdot gh$ (V. 69.).

Zweiter Theil.

Den Schwerpunct eines parabolischen Segments zu bestimmen.

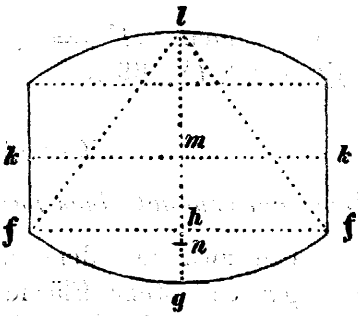
Die zwischen dem parabolischen Bogen fgf und der Axe gr enthaltene Fläche beschreibe um die Axe gr einen Körper, so beschreiben die Puncte p, p' Kreise, deren Halbmesser x, x', deren Flächen $\pi \cdot x^2$, $\pi \cdot x'^2$, oder $\frac{\pi}{A^2} \cdot y^4$, $\frac{\pi}{A^2} \cdot y'^4$ sind. Also beschreibt das Trapezium $rpp'r'$ einen Körper, dessen Inhalt, je näher y und y' sind, desto genauer $= \frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y'^4 + y^4}{2}(y' - y)$ ist, oder $= \frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y'^4 + y'^3 \cdot y + y'^2 \cdot y^2 + y' \cdot y^3 + y^4}{5}(y' - y)$.

Aber die Multiplication giebt:
$(y'^4 + y'^3 \cdot y + y'^2 \cdot y^2 + y' \cdot y^3 + y^4)(y' - y) = y'^5 - y^5$. Also je näher y und y' sind, desto genauer ist der vom Trapezium $rpp'r'$ beschriebene Körper $= \frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y'^5 - y^5}{5}$. Durch Summirung der Differenzen $y'^5 - y^5$ heben sich alle Zwischenglieder auf, und man erhält fh^5. Also ist der vom Segment $fpgr$ um gr beschriebene Körper genau $= \pi \cdot \frac{fh^5}{5A^2} = \frac{1}{5}\pi \cdot fh \cdot gh^2$. Der vom Rechteck $fhgr$ beschriebene Cylinder ist

$= \pi \cdot fh \cdot gh^2$, also ist der vom halben parabolischen Segment fgh beschriebene Körper $= \frac{4}{5}\pi \cdot fh \cdot gh^2$, und der vom ganzen Segment fgf beschriebene Körper $= \frac{4}{5}\pi \cdot ff \cdot gh^2$. Es sey n der Schwerpunct des parabolischen Segments $fgf = F$, so muss, weil die Axe gh dieses Segment symmetrisch theilt, n in gh liegen. Also ist der genannte Körper auf (VII. 49.) $= 2\pi \cdot gn \cdot F = 2\pi \cdot gn \cdot \frac{2}{3} \cdot ff \cdot gh$. Man hat also die Gleichung $2\pi \cdot gn \cdot \frac{2}{3} \cdot ff \cdot gh = \frac{4}{5}\pi \cdot ff \cdot gh^2$, also ist $gn = \frac{3}{5}gh$, und $hn = \frac{2}{5}gh$.

Dritter Theil.

Den Inhalt des parabolischen Fasses zu bestimmen.



Dieser Inhalt entsteht durch Umdrehung der Figur $kfgfk$ um die Axe kk. Im ersten Theil wurde der Flächeninhalt des parabolischen Segments $fgf = F = \frac{2}{3}ff \cdot gh$ bestimmt. Im zweiten Theil wurde der Schwerpunct n dieses Segments gefunden, $hn = \frac{2}{5}gh$, also $mn = mh + \frac{2}{5}gh$. Also ist der körperliche Inhalt des vom Segment fgf durch Umdrehung um kk beschriebenen Raums (VII. 49.) $= 2\pi \cdot mn \cdot \frac{2}{3}ff \cdot gh = \frac{4}{3}\pi \cdot ff \cdot gh(mh + \frac{2}{5}gh)$. Der durch Umdrehung des Rechtecks $kffk$ um kk beschriebene Cylinder ist $= \pi \cdot ff \cdot mh^2$, also der körperliche Inhalt des ganzen Fasses $K = \pi \cdot ff \cdot (mh^2 + \frac{4}{3}mh \cdot gh + \frac{8}{15}gh^2)$. Setzt man die Länge des Fasses $ff = L$, den Spunddurchmesser $lg = 2 \cdot mg = D$, den Bodendurchmesser $2 \cdot kf = 2 \cdot mh = d$, so ist $mh^2 = \frac{1}{4}d^2$, $\frac{4}{3}mh \cdot gh = \frac{1}{3}d \cdot (D - d)$, $\frac{8}{15}gh^2 = \frac{2}{15}(D - d)^2$, also

$$1)\quad K = \frac{\pi}{60}L \cdot (8 \cdot D^2 + 4D \cdot d + 3 \cdot d^2).$$

Wenn L, D und d in Zollen gegeben sind, so erhält man K in Cubikzollen. Das geeignetste Maass zur Bestimmung des Fassinhalts ist aber das Stoof, indem alle grössern Weinmaasse Vielfache desselben sind, nämlich ein Stückfass 960, eine Tonne 400, eine Pipe 360, ein Oxhoft oder Barrique 180, ein Ohm 120, ein Anker 30, ein Steekan 15, ein Wedro 10, ein Viertel oder eine Velte 6 Stoof. Die Grösse dieses Maasses ist in den verschiedenen Ländern ziemlich übereinstimmend, nämlich:

Die alte französische Velte oder der Septier hielt nach genauer Ausmittelung einer Commission 375,6 par. Cubikzoll, also das Stückfass 60096 par. oder 72754 engl. Cubikzoll, also das Stoof 75,785 Cubikzoll.

Das jetzige bordeauxer Oxhoft oder Barrique von 32 Veltes hält 229,63 Litres, also das Stückfass 1149,65 Litres oder 70158 engl. Cubikzoll, also das Stoof 73,081 Cubikzoll.

Das frankfurter Stückfass wiegt nach Chelius 2449,4 frankfurt-kölner Pfund Wasser, und hält also 70105,6 engl. Cubikzoll, also das Stoof 73,027 Cubikzoll.

Das russische Stückfass wiegt gesetzlich im leeren Raum bei $13\frac{1}{3}^0$ Réaum. 2880 russ. Pfund Wasser, und hält also 72054,5 Cubikzoll, also das Stoof 75,0568 Cubikzoll.

Das rigische Stückfass hält nach meiner Ausmittelung des neuen rigischen Stoofs 74711 Cubikzoll, das Stoof 77,824 Cubikzoll.

Um also den Inhalt des Fasses in russischen Stoof zu erhalten, dividirt man die obige Formel mit 75,0568. Hiernach ist

$$2)\ K = a' \cdot L \cdot D^2 + a'' \cdot L \cdot D \cdot d + a''' \cdot L \cdot d^2,$$
$$\log a' = 7{,}74670;\quad \log a'' = 7{,}44567;\quad \log a''' = 7{,}32073.$$

Beispiele.

1) $L = 30''$, $D = 22''$, $d = 20''$.

L	1,47712	L	1,47712	L	1,47712	I	81,03
D	1,34242	D	1,34242	d	1,30103	II	36,83
D	1,34242	d	1,30103	d	1,30103	III	25,11
a'	7,74670	a''	7,44567	a'''	7,32073		142,97 Stoof.
I	1,90866	II	1,56624	III	1,39991		

2) $L = 41''$, $D = 36''$, $d = 28''$.

L	1,61278	L	1,61278	L	1,61278	I	296,54
D	1,55630	D	1,55630	d	1,44716	II	115,32
D	1,55630	d	1,44716	d	1,44716	III	67,27
a'	7,74670	a''	7,44567	a'''	7,32073		479,13 Stoof.
I	2,47208	II	2,06191	III	1,82783		

Vierter Theil.

Den Inhalt des Fasses aus der Diagonallinie zu bestimmen.

Der Visirstab wird durch den Spund l in die Diagonalrichtung lf gebracht, und soll auf der Eintheilung den Inhalt

anzeigen. Es sey die Diagonallinie $lf = E$, der Winkel $flh = n$,
so ist $fh = \frac{1}{2}L = E \cdot \sin n$, $lh = \frac{1}{2}(D + d) = E \cdot \cos n$,
also $\frac{L}{D + d} = tg\ n$. Setzt man ferner $\frac{D - d}{D + d} = c$,
so ist $D - d = (D + d) \cdot c$,
also $gh = \frac{1}{2}(D + d) \cdot c$, $mh = \frac{1}{4}(D + d)(1 - c)$,
also $K = \frac{1}{4}\pi \cdot L \cdot (D + d)^2 \cdot (\frac{1}{4}(1 - c)^2 + \frac{2}{3}c(1 - c) + \frac{8}{15}c^2)$,
oder $K = \frac{\pi}{16} \cdot L \cdot (D + d)^2 (1 + \frac{2}{3}c + \frac{7}{15}c^2)$,
oder 3) $K = \frac{1}{2}\pi \cdot E^3 \cdot \sin n \cdot \cos^2 n (1 + \frac{2}{3}c + \frac{7}{15}c^2)$.

Der Factor $1 + \frac{2}{3}c + \frac{7}{15}c^2 = b$ zeigt das Verhältniss des Fasses zu einem Cylinder von gleicher Länge L und gleichem mittlern Durchmesser $\frac{1}{2}(D + d)$ an. Der ganze Factor $\frac{1}{2}\pi \cdot \sin n \cdot \cos^2 n \cdot b = a$ zeigt das Verhältniss des Fasses zu einem Cubus von gleicher Diagonallinie E an. Wenn E in Zollen gegeben ist, so ist hiernach

4) $K = E^3 \cdot a$ in Cubikzollen bestimmt.

Um den Inhalt in Stoof zu erhalten, muss man noch mit $m = \frac{1}{75{,}0568}$ multipliciren, wonach $\log m = 8{,}12461$.

Beispiele.

Ich liess folgende Fässer ausmessen: I) ein Müid aus dem südlichen Frankreich von 36 Veltes; II) ein bordeauxer Oxhoft von 30 Veltes; III) ein Rheinweinfass von 40 Vierteln; IV) ein doppeltes englisches Porterfass von circa 100 Gallons; V) eine rigische Bierhalbtonne; VI) eine lissabonner Pipe von 34 Almuden; VII) eine Mallaga-Botta von 30 Arroben. Die Maasse in Zollen.

	I.	II.	III.	IV.	V.
L =	30,3	= 29,05	= 33,75	= 46,0	= 20,4
D =	28,55	= 25,1	= 27,8	= 31,05	= 17,63
d =	25,2	= 22,6	= 22,5	= 23,775	= 14,325
$D - d$	0,52504	0,39794	0,72428	0,86183	0,51917
$D + d$	1,73038	1,67852	1,70157	1,73898	1,50454
c	8,79466	8,71942	9,02271	9,12285	9,01463
$\frac{2}{3}$	9,82391	9,82391	9,82391	9,82391	9,82391
$\frac{2}{3}c$	8,61857	8,54333	8,84662	8,94676	8,83854
c^2	7,58932	7,43884	8,04542	8,24570	8,02926
$\frac{7}{15}$	9,66901	9,66901	9,66901	9,66901	9,66901
$\frac{7}{15}c^2$	7,25833	7,10785	7,71443	7,91471	7,69827
	0,04155	0,03494	0,07025	0,08846	0,06895
	181	128	518	822	499
b =	1,04336	1,03622	1,07543	1,09668	1,07394
L	1,48144	1,46315	1,52827	1,66276	1,30963
$D + d$	1,73038	1,67852	1,70157	1,73898	1,50454
$lg\ n$	9,75106	9,78463	9,82670	9,92378	9,80509
$sin\ n$	9,69114	9,71613	9,74598	9,80805	9,73086
$cos\ n$	9,94008	9,93150	9,91928	9,88427	9,92577
$cos\ n$	9,94008	9,93150	9,91928	9,88427	9,92577
$\frac{1}{2}\pi$	0,19612	0,19612	0,19612	0,19612	0,19612
b	0,01843	0,01545	0,03158	0,04008	0,03098
a	9,78585	9,79070	9,81224	9,81279	9,80950
a =	0,6107	0,6176	0,6490	0,6498	0,6449
L	1,48144	1,46315	1,52827	1,66276	1,30963
$\frac{1}{2}$	9,69897	9,69897	9,69897	9,69897	9,69897
$cosec\ n$	0,30886	0,28387	0,25402	0,19195	0,26914
E	1,48927	1,44599	1,48126	1,55368	1,27774
E^3	4,46781	4,33797	4,44378	4,66104	3,83322
a	9,73585	9,79070	9,81224	9,81279	9,80950
m	8,12461	8,12461	8,12461	8,12461	8,12461
K	2,37827	2,25328	2,38063	2,59844	1,76733
K =	238,9	= 179,2	= $240\frac{1}{4}$	= 396,7	= 58,5

	VI.	VII.
L	= 48,6	= 42,15
D	= 33,1	= 32,5
d	= 23,05	= 25,775
$D - d$	1,00217	0,82769
$D + d$	1,74935	1,76548
c	9,25282	9,06221
$\frac{2}{3}$	9,82391	9,82391
$\frac{2}{3}c$	9,07673	8,88612
c^2	8,50564	8,12442
$\frac{7}{15}$	9,66901	9,66901
$\frac{7}{15}c^2$	8,17465	7,79343
	0,11932	0,07693
	1495	622
b	= 1,13427	1,08315
L	1,68664	1,62480
$D + d$	1,74935	1,76548
$tg\ n$	9,93729	9,85932
$sin\ n$	9,81587	9,76795
$cos\ n$	9,87858	9,90863
$cos\ n'$	9,87858	9,90863
$\frac{1}{2}\pi$	0,19612	0,19612
b	0,05472	0,03469
a	9,82387	9 81602
a	= 0,6666	0,6547
L	1,68664	1,62480
$\frac{1}{2}$	9,69897	9,69897
$cosec\ n$	0,18413	0,23205
E	1,56974	1,55582
E^3	4,70922	4,66746
a	9,82387	9,81602
m	8,12461	8,12461
K	2,65770	2,60809
K	= 454,7	= 405,6

Resultat.

	Factor a	Inhalt in russischen Stoof berechnet	Inhalt in russischen Stoof gemessen
I	0,6107	238,9	
II	0,6176	179,2	181,4
III	0,6490	$240\frac{1}{4}$	248,8
IV	0,6498	396,7	
V	0,6449	58,5	59,6
VI	0,6666	454,7	
VII	0,6547	405,6	

Die Rechnung gab also den Inhalt etwas zu klein und zwar bei II. um $1\frac{1}{5}$ Procent, bei III. um $3\frac{2}{5}$ Procent, bei V. um $1\frac{4}{5}$ Procent. Dieser geringe Unterschied kann herrühren: aus der Abweichung der Dauben von der reinen parabolischen Form; aus der Unsicherheit der Messung des innern Bodendurchmessers und der innern Länge; aus der Abweichung der Böden von der Kreisform; aus der Wölbung der Böden.

Fünfter Theil.

Einen Visirstab zu berechnen.

Die erste Art der Visirstäbe hat zwei Eintheilungen: auf der einen Fläche für die Länge des Fasses L; auf der andern Fläche für die Durchmesser. Zu diesem Ende richtet man die obige Formel 1) $K = \frac{1}{4}\pi \cdot L \cdot (\frac{8}{15}D^2 + \frac{4}{15}D \cdot d + \frac{3}{15}d^2)$ für den mittlern Durchmesser $\frac{1}{2}(D + d) = d'$ ein, woraus

$$5)\ K = \tfrac{1}{4}\pi \cdot L \cdot (\tfrac{6}{15}D^2 + \tfrac{8}{15}d'^2 + \tfrac{1}{15}d^2).$$

Es sey nun z. B. der Visirstab für russische Stoof $= 75{,}0568$ Cubikzoll eingerichtet, und f die Längeneinheit für beide Abtheilungen, so erhält man aus dieser Formel, wenn $L = D = d' = d = f$ ist den gleichseitigen Cylinder $75{,}0568 = \frac{1}{4}\pi \cdot f^3$ und hieraus $f = 4{,}5719$ Zoll, $\log f = 0{,}66010$. Auf die Fläche der Länge trägt man f, $f \cdot 2$, $f \cdot 3$, $f \cdot 4$ u. s. w., auf die Fläche der Durchmesser trägt man f, $f \cdot \sqrt{2}$, $f \cdot \sqrt{3}$, $f \cdot \sqrt{4}$, $f \cdot \sqrt{5}$ u. s. w.

Beispiel.

Auf der Längenfläche giebt die Länge des Fasses die Zahl $L = 6\frac{2}{3}$, auf der Durchmesserfläche giebt der Spunddurchmesser die Zahl $A = 39{,}0$, der Bodendurchmesser die Zahl $C = 30\frac{1}{3}$, der mittlere Durchmesser die Zahl $B = 34\frac{1}{2}$, so ist $6A + 8B + C = 540\frac{1}{3}$, $L \cdot 540\frac{1}{3} = 3602\frac{2}{9}$, $\frac{3602\frac{2}{9}}{15} = 240\frac{4}{27}$ Stoof, Inhalt des Fasses.

Die zweite Art der Visirstäbe ist auf die Diagonallinie $lf = E$ eingerichtet, nach der Formel 4) $K = E^3 \cdot a$, wo E in Zollen, und K in Cubikzollen. Soll aber K die Anzahl der Stoof anzeigen, und enthält das Stoof S Cubikzoll, so ist $K \cdot S = E^3 \cdot a$, also $E = \sqrt[3]{K} \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$. Die Länge für ein Stoof ist also $\sqrt[3]{\frac{S}{a}}$, für 2 Stoof $= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$, für 960 Stoof $\sqrt[3]{960} \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$ u. s. w. Ein solcher Visirstab ist also nur für Fässer von ähnlicher Form richtig, bei welchen der Factor a einerlei Werth hat. Dieser Werth ist, wie oben gefunden wurde, zwischen 0,60 und 0,67. In beifolgender

Tafel habe ich die Länge des Visirstabes für ein Stückfass nach der Formel $E = \sqrt[3]{\frac{960 \cdot S}{a}}$ berechnet, wo $960 \cdot S$ der Inhalt des Stückfasses ist.

	Altfranzösisch.	Bordeaux.	Frankfurt.	Russland.	Riga.
Stückfass Cubikzoll	72754	70158	70105	72054	74711
a	Die Diagonallinie E in Zollen.				
0,60	49,49	48,90	48,89	49,34	49,94
0,61	49,22	48,63	48,62	49,07	49,66
0,62	48,96	48,37	48,36	48,80	49,39
0,63	48,70	48,11	48,10	48,54	49,13
0,64	48,44	47,86	47,85	48,29	48,87
0,65	48,19	47,61	47,60	48,04	48,62
0,66	47,95	47,37	47,36	47,79	48,37
0,67	47,71	47,13	47,12	47,56	48,13

Diese Tafel dient, um jeden Visirstab zu prüfen, und um auch mit einem unrichtigen Visirstab den Inhalt eines Fasses, dessen Factor a bekannt ist, richtig zu finden. Denn es ist $K = E^3 \cdot \frac{a}{S}$, also $K = 960 \cdot \frac{E^3}{E'^3}$, wo $E' = \sqrt[3]{\frac{960 \cdot S}{a}}$, die in der vorstehenden Tafel enthaltene Anzahl von Zollen ist.

Beispiel.

Ich untersuchte vier Visirstäbe: I) einen auf altfranzösische Velten, II) einen auf frankfurter oder rheinländische Viertel, III) einen auf russische Viertel, IV) einen auf russische Steeken zu 15 Stoof eingerichteten Visirstab, und fand die Diagonallinie des Stückfasses von 160 Viertel oder 64 Steeken in Zollen:

I) 49,89. II) 49,13. III) 49,535. IV) 49,86.

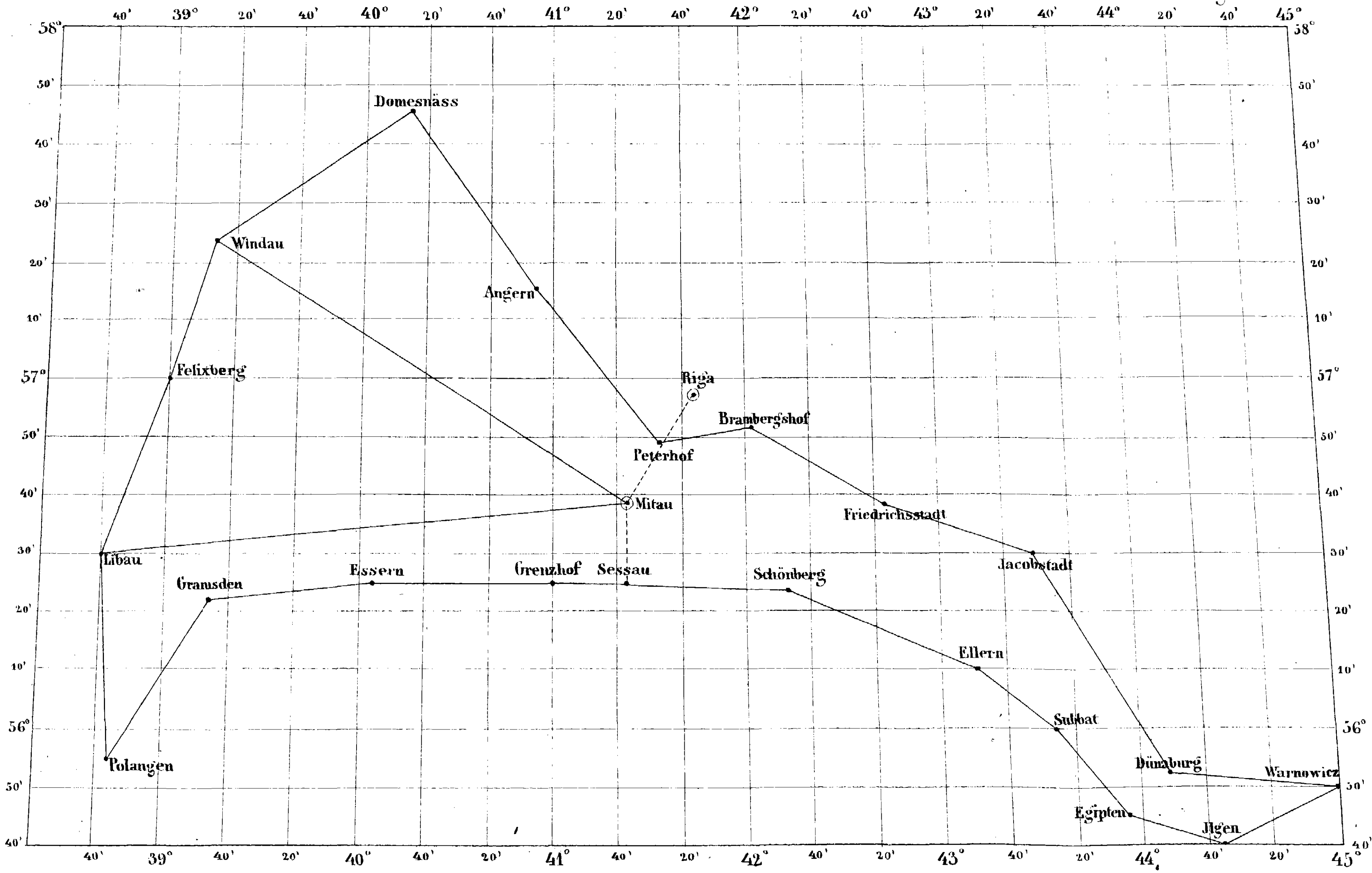
Wenn also diese Visirstäbe an Fässern von verschiedener Form den Inhalt von 960 Stoof anzeigen, so ist der wahre Inhalt in Stoof nach der obigen Formel berechnet folgender:

	Stab I.	Stab II.	Stab III.	Stab IV.
	Inhalt in Stoof.			
a	französische.	frankfurter.	russische.	russische.
0,60	983	974	972	991
0,61	999	991	988	1007
0,62	1016	1007	1004	1024
0,63	1032	1023	1020	1040
0,64	1049	1039	1036	1057
0,65	1065	1056	1052	1073
0,66	1081	1072	1069	1090
0,67	1098	1088	1085	1106

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Grenzpuncte von Kurland.

VI. Aufg. 81. 82.



zu Paucker's Geometrie 2. Thl.