

BISÜMMEETRILISE STRUKTUURI SEMIOOTIKA

John-Tagore Tevet

Mittetulunduslik uurimisrühm S.E.R.R.

Vaatluse all on „kõige sümmeetrilisemate” graafide klass transitiivsete ja tugevalt regulaarsete hulgast. Elementaarsel ja arusaadaval viisil käsitletakse nende tuvastamist ja konstrueerimist.

Sisukord

Sissejuhatus	2
Bisümmeetrilised 4- kuni 10-tipulised struktuurid	3
Bisümmeetria ja tugev regulaarsus	9
Kokkuvõte ja järeldused	14
Kirjanduse loetelu	18
Boris Weisfeilerist	18

Sissejuhatus

Struktuurisemiootika uurib graafi *struktuuri*, st graafi „kujust” sõltumatu omadusi. Struktuuri olulisemaid omadusi on selle *sümmeetria*, mis tähendab struktuuri elementide teatud „ühesugusust”. Struktuuri ja selle sümmeetria käsitlemine rajaneb tipupaaride eristamisele ja tõlgendamisele, milleks on välja mõeldud teatud *märgid ehk binaartunnused*, mis on koondatud ja korrastatud struktuuri tuvastavaks ja esitavaks *tunnusmaatriksiks*. Sellest maatriksist on välja loetavad graafi *orbiidid* selle „ühesuguste” tippude ja/või servade alamhulkade näol, graafi *klikid* tihedalt omavahel servadega seotud „tipuklumpide” näol, graafi *alused* kui klikkide vastandid jne. Jätkem meelde ka, et *naaberstruktuur* on ühe serva eemaldamisel saadav alam- või selle lisamisel tekkiv ülemstruktuur. Struktuurisemiootika aluseid ja rakendusi [Tevet 2004e, 2005b, 2006c, 2007b] siin ei käsitleta. Alustagem teema sõlmitingimusest:

Postulaat 1. Graafi struktuuri *bisümmeetria* tähendab täpselt *kahe binaarorbiidi*, st *serva- ehk (+)orbiidi ja „mitteserva” ehk (-)orbiidi olemasolu* graafi struktuuris, mis avaldub kahe erineva märgi ehk binaartunnuse olemasolu näol tunnusmaatriksis.

„Kõige-kõige” sümmeetrilisemad on vaid üht servaorbiiti omavad täisgraafid, kuid seda triviaalset klassi siin ei käsitleta. Graafi struktuuri semiootilise käsitluse üks eeliseid ongi see, et võimaldab orbiite lihtsalt eristada ja tõlgendada. Graafiteoorias peetakse orbiidituvastust kuskil selle teooria ääremail olevaks, orbiitide olemasolu märgatakse harva. Näiteks, ei eristata bisümmeetriat monosümmeetriast, kus viimase puhul võib binaar(-)orbiite olla hulgi. Kokkupanudena on bi-, ja monosümmeetria „servadest transitiiivseks” ning koos multisümmeetriaga (kus binaar(-) ja (+)orbiite on mitu) „tippudest transitiiivseks” tituleeritud. Sümmeetriateema ei ole trendikas, internetis ei ole õnnestunud midagi niisugust välja surfida, ja kui ongi, siis on tegu tavalise „telgsümmeetriaga”.

Bisümmeetrilised struktuurid on erandlikud, need omavad vaid üht naaber-alam- ja üht naaber-ülem-struktuuri, nende sümmeetriamõõt on suurem kui samasuguse tippude ja servade arvuga monosümmeetrilisel ja multisümmeetrilisel struktuuril. Nende struktuurisemiootiline *tuvastamine* on lihtne, see nõuab vaid naabertippude nimekirja sissetippimist, muidugi eeldusel, et programm on installeeritud. Nagu järgnevas näeme, on bisümmeetriliste *konstrueerimine* kohati väga lihtne, kohati aga äärmiselt keeruline. Nagu tõdeme, on neid võimalik saada siiski ka B. Weisfeileri [1976] *tugevalt regulaarsete* konstrueerimise algoritmi abil.

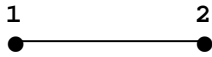
Niisiis, tegemist on niššiga struktuuri sümmeetriauringute vallas, kus „transitiiivsete” ehk tippudest sümmeetriliste graafide seast nopitakse välja vaid bisümmeetrilised. Samuti võiks välja noppida ka monosümmeetrilised, kuid need ei ole nii erandlikud ega huvitavad. Struktuurisemiootilise tava kohaselt esitame graafid paariti – *struktuuri* ja selle *täiendi* näol. Struktuurid on tähistatud kujul, kus näiteks **B4-1** on 4-tipuline bisümmeetriline struktuur, tipuvalentsiga 1 ja **B4-1C** selle täiend. Struktuuri esitavad märgid ehk binaartunnused esinevad kujul $\pm d.n.q$, kus **-d** fikseerib kauguse tippude vahel, **+d** – tipupaari kuuluvuse ($d+1$)-pikkusega ringi, **n** – tippude arvu ja **q** – servade arvu tippude ümbruse ühisosas ehk *binaargraafis*. Struktuuripaarid on sümmeetriaomadustelt identsed ja seda fikseerib *sümmeetriatunnus SRV* orbiitide arvu ja võimsuse näol. Selle tunnuse alusel on kindlaks määratavad struktuuri *entroopia HR* ja *sümmeetriamõõt SR*.

Esitatud kõik 20 kindlaks tehtud 4 – 10 tipulist bisümmeetrilist struktuuri ning lühidalt käsitletud teada olevaid 12-tipulisi ja suuremaid bisümmeetrilisi. Kokkuvõttes esitatakse 75 käsitletud struktuuri koondtabel.

Bisümmeetrilised 4- kuni 10-tipulised struktuurid

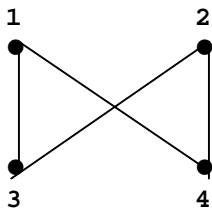
Kõige väiksem *bisümmeetriline* graaf on 4-tipuline. Esineb vaid üksainus 4-tipuline bisümmeetriline struktuurpaar.

Graaf **B4-1**, selle täiend **B4-1C** ning nende töötlemise tulemused binaartunnuste, tunnusmaatriksite ja mõõtude näol:



$$A: -0.2.0; \quad B: +1.2.1.$$

1	2	3	4	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	B	-A	-A	1	21	1
	0	-A	-A	2	21	1
	0	B		3	21	1
	0		0	4	21	1



$$A: -2.4.4; \quad B: +3.4.4.$$

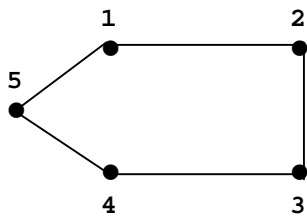
1	2	3	4	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	B	B	1	12	2
	0	B	B	2	12	2
	0	-A		3	12	2
	0		0	4	12	2

<i>SRV</i>	<i>HR</i>	<i>SR</i>	<i>aut</i>
$2^1 4^1$	0.2764	0.6448	8

B4-1 binaartunnus $-0.2.0$ tähendab *sidumatust*, binaartunnus $+1.2.1$ 2-klikki ehk ahela lüli. Graaf koosneb *kahest komponentsest 2-klikist*, see on *2-kliik-regulaarne*, st kõik tipud kuuluvad 2-klikki. **B4-1C** binaartunnus $-2.4.4$ tähendab tippudevahelist *kaugust* $d=2$ ning binaargraafi milles on $n=4$ tippu ja $q=4$ serva. Binaartunnus $+3.4.4$ on *naabrustunnus* kus vastav tipupaar kuulub $+3+1=4$ -ringi, milles on ka $n=4$ tippu. Graaf on *kahealuseline*, kus selle alused vastavad graafi **BS-1** 2-kliikidele. Tegemist on *bi-kliikiga*, mis antud juhul kujutab endast *4-ringi* ja on *4-ring-regulaarne*, st kõik tipud kuuluvad 4-ringi.

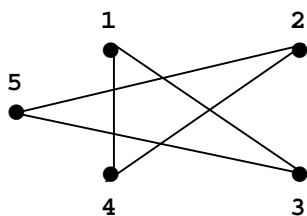
Ainus 5-tipuline bisümmeetriline struktuuripaar.

Graaf **B5-2**, selle täiend **B5-2C** ning nende töötlemise tulemused binaartunnuste, tunnusmaatriksite ja mõõtude näol:



$$A: -2.3.2; \quad B: +4.5.5.$$

1	2	3	4	5	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	B	-A	-A	B	1	22	2
	0	B	-A	-A	2	22	2
	0	B	A		3	22	2
	0	B		0	4	22	2
	0		0	0	5	22	2



$$A: -2.3.2; \quad B: +4.5.5.$$

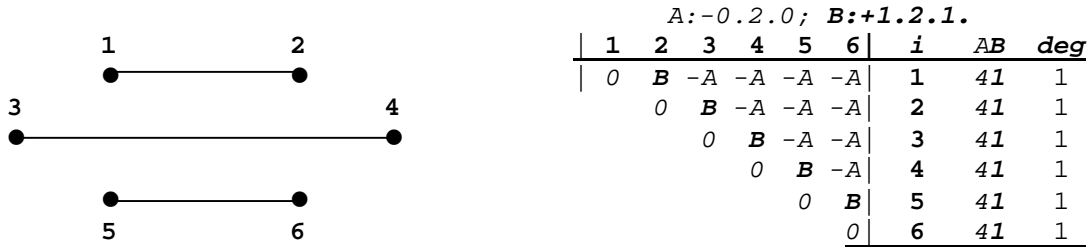
1	2	3	4	5	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	B	B	-A	1	22	2
	0	-A	B	B	2	22	2
	0	-A	B		3	22	2
	0	-A	/	0	4	22	2
	0		0	0	5	22	2

<i>SRV</i>	<i>HR</i>	<i>SR</i>	<i>aut</i>
5^2	0.3010	0.6990	10

Graaf **B5-2** on *isetäienduv*, st selle täiend **B5-2C** on esimesega *isomorfne* ehk nende *struktuurid on identsed*. See avaldub binaartunnuste identsuses ja tunnusmaatriksite ekvivalentsuses. Binaartunnus $-2.3.2$ tähendab tippudevahelist *kaugust* $d=2$ ning binaargraafi milles on $n=3$ tippu ja $q=2$ serva. Binaartunnus $+4.5.5$ on *naabrustunnus* kus vastav tipupaar kuulub $+4+1=5$ -ringi, milles on ka 5 tippu. Tegemist on *5-ringiga* ehk *5-ring-regulaarsusega*.

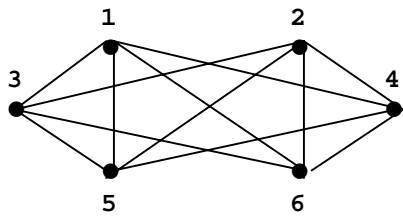
6-tipuliste struktuuride hulgas on parajasti kaks bisümmeetrilist struktuuripaari.

Graaf **B6-1**, selle täiend **B6-1C** ning nende töötlemise tulemused binaartunnuste, tunnusmaatriksite ja mõõtude näol:



$A: -0.2.0; B: +1.2.1.$

1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	B	$-A$	$-A$	$-A$	$-A$	1	41	1
	0	B	$-A$	$-A$	$-A$	2	41	1
		0	B	$-A$	$-A$	3	41	1
			0	B	$-A$	4	41	1
				0	B	5	41	1
					0	6	41	1



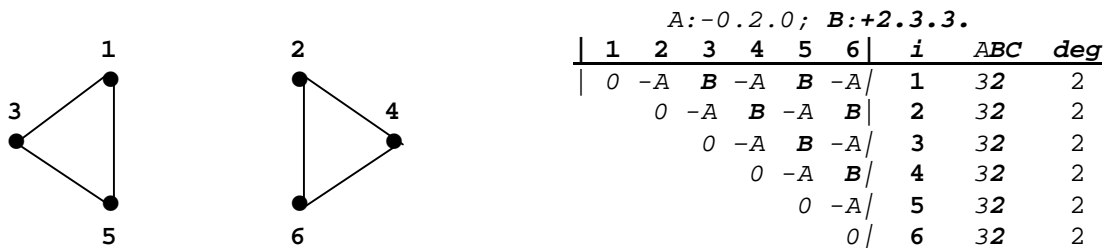
$A: -2.6.12; B: +2.4.5.$

1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	$-A$	B	B	B	B	1	14	4
	0	$-A$	B	B	B	2	14	4
		0	$-A$	B	B	3	14	4
			0	$-A$	B	4	14	4
				0	$-A$	5	14	4
					0	6	14	4

SRV	HR	SR	aut
$3^1 12^1$	0.2173	0.8152	48

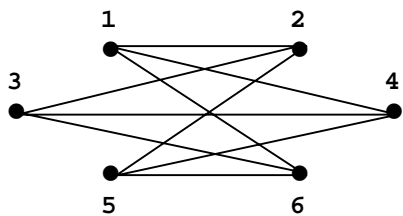
Struktuuri **B6-1** binaartunnuste tähendused samad, mis **B4-1** puhul – sidumatus ja 2-kliik. **B6-1** koosneb kolmest komponentsest 2-klikist, see on 2-kliik-regulaarne. Struktuuri **B6-1C** binaartunnus $-2.6.12$ iseloomustab tippudevahelist kaugust $d=2$ ning binaargraafi, mis antud juhul hõlmab graafi kõiki tippe ja kõiki servi. Naabrustunnus $+2.4.5$ iseloomustab binaargraafi, mille naabertipud kuuluvad $+2+1=3$ -ringi ning kus binaargraafi kuulub $n=4$ tippu ja $q=5$ serva. Graaf on kolme-aluseline, kus selle alused vastavad graafi **B6-1** 2-kliikidele. Tegemist on alus-klikiga, täpsemalt 3-alus-klikiga ehk tri-klikiga. Ei ole raske märgata, et see on 3-ring- ehk -kliikregulaarne, st kõik tipud kuuluvad triangelisse.

Graaf **B6-2**, selle täiend **B6-2C** ning nende töötlemise tulemused binaartunnuste, tunnusmaatriksite ja mõõtude näol:



$A: -0.2.0; B: +2.3.3.$

1	2	3	4	5	6	i	ABC	deg
0	$-A$	B	$-A$	B	$-A$	1	32	2
	0	$-A$	B	$-A$	B	2	32	2
		0	$-A$	B	$-A$	3	32	2
			0	$-A$	B	4	32	2
				0	$-A$	5	32	2
					0	6	32	2



$A: -2.5.6; B: +3.6.9.$

1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	B	$-A$	B	$-A$	B	1	23	3
	0	B	$-A$	B	$-A$	2	23	3
		0	B	$-A$	B	3	23	3
			0	B	$-A$	4	23	3
				0	B	5	23	3
					0	6	23	3

SRV	HR	SR	aut
$6^1 9^1$	0.2923	0.7515	72

Struktuuri **B6-2** esimene binaartunnus tähistab sidumatust, teine, $+2.3.3$ on 3-kliki ehk 3-ringi tunnus. See koosneb kahest komponentsest 3-klikist, see on 3-kliik-regulaarne. **B6-2C** kaugust $d=2$ iseloomustav binaargraaf koosneb $n=5$ tipust ja $q=6$ servast. 4-ring tunnus $+3.6.9$ omav binaargraaf hõlmab graafi kõik $n=6$ tippu ja kõik $q=9$ serva, see on

täistunnus ja ka täielik invariant, st see binaartunnus iseloomustab ainult seda struktuuri. Tõepoolest, graaf on *kahealuseline*, kus selle alused vastavad graafi **B6-2** 3-klikkidele ning see on *2-alus-* ehk *bi-klikk*. Ei ole raske märgata, et see on *4-ring-regulaarne*, st kõik tipud kuuluvad 4-ringi.

7-tipuliste graafide hulgas *bisümmeetrilisi struktuure ei esine*. „Kõige sümmeetrilisemad” on 7-ring oma täiendiga, need on kolme binaarorbüidiga monosümmeetrilised. Nüüd osakem hinnata nende struktuure ka ilma graafi „varjudeta”, vahetult tunnusmaatriksite alusel.

Graafi **M7-2** ja selle täiendi **M7-2C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -3.4.3; B: -2.3.2; C: +6.7.7.$$

$$A: -2.5.7; B: +2.3.3; C: +2.4.5.$$

1	2	3	4	5	6	7	i	ABC	deg
0	-B	-A	C	C	-A	-B	1	222	2
	0	-B	-A	C	C	-A	2	222	2
		0	-B	-A	C	C	3	222	2
			0	-B	-A	C	4	222	2
				0	-B	-A	5	222	2
					0	-B	6	222	2
						0	7	222	2

1	2	3	4	5	6	7	i	ABC	deg
0	C	B	-A	-A	B	C	1	222	4
	0	C	B	-A	-A	B	2	222	4
		0	C	B	-A	-A	3	222	4
			0	C	B	-A	4	222	4
				0	C	B	5	222	4
					0	C	6	222	4
						0	7	222	4

SRV	HR	SR	aut
7 ¹ 14 ¹	0.2764	0.7909	14

Binaartäistunnusest +6.7.7 järeldub, et struktuur **M7-2** kujutab endast tõepoolest 7-ringi. Kuna tippudevahelised kaugused on erinevad $-d=2$ ja $-d=3$, siis eksisteerib kaks binaar(-)orbiiti vastavate tipupaaridega $-A$ ja $-B$ ning struktuur on mono-, antud juhul vaid servadest- ehk (+)sümmeetriline. Struktuur **M7-2C** koosneb erinevatest 3-ringidest ning on monosümmeetriline „mitteservadest”, st on (-)sümmeetriline.

8-tipuliste tippudest sümmeetriliste ehk *nn transitiivsete* graafide hulgas on bisümmeetrilised vaid 2- ja 4-klikk-regulaarsed oma täienditega.

Graafi **B8-1** ja selle täiendi **B8-1C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +1.2.1.$$

$$A: -2.8.24; B: +2.6.13.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	i	AB	deg
0	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	1	61	1
	0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	2	61	1
		0	B	-A	-A	-A	-A	3	61	1
			0	-A	-A	-A	-A	4	61	1
				0	B	-A	-A	5	61	1
					0	-A	-A	6	61	1
						0	B	7	61	1
							0	8	61	1

1	2	3	4	5	6	7	8	i	AB	deg
0	-A	B	B	B	B	B	B	1	16	6
	0	B	B	B	B	B	B	2	16	6
		0	-A	B	B	B	B	3	16	6
			0	B	B	B	B	4	16	6
				0	-A	B	B	5	16	6
					0	B	B	6	16	6
						0	-A	7	16	6
							0	8	16	6

SRV	HR	SR
4 ¹ 24 ¹	0.1781	0.8769

Struktuur **B8-1** koosneb neljast komponendist 2-klikist, st on *2-klikk-regulaarne*. Selle servade arv $E=4$. Täiendi **B8-1C** struktuur on *4-aluseline* kaheelemendiliste alustega ning kujutab endast *kvadro-kliki* mis on *4-klikk-regulaarne*. Selle servade arv $E=24$.

Graafi **B8-3** ja selle täiendi **B8-3C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.4.6.$$

$$A: -2.6.8; B: +3.8.16.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	B	B	B	-A	-A	-A	-A	1	43	3
	0	B	B	-A	-A	-A	-A	2	43	3
		0	B	-A	-A	-A	-A	3	43	3
			0	-A	-A	-A	-A	4	43	3
				0	B	B	B	5	43	3
					0	B	B	6	43	3
						0	B	7	43	3
							0	8	43	3

1	2	3	4	5	6	7	8	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	-A	-A	B	B	B	B	1	34	4
	0	-A	-A	B	B	B	B	2	34	4
		0	-A	B	B	B	B	3	34	4
			0	B	B	B	B	4	34	4
				0	-A	-A	-A	5	34	4
					0	-A	-A	6	34	4
						0	-A	7	34	4
							0	8	34	4

SRV	HR	SR
12 ¹ 16 ¹	0.2966	0.7906

Struktuur **B8-3** koosneb kahest komponentsest 4-klikist, st on 4-kliik-regulaarne. Klikkide visuaalseks eristamiseks tunnusmaatriksis on siin üks klikk tähistatud tippudega 1 – 4 ja teine tippudega 5 – 8. Selle servade arv $E=12$. Täiendi **B8-3C** struktuur on 2-aluseline ja 4-ring regulaarne, kus selle alused vastavad originaali 4-klikkidele ning kujutab endast bi-kliiki. Selle servade arv $E=16$.

9-tipuliste transitiivsete graafide hulgas on bisümmeetrilisi samuti vaid 2 paari.

Graafi **B9-2** ja selle täiendi **B9-2C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.3.3.$$

$$A: -2.8.21; B: +2.5.7.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	B	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	1	62	2
	0	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	2	62	2
		0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	3	62	2
			0	B	B	-A	-A	-A	4	62	2
				0	B	-A	-A	-A	5	62	2
					0	-A	-A	-A	6	62	2
						0	B	B	7	62	2
							0	B	8	62	2
								0	9	62	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	-A	B	B	B	B	B	B	1	26	6
	0	-A	B	B	B	B	B	B	2	26	6
		0	B	B	B	B	B	B	3	26	6
			0	-A	-A	B	B	B	4	26	6
				0	-A	B	B	B	5	26	6
					0	B	B	B	6	26	6
						0	-A	-A	7	26	6
							0	-A	8	26	6
								0	9	26	6

SRV	HR	SR
9 ¹ 27 ¹	0.2442	0.8431

Struktuur **B9-2** koosneb kolmest komponentsest 3-klikist, st on 3-kliik-regulaarne. Klikkide visuaalseks eristamiseks tunnusmaatriksis on siin üks klikk tähistatud tippudega 1 – 3, teine tippudega 4 – 6 ja kolmas 7 – 9. Selle servade arv $E=9$. Täiendi **B9-2C** struktuur on 3-aluseline kus selle alused vastavad originaali 3-klikkidele, on 3-ring regulaarne ning kujutab endast tri-kliiki. Selle servade arv $E=27$.

Graafi **B9-4** ja selle täiendi **B9-4C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -2.4.4; B: +2.3.3.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	B	B	B	B	-A	-A	-A	-A	1	44	4
	0	B	-A	-A	B	B	-A	-A	2	44	4
		0	-A	-A	-A	-A	B	B	3	44	4
			0	B	-A	B	B	-A	4	44	4
				0	B	-A	-A	B	5	44	4
					0	B	-A	B	6	44	4
						0	B	-A	7	44	4
							0	B	8	44	4
								0	9	44	4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>i</i>
0	-A	-A	-A	-A	B	B	B	B	1
	0	-A	B	B	-A	-A	B	B	2
		0	B	B	B	B	-A	-A	3
			0	-A	B	-A	-A	B	4
				0	-A	B	B	-A	5
					0	-A	B	-A	6
						0	-A	B	7
							0	-A	8
								0	9

SRV	HR	SR
18²	0.3010	0.8066

Struktuur **B9-4** on *isetäienduv* ning **3-kliik-** ehk **3-ringregulaarne** bisümmeetriline struktuur. Selle struktuur on keeruline, see koosneb **kuuest 3-ringist** (*-klikist*) nii, et selle iga tipp kuulub kahte erinevasse 3-ringi ja iga serv vaid ühte 3-ringi. See on esimene bisümmeetriline struktuur pärast 5-ringi, mis *ei ole konstrueeritav komponentsete kliikide baasil*.

10-tipuliste graafide hulgas on bisümmeetrilisi 3 paari.

Graafi **B10-1** ja selle täiendi **B10-1C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +1.2.1.$$

$$A: -2.10.40; B: +2.8.25.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i	AB	deg
0	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	-A	-A	1	81	1
	0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	-A	-A	2	81	1
		0	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	3	81	1
			0	-A	-A	-A	-A	-A	-A	4	81	1
				0	B	-A	-A	-A	-A	5	81	1
					0	-A	-A	-A	-A	6	81	1
						0	B	-A	-A	7	81	1
							0	-A	-A	8	81	1
								0	B	9	81	1
									0	10	81	1

SRV	HR	SR
5¹40¹	0.1515	0.9084

Struktuur **B10-1** koosneb **viiest komponentsest 2-klikist**, st on **2-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=5$. Täiend **B10-1C** struktuur on **5-aluseline** kus selle alused vastavad originaali 2-kliikidele, kujutab endast **kvinta-kliiki** ning on **5-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=40$.

Graafi **B10-3** ja selle täiendi **B10-3C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -2.3.2; B: +4.10.15.$$

$$A: -2.6.12; B: +2.5.8.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i	AB	deg
0	B	-A	-A	B	B	-A	-A	-A	-A	1	63	3
	0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	-A	2	63	3
		0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	3	63	3
			0	B	-A	-A	-A	B	-A	4	63	3
				0	-A	-A	-A	-A	B	5	63	3
					0	-A	B	B	-A	6	63	3
						0	-A	B	B	7	63	3
							0	-A	B	8	63	3
								0	-A	9	63	3
									0	10	63	3

SRV	HR	SR	aut
15¹30¹	0.2764	0.8328	120

Struktuur **B10-3** osutub hästituntud **Peterseni graafiks**. Struktuursest aspektist on Peterseni graaf **unikaalne** ja alati äratuntav oma spetsiifilise, kõiki tippe ja servi hõlmava **binaartäistunnuse +4.10.15** järgi (st selle 10 tippu moodustavad 15 naabertippu, mis kuuluvad 5-ringidesse). Teist sellist binaartunnust omavat struktuuri ei ole olemas. Peterseni graafi põhilised omadused on **bisümmeetria**, **5-ring-**, **2-distants-** ja **3-valents-regulaarsus**. Peterseni graafi ollakse harjunud ära tundma tema standardseks disainitud välimuse järgi, kuid see võib olla disainitud ka täiesti mitteäratuntaval kujul. Kõige populaarsem graaf, esitatud igas graafiõpikus. Teineteisest sõltumatult on nii Graafiatlase koostajad (lk 275) kui ka siinkirjutaja [2004b, lk 8-9] konstrueerinud 5-ringseid graafe tippude arvuga 7, 9, ..., mida **üldistatud Peterseni graafideks** nimetatud on. Paraku puudub neil Peterseni graafi üks põhiomadus – bisümmeetria – ja need on osutunud ositi sümmeetrilisteks. Peterseni graafi täiend **B10-3C** on **bisümmeetriline, 4-kliik-, 2-distants- ja 6-valentsregulaarne**.

Bisümmeetrilise graafi puhul on iseloomulik, et selle *naaberalam-* ja *naaberülemstruktuur* on kardinaalselt teistsuguste sümmeetriaomadustega. Näiteks, Peterseni graafile seose (serva) eemaldamisel või lisamisel saame selle *ositi sümmeetrilise* naaberstruktuuri [2007b, lk 22].

Graafi **B10-4** ja selle täiendi **B10-4C** binaartunnused, tunnusmaatriksid ja mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.5.10.$$

$$A: -2.7.10; B: +3.10.25.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>i</i>	<i>AB</i>	<i>deg</i>
0	-A	B	-A	B	-A	B	-A	B	-A	1	54	4	0	B	-A	B	-A	B	-A	B	-A	B	1	45	5
	0	-A	B	-A	B	-A	B	-A	B	2	54	4		0	B	-A	B	-A	B	-A	B	-A	2	45	5
		0	-A	B	-A	B	-A	B	-A	3	54	4			0	B	-A	B	-A	B	-A	B	3	45	5
			0	-A	B	-A	B	-A	B	4	54	4				0	B	-A	B	-A	B	-A	4	45	5
				0	-A	B	-A	B	-A	5	54	4					0	B	-A	B	-A	B	5	45	5
					0	-A	B	-A	B	6	54	4						0	B	-A	B	-A	6	45	5
						0	-A	B	-A	7	54	4							0	B	-A	B	7	45	5
							0	-A	B	8	54	4								0	B	-A	8	45	5
								0	-A	9	54	4									0	B	9	45	5
									0	10	54	4										0	10	45	5

SRV	HR	SR
20 ¹ 25 ¹	0.2983	0.8196

Struktuur **B10-4** koosneb kahest komponentsest 5-klikist, st on 5-kliik-regulaarne, klikkidega antud juhul paaris- ja paaritunumbriliste tippudega. Servade arv $E=20$. Täiendi **B10-4C** struktuur on 2-aluseline, kus selle alused vastavad originaali 5-klikkidele, on 4-ring regulaarne ning kujutab endast bi-klikki. Seda iseloomustab selle binaartäistunnus +3.10.25 mis hõlmab struktuuri kõiki tippe ja servi ning kujutab ainuüksi struktuuri **B10-4C**, st see on samuti struktuurselt unikaalne nagu Peterseni graaf.

*

Nagu nägime ja edaspidigi alati veendumise, kehtivad järgmised seaduspärasused:

Postulaat 2. Arvu r komponentsest n -klikist koosneva, st n -kliik regulaarse, bisümmeetrilise struktuuri täiend on r -aluseline, aluste võimsusega n , st on n -alus regulaarne.

Täpsustus. See tähendab, et struktuuri komponendid n -klikid osutuvad täiendi alusteks, kus komponentsete n -klikkide arv r võrdub aluste arvuga ja klikkide võimsus n võrdub aluste võimsusega.

Postulaat 3. Komponentseid n -klikke kujutavate struktuuride esimene binaartunnus on mitesiduse tunnus -0.2.0 ja teine on klikitunnus +1.2.1 (2-kliik) või +2.3.3 (3-kliik) või +2.4.6 (4-kliik) või +2.5.10 (5-kliik) jne.

Postulaat 4. Komponentsete n -klikkide alusel genereeritud sidus bisümmeetriline struktuur kujutab endast r -klikki, mida vastavalt aluste arvule nimetame bi-, tri-, kvadro-, kvinta-, seksta-, septa-, okta-, nona-, deka-, undeka- jne -klikiks.

Postulaat 5. r -kliik kui tervik sisaldab endas klikki võimsusega (tippude arvuga) r , st on r -kliik-regulaarne.

Täpsustus: Bi-kliik on 2-kliik-regulaarne, tri-kliik on 3-kliik-regulaarne jne.

Postulaat 6. Bi- ehk 2-aluseline struktuur on 4-ring-regulaarne, st selle binaar(+)tunnus algab arvuga +3.

Postulaat 7. r -kliki servade arv E võrdub aluste võimsuse ruudu n^2 ja nende arvule r vastava tavakliki servade arvu korrutisega,

$$E=n^2r(r-1):2$$

Täpsustus. See on seaduspära, muidugi saab servade arvu kätte juba tunnusmaatriksi *deg*-veeru kaudu.

Bisümmeetria ja tugev regulaarsus

Kui mittesidusaid struktuure peavad mõned „mittetäisväärtuslikeks”, siis nendest tuletatud sidusate täiendite kohta midagi niisugust öelda ei saa. Arusaamatu on ka see, et struktuuride demonstreerimisel eelistatakse piirduda peamiselt sidusate 3- ja 4-valentsetega ning sümmeetrias piirduda vaid transitiivsete ehk tipusümmeetriaga. On teada, et 11-tipulisi regulaarseid sidusaid 4-valentseid struktuure on 265, sh transitiivseid 2. Loomulikult on nende hulgas ka neljast suurema valentsusega struktuure, millede arv ei ole teada. Näib, et transitiivsete **11-tipuliste hulgas bisümmeetrilisi ei esine**.

On teada, et 1641 regulaarse sidusa 3- ja 4-valentse 12-tipulise graafi hulgas on koguni 14 transitiivset, kust meie paraku ühtki bisümmeetrilist ei leia. Kuid **kaheksat 12-tipulist bisümmeetrilist** oskame genereerida küll ning need ära seletada vaid binaar ja u -tunnuste põhjal.

Graafi **B12-1** ja selle täiendi **B12-1C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +1.2.1. \quad u=10.1 \quad A: -2.12.60; B: +2.10.41. \quad u=1.10.$$

SRV	HR	SR
$6^1 60^1$	0.1323	0.9273

Struktuur **B12-1** koosneb **kuuest komponentsest 2-klikist**, st on **2-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=6$. Täiendi **B12-1C** struktuur on **6-aluseline**, kus selle alused vastavad originaali 2-kliikidele, kujutab endast **seksta-kliiki** ning on **6-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=60$.

Graafi **B12-2** ja selle täiendi **B12-2C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.3.3. \quad u=9.2. \quad A: -2.11.45; B: +2.8.22. \quad u=2.9.$$

SRV	HR	SR
$12^1 54^1$	0.2059	0.8868

Struktuur **B12-2** koosneb **neljast komponentsest 3-klikist**, st on **3-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=12$. Täiendi **B12-2C** struktuur on **4-aluseline**, kus selle alused vastavad originaali 3-kliikidele, kujutab endast **kvadro-kliiki** ning on **4-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=54$.

Graafi **B12-3** ja selle täiendi **B12-3C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.4.6. \quad u=8.3 \quad A: -2.10.32; B: +2.6.9. \quad u=3.8.$$

SRV	HR	SR
$18^1 48^1$	0.2545	0.8601

Struktuur **B12-3** koosneb **kolmest komponentsest 4-klikist**, st on **4-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=18$. Täiendi **B12-3C** struktuur on **3-aluseline**, kus selle alused vastavad originaali 4-kliikidele, kujutab endast **tri-kliiki** ning on **3-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=48$.

Graafi **B12-5** ja selle täiendi **B12-5C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -0.2.0; B: +2.6.15. \quad u=6.5 \quad A: -2.8.12; B: +3.12.36. \quad u=5.6.$$

SRV	HR	SR
$30^1 36^1$	0.2992	0.7007

Struktuur **B12-5** koosneb **kahest komponentsest 6-klikist**, st on **6-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=30$. Täiendi **B12-5C** struktuur on **2-aluseline**, kus selle alused vastavad originaali 6-kliikidele, kujutab endast **bi-kliiki** ning on **2-kliik-regulaarne**. Selle servade arv $E=36$.

Graafiatlas annab teada, et 10778 regulaarse sidusa 4-valentse 13-tipuliste graafide hulgas, kus komponentseid ei esine, on 3 transitiivset kust A. Titov [1976] on fikseerinud **ühe 13-tipulise bisümmeetrilise** struktuuri.

Graafi **B13-6** ja selle täiendi **B13-6C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.5.7; B: +2.4.5.$$

$$A: -2.5.7; B: +2.4.5.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	i	AB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	B	-A	B	B	-A	-A	-A	-A	B	B	-A	B	1	66	0	-A	B	-A	-A	B	B	B	B	-A	-A	B	-A
	0	B	-A	B	B	-A	-A	-A	B	B	-A	2	66		0	-A	B	-A	-A	B	B	B	B	-A	-A	B	
		0	B	-A	B	B	-A	-A	-A	B	B	3	66			0	-A	B	-A	-A	B	B	B	B	-A	-A	
			0	B	-A	B	B	-A	-A	-A	B	4	66				0	-A	B	-A	-A	B	B	B	B	-A	
				0	B	-A	B	B	-A	-A	-A	5	66					0	-A	B	-A	-A	B	B	B	B	
					0	B	-A	B	B	-A	-A	6	66						0	-A	B	-A	-A	B	B	B	
						0	B	-A	B	B	-A	7	66							0	-A	B	-A	-A	B	B	
							0	B	-A	B	B	8	66								0	-A	B	-A	-A	B	
								0	B	-A	B	9	66									0	-A	B	-A	-A	
									0	B	-A	10	66										0	-A	B	-A	
										0	B	-A	11	66											0	-A	B
											0	B	12	66												0	-A
												0	13	66													0

SRV	HR	SR
39 ²	0.3010	0.8409

B13-6 ja **B13-6C** tunnusmaatriksite ekvivalentsusest johtuvalt on need *isetüienduvad*. Tegemist on **3-kliik**- ehk **3-ringregulaarse** bisümmeetrilise struktuuriga. See on keeruline, koosnedes **3-ringidest** (*-klikkidest*) nii, et selle iga tipp ja iga serv kuulub erinevatesse 3-ringidesse. See *ei ole konstrueeritav komponentsete klikkide baasil*.

Võime julgelt „ennustada”, et on olemas:

neli 14-tipulist bisümmeetrilist struktuuri, mis on genereeritavad komponentsete 2- ja 7-klikkide alusel vastavalt *septa- ja biklikkideks*;

neli 15-tipulist bisümmeetrilist struktuuri, mis on genereeritavad komponentsete 3- ja 5-klikkide alusel vastavalt *kvinta- ja triklikkideks*;

kuus 16-tipulist bisümmeetrilist struktuuri, mis on genereeritavad komponentsete 2-, 4- ja 8-klikkide alusel vastavalt *okta-, kvadro- ja biklikkideks*.

kaheksa 18-tipulist bisümmeetrilist struktuuri, mis on genereeritavad komponentsete 2-, 3-, 6- ja 9-klikkide alusel vastavalt *nona-, seksta-, tri- ja biklikkideks*;

kaheksa 20-tipulist bisümmeetrilist struktuuri, mis on genereeritavad komponentsete 2-, 4-, 5- ja 10-klikkide alusel vastavalt *deka-, kvinta-, kvadro- ja biklikkideks* ja nii edasi.

Peale selle nende seas olemas bisümmeetrilisi, mis ei ole konstrueeritavad komponentsete klikkide alusel. Kunagi mingit värviprobleemi lahendades konstrueeriti huvitav 16-tipuline struktuur, mida *Greenwood-Gleason*'i graafiks nimetatakse. Graafiatlases (lk 284) on see kujutatud küll niisugusena, et mingitki sümmeetriat märgata pole.

Graafi **B16-5** ja selle täiendi **B16-5C** binaartunnused ja tunnusmaatriks W koos u -tunnustega:

$$A: -2.4.4; B: +3.10.13.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	i	AB	deg
0	B	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	1	105	5
	0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	2	105	5
		0	B	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	-A	-A	3	105	5
			0	B	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	4	105	5
				0	B	-A	-A	-A	B	-A	-A	B	-A	-A	-A	5	105	5
					0	B	-A	-A	-A	-A	-A	-A	B	B	6	105	5	
						0	B	-A	-A	B	-A	B	-A	-A	-A	7	105	5
							0	B	-A	-A	-A	-A	-A	B	8	105	5	
								0	B	-A	-A	B	-A	B	-A	9	105	5
									0	B	-A	-A	-A	B	10	105	5	
										0	B	-A	-A	B	-A	11	105	5
											0	B	-A	-A	B	12	105	5
												0	B	-A	-A	13	105	5
													0	B	B	14	105	5
														0	-A	15	105	5
															0	16	105	5

A: -2.8.24; B: +2.8.22.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	i	A	B	deg
0	-A	B	B	-A	B	B	-A	B	B	B	-A	B	B	-A	B	1	510	10	
	0	-A	B	B	B	-A	B	B	-A	B	B	B	-A	B	B	2	510	10	
		0	-A	B	-A	B	B	-A	B	B	-A	B	B	B	B	3	510	10	
			0	-A	B	B	-A	B	B	-A	B	B	-A	B	B	4	510	10	
				0	-A	B	B	B	-A	B	B	-A	B	B	B	5	510	10	
					0	-A	B	B	B	B	B	B	-A	-A	/	6	510	10	
						0	-A	B	B	-A	B	-A	B	B	B	7	510	10	
							0	-A	B	B	B	B	B	-A	/	8	510	10	
								0	-A	B	B	-A	B	-A	B	9	510	10	
									0	-A	B	B	B	B	-A	/	10	510	10
										0	-A	B	B	-A	B	11	510	10	
											0	-A	B	B	-A	/	12	510	10
												0	-A	B	B	13	510	10	
													0	-A	-A	/	14	510	10
														0	B	15	510	10	
															0	16	510	10	

Ühised invariandid ja mõõdud:

SRV	HR	SR
$40^1 80^1$	0.2762	0.8670

Struktuur **B16-5** on vastavalt binaar(+)tunnusele +3.10.13 (binaargraafi täielik invariant) *4-ringregulaarne*, mis tähendab *aluselisust*. See osutub *4-aluseliseks* omavahel seotud *4-elementiliste* alustega, kuid mitte kvadroklikiks. Alused on *varieeruvad* ja väljaloetavad binaar(+)graafide tuumast, kus näiteks üks aluste variant on **5,8,12,15; 3,7,10,14; 1,4,9,16**; ja **2,6,11,13**. Alused **A, B, C** ja **D** on omavahel mittetäielikult seotud:

	A	B	C	D
A	0	4	6	10
B		0	10	6
C			0	4
D				0

B16-5 4-elementilistest alustest järeldub selle täiendi **B16-5C** *4-kliik-regulaarsus* osaklikkidega **B16-5** esitatud ja siin esitamata varieeruvate aluste näol. Teisest küljest, struktuuri **B16-5** iga tipu puhul ei oma selle 5 naabertippu omavahelisi seoseid (servi), millest järeldub, et täiend **B16-5C** on ka *5-kliik-regulaarne*. Nii võime täiendis **B16-5C** fikseerida 16 erinevat 5-kliiki nagu (alates *GRG* esimese tipu naabertippudest) **2,5,8,12,15; 1,3,7,10,14; ...** ja lõpetades **6,8,10,12,14**.

Hoopis teisest aspektist, nimelt kunagi oma *tugevalt regulaarseid* graafe konstrueerides on B. Weisfeiler (1976) „taasavastanud” Peterseni **B10-4**, isetäienduva **B13-6** ja Greenwood-Gleasoni **B16-5** graafid. Tema algoritmi abil konstrueeritud *transitiivsete tugevalt regulaarsete* hulgas on enamuse meile huvi pakkuvaid bisümmeetrilisi.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B15-6** ja selle täiendi **B15-6C** binaar- ja *u*-tunnused ning mõõdud:

A: -2.5.6; B: +2.3.3. u=8.6 A: -2.6.11; B: +2.6.12. u=6.8.

SRV	HR	SR
$45^1 60^1$	0.2966	0.8533

Struktuur **B15-6** on *3-kliik- ehk -ring-regulaarne*. Selle servade arv $E=45$. Täiendi **B15-6C** struktuur on *5-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=60$.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B16-6** ja selle täiendi **B16-6C** binaar- ja *u*-tunnused ning mõõdud:

A: -2.4.4; B: +2.4.6. u=9.6 A: -2.8.18; B: +2.6.11. u=6.9.

SRV	HR	SR
$48^1 72^1$	0.2923	0.8594

Struktuur **B16-6** on *4-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=48$. Täiendi **B16-6C** struktuur on samuti *4-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=72$.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B17-8** ja selle täiendi **B17-8C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.6.11; B: +2.5.7. u=8.8 \quad A: -2.6.11; B: +2.5.7. u=8.8.$$

SRV	HR	SR
68^2	0.3010	0.8589

Struktuur **B17-8** on *isetäienduv* ja *3-kliik- ehk -ring-regulaarne*. Selle servade arv $E=68$.

Weisfeileri transitiivste tugevalt regulaarsete graafide hulgas on ka *mitte-bisümmeetrilisi*. Esitame ühe huvitava *monosümmeetrilise* **M16-6** ja selle täiendi **M16-6C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.4.5; B: -2.4.4; B: +2.4.5. \quad A: -2.8.19; B: +2.6.10; C: +2.6.11. \\ u=6.3.6 \quad u=6.6.3.$$

SRV	HR	SR
$24^1 48^2$	0.4581	0.7796

M16-6 on huvitav selles, et selle *orbiitstruktuur tunnuse -A* järgi on *isomorfne* struktuuri endaga ja *orbiitstruktuur tunnuse -B* järgi on *isomorfne* komponentsetest 4-kliikidest moodustatud struktuuriga **B16-3**, seega *bisümmeetriline*. Struktuur **M16-6** on *3-kliik- ehk -ring-regulaarne*. Selle servade arv $E=24$. Täiendi **M16-6C** struktuur on *4-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=48$.

Vaatleme ka mõnda rohkem kui 20-tipulise tugevalt regulaarse graafi bisümmeetrilist struktuuri.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B21-10** ja selle täiendi **B21-10C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.6.12; B: +2.7.17. u=10.10 \quad A: -2.8.15; B: +2.5.7. u=10.10.$$

SRV	HR	SR
105^2	0.3010	0.8704

Struktuur **B21-10** on *6-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=105$. Täiendi **B21-10C** struktuur on *3-kliik-regulaarne*. Selle servade arv on samuti $E=105$.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B25-8** ja selle täiendi **B25-8C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.4.4; B: +2.5.10. u=16.8 \quad A: -2.14.60; B: +2.11.37. u=8.16.$$

SRV	HR	SR
$100^1 200^1$	0.2764	0.8884

Struktuur **B25-8** on *5-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=100$. Täiendi **B25-8C** struktuur on *5-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=200$.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B25-12** ja selle täiendi **B25-12C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.8.19; B: +2.7.14. u=12.12 \quad A: -2.8.19; B: +2.7.14. u=12.12.$$

SRV	HR	SR
150^2	0.3010	0.8785

Struktuur **B25-12** (Pauluse graaf) on *isetäienduv* ning *5-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=150$.

21- ja 25-tipuliste struktuuride vahele mahub veel 21-, 22- ja 24-tipuliste komponentklikkide baasil genereeritud bisümmeetrilised struktuurid, millest kõige viljakamad on 24-tipulised, kus esineb näiteks *kaksteist 24-tipulist bisümmeetrilist* struktuuri, mis on genereeritud komponentsete 2-, 3-, 4-, 6-, 8- ja 12-klikkide alusel vastavalt *dudeka-, okta-, seksta-, kvadro-, tri- ja bi-klikkideks*.

Weisfeileri transitiivse tugevalt regulaarse graafi **B27-10** ja selle täiendi **B27-10C** binaar- ja u -tunnused ning mõõdud:

$$A: -2.7.10; B: +2.3.3. u=16.10 \quad A: -2.10.40; B: +2.12.51. u=10.16.$$

SRV	HR	SR
135 ¹ 216 ¹	0.2894	0.8863

Struktuur **B27-10** (Schläfli graaf) on *3-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=135$. Täiendi **B27-10C** struktuur on *xxx-kliik-regulaarne*. Selle servade arv $E=216$.

Veelgi suuremad, *40-tipulised* 12-valentsed tugevalt regulaarsed struktuurid on konstrueeritud Netšepurenko jt [1990] poolt. Tähistagem neid siin **B40-12A** ja **B40-12B**, kus nende ühised karakteristikud on:

$$-A: -2.6.8; +B: +2.4.6. u=27.12 \quad -A: -2.20.144; +B: +2.20.142. u=12.27.$$

SRV	HR	SR
240 ¹ 540 ¹	0.2681	0.9073

Struktuurid **B40-12A** ja **B40-12B** karakteristikute identsus tähendab nende *sümmeetriaomaduste kokkulangevust*. on samuti ka *bisümmeetrilised*. Struktuurid on *4-kliik-regulaarsed*, kus 4-klikid on omavahel sidusad, mitte komponentsed. Tegemist võib olla *hõreda 4-aluselise struktuuriga* oma 10-elementiliste alustega, sellisega mis *ei ole kvadro-kliik*, sest viimasel juhul peaks **B40-12** servade arv olema 600, on aga 240. **B40-12A** ja **B40-12B** on konstrueeritud nende *isomorfismi testimiseks*, kus nende mitte-isomorfsus avaldub nende teist järku binaargraafide tasemel.

*

Bisümmeetria *eeltingimuseks* on *regulaarsus* ja selle raames *tipu-* ja *servatransitiivsus*. Transitiivsetest on vaid väga väike osa binaarsümmeetrilised. Graafiatlases [1990] esitatud 70^{nc} kuni 20-tipulise 3- ja 4-valentse transitiivse hulgas on vaid 5 bisümmeetrilist.

Nagu nägime on *bisümmeetria tingimused* (Post. 1) lihtsad ja raudsed. Mida need tingimused veel tähendavad?

Postulaat 8. Kahe binaartunnuse, binaar(-) ja binaar(+)tunnuse esinemine bisümmeetrilises struktuuris tähendab ka, et kõik sidusad *bisümmeetrilised struktuurid*, sh *r-klikid* osutuvad *tugevalt regulaarseteks*.

Täpsustus. *Tugev regulaarsus* kujutab endast olekut (k, a, b) , kus k -valentsregulaarse mitte-täisstruktuuri *iga naabertippude paar omab* $a \geq 0$ *ühist naabertippu* ja *iga mitte-naabertippude paar* $b \geq 1$ *ühist naabertippu*. Struktuuri tugev regulaarsus on kahe binaartunnuse $\pm d.n.q$ olemasolu näol mõõdapääsmatu, sest $\pm d=2$ puhul tähendab n just tipupaari *ühiste naabertippude arvu*.

Postulaat 9. Eelkõige tähendab kahe binaartunnuse, binaar(-) ja binaar(+)tunnuse esinemine bisümmeetrilises struktuuris selle *kõikide binaar(-)struktuuride identsust ja kõikide binaar(+)struktuuride identsust*.

Täpsustus. Kui kõikide *mitte-naabertippude ümbruste ühisosad*, st *binaar(-)graafid* on isomorfsed ja kõikide *naabertippude kolateraalse ümbruste ühisosad*, st *binaar(+)graafid* on isomorfsed, siis on tegemist bisümmeetrilise struktuuriga. Bisümmeetria on rangem tingimus kui tugev regulaarsus, kus viimased võivad osutada ka *mono-, multi- või koguni ositi sümmeetriliseks*.

Kokkuvõte ja järeldused

Nii oleme tuvastanud 75 4 kuni 40 tipulist bisümmeetrilist, peamiselt komponentsete klikkide põhjal genereeritud struktuuri. Lahendamata on veel „mittekomponentsusele” rajatud bisümmeetriliste struktuuride „anatomia”, st nende vahetu konstrueerimise probleem. Nende *tugevalt regulaarne olemus* annab selleks täiendavat mõtlemissainet. Uue bisümmeetrilise „avastamine” on midagi „struktuuriastronoomia” taolist, samaväärne uue objekti avastamisega taevalaotuses, sest struktuuride arvud on astronoomilised ning need võivad transitiivsete ja tugevalt regulaarsete loeteludes mitte esineda. Peterseni **B10-3**, Titovi **B13-6**, Greenwood-Gleasoni **B16-5**, Weisfeileri **B15-6** kuni **B27-10** ja Netšepurenko jt **B40-12** tulemused bisümmeetria vallas on juhuslikud kokkusattumused, sest esimene huvitus hoopis regulaarsusest, teine isetäienduvusest, kolmas värviprobleemist, neljas tugevalt regulaarsete graafide konstrueerimisest ja viiendad isomorfismist.

Binaarstruktuuride identsust (Post. 9) tippudevahelise kauguse ja tipupaari ringi kuuluvuse järgi on graafi joonisel raske tabada. Uute, mittegenereeritavate bisümmeetriliste avastamine on taandunud rutiinseks tööks transitiivsete graafide naabrusnimekirjade sissetippimise näol arvutisse, et „avastada” neid.

Kokkuvõttev tabel käsitletud binaarsümmeetrilistest struktuuridest:

Nr	Tähistus	deg	E	HR	SR	Komp/alus		Regul-aarsus	Kommentaar	Binaartunnused	
						r	n			Bin(-)	Bin(+)
1	B4-1	1	2	0.2764	0.6448	2k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
2	B4-1C	2	4			2a	2	4-ring	2-bi-klikk	-2.4.4	<u>+3.4.4</u>
3	B5-2	2	5	0.3010	0.6990	1k	5	5-ring	Isetäienduv	-2.3.2	<u>+4.5.5</u>
4	B6-1	1	3	0.2173	0.8152	3k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
5	B6-1C	4	12			3a	2	3-klikk	2-tri-klikk	-2.6.12	<u>+2.4.5</u>
6	B6-2	2	6	0.2923	0.7515	2k	3	3-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.3.3</u>
7	B6-2C	3	9			2a	3	4-ring	3-bi-klikk	-2.5.6	<u>+3.6.9</u>
8	B8-1	1	4	0.1721	0.8769	4k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
9	B8-1C	6	24			4a	2	4-klikk	2-kvadro-klikk	-2.8.24	<u>+2.6.13</u>
10	B8-3	3	12	0.2966	0.7906	2k	4	4-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.4.6</u>
11	B8-3C	4	16			2a	4	4-ring	4-bi-klikk	-2.6.8	<u>+3.8.16</u>
12	B9-2	2	9	0.2442	0.8431	3k	3	3-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.3.3</u>
13	B9-2C	6	27			3a	3	3-klikk	3-tri-klikk	-2.8.21	<u>+2.5.7</u>
14	B9-4	4	18	0.3010	0.8066	3a	3	3-ring	Isetäienduv	-2.4.4	<u>+2.3.3</u>
15	B10-1	1	5	0.1515	0.9084	5k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
16	B10-1C	8	40			5a	2	5-klikk	2-kvinta-klikk	-2.10.40	<u>+2.8.25</u>
17	B10-3	3	15	0.2754	0.8328	1k	10	5-ring	Peterseni gr	-2.3.2	<u>+4.10.15</u>
18	B10-3C	6	30			1k	10	4-klikk	-	-2.6.12	<u>+2.5.8</u>
19	B10-4	4	20	0.2983	0.8196	2k	5	5-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.5.10</u>
20	B10-4C	5	25			2a	5	4-ring	5-bi-klikk	-2.7.10	<u>+3.10.25</u>
21	B12-1	1	6	0.1323	0.9273	6k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
22	B12-1C	10	60			6a	2	6-klikk	2-seksta-klikk	-2.12.60	<u>+2.10.41</u>
23	B12-2	2	12	0.2059	0.8868	4k	3	3-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.3.3</u>
24	B12-2C	9	54			4a	3	4-klikk	3-kvadro-klikk	-2.11.45	<u>+2.8.22</u>
25	B12-3	3	18	0.2545	0.8601	3k	4	4-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.4.6</u>
26	B12-3C	8	48			3a	4	3-klikk	4-tri-klikk	-2.10.32	<u>+2.6.9</u>
27	B12-5	5	30	0.2992	0.7007	2k	6	6-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.6.15</u>
28	B12-5C	6	36			2a	6	4-ring	6-bi-klikk	-2.8.12	<u>+3.12.36</u>
29	B13-6	6	39	0.3010	0.8409	1k	13	3-klikk	Isetäienduv	-2.5.7	<u>+2.4.5</u>
30	B14-1	1	7	0.1178	0.9399	7k	2	2-klikk	-	-0.2.0	<u>+1.2.1</u>
31	B14-1C	12	84			7a	2	7-klikk	2-septa-klikk	-2.14.84	<u>+2.12.61</u>
32	B14-6	6	42	0.2997	0.8470	2k	7	7-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.7.21</u>
33	B14-6c	7	49			2a	7	4-ring	7-bi-klikk	-2.9.14	<u>+3.14.49</u>
34	B15-2	2	15	0.1781	0.9119	5k	3	3-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.3.3</u>
35	B15-2C	12	90			5a	3	5-klikk	3-kvinta-klikk	-2.14.78	<u>+2.11.46</u>
36	B15-4	4	30	0.2598	0.8711	3k	5	5-klikk	-	-0.2.0	<u>+2.5.10</u>
37	B15-4C	10	75			3a	5	3-klikk	5-tri-klikk	-2.12.45	<u>+2.7.11</u>

38	B15-6	6	45	0.2966	0.8533	1k	15	3-kliikk	<i>Weisfeiler</i>	-2.5.6	+2.3.3
39	B15-6C	8	60			1k	15	5-kliikk	-	-2.6.11	+2.6.12
40	B16-1	1	8	0.1064	0.9488	8k	2	2-kliikk	-	-0.2.0	+1.2.1
41	B16-1C	14	112			8a	2	8-kliikk	<i>2-okta-kliikk</i>	<u>-2.16.112</u>	+2.14.85
42	B16-3	3	24	0.2173	0.8955	4k	4	4-kliikk	-	-0.2.0	+2.4.6
43	B16-3C	12	96			4a	4	4-kliikk	<i>4-kvadro-kliikk</i>	-2.14.78	+2.10.33
44	B16-5	5	40	0.2762	0.8670	4a	4	4-ring	<i>Greenwood-</i>	-2.4.4	+3.10.13
45	B16-5C	10	80			1k	16	5-kliikk	-	-2.8.24	+2.8.22
46	B16-6	6	48	0.2923	0.8594	1k	16	4-kliikk	<i>Weisfeiler</i>	-2.4.4	+2.4.6
47	B16-6C	9	72			1k	16	4-kliikk	-	-2.8.18	+2.6.11
48	B16-7	7	56	0.3001	0.8557	2k	8	8-kliikk	-	-0.2.0	+2.8.28
49	B16-7C	8	64			2a	8	4-ring	<i>8-bi-kliikk</i>	-2.10.10	+3.16.64
50	B17-8	8	68	0.3010	0.8589	1k	17	3-kliikk	<i>Isetüenduv</i>	<u>-2.6.11</u>	+2.5.7
51	B18-1	1	9	0.0972	0.9555	9k	2	2-kliikk	-	-0.2.0	+1.2.1
52	B18-1C	16	144			9a	2	9-kliikk	<i>2-nona-kliikk</i>	<u>-2.18.144</u>	+2.16.113
53	B18-2	2	18	0.1573	0.9280	6k	3	3-kliikk	-	-0.2.0	+2.3.3
54	B18-2C	15	135			6a	3	6-kliikk	<i>3-seksta-kliikk</i>	-2.17.120	+2.14.79
55	B18-5	5	45	0.2631	0.8796	3k	6	6-kliikk	-	-0.2.0	+2.6.15
56	B18-5C	12	108			3a	6	3-kliikk	<i>6-tri-kliikk</i>	-2.14.60	+2.8.13
57	B18-8	8	72	0.3003	0.8626	2k	9	9-kliikk	-	-0.2.0	+2.9.36
58	B18-8C	9	81			2a	9	4-ring	<i>9-bi-kliikk</i>	-2.11.18	+3.18.81
59	B20-1	1	10	0.0895	0.9607	10k	2	2-kliikk	-	-0.2.0	+1.2.1
60	B20-1C	18	180			10a	2	10-kliikk	<i>2-deka-kliikk</i>	<u>-2.20.180</u>	+2.18.45
61	B20-3	3	30	0.1894	0.9169	5k	4	4-kliikk	-	-0.2.0	+2.4.6
62	B20-3C	16	160			5a	4	5-kliikk	<i>4-kvinta-kliikk</i>	-2.18.128	+2.14.73
63	B20-4	4	40	0.2235	0.9019	4k	5	5-kliikk	-	-0.2.0	+2.5.10
64	B20-4C	15	150			4a	5	4-kliikk	<i>5-kvadro-kliikk</i>	-2.17.105	+2.12.46
65	B20-9	9	90	0.3004	0.8682	2k	10	10-kliikk	-	-0.2.0	+2.10.45
66	B20-9C	10	100			2a	10	4-ring	<i>10-bi-kliikk</i>	-2.12.20	+3.20.100
67	B21-10	10	105	0.3010	0.8704	1k	21	6-kliikk	<i>Weisfeiler</i>	-2.6.12	+2.7.17
68	B21-10C	10	105			1k	21	3-kliikk	-	-2.8.15	+2.5.7
69	B25-8	8	100	0.2764	0.8884	1k	25	5-kliikk	<i>Weisfeiler</i>	-2.4.4	+2.5.10
70	B25-8C	16	200			1k	25	5-kliikk	-	-2.14.60	+2.11.37
71	B25-12	12	150	0.3010	0.8785	1k	25	5-kliikk	<i>Isetüenduv</i>	-2.8.19	+2.7.14
72	B27-10	10	135	0.2894	0.8863	1k	27	3-kliikk	<i>Weisfeiler</i>	-2.7.10	+2.3.3
73	B27-10C	16	216			1k	27	x-kliikk	-	-2.10.40	+2.12.51
74	B40-12	12	240	0.2681	0.9073	1k	40	4-kliikk	<i>Netšepurenko</i>	-2.6.8	+2.4.6
75	B40-12C	27	540			1k	40	x-kliikk	-	-2.20.144	+2.20.142

Allajoonitud binaartunnused on antud struktuuri *täielikud invariandid*, st need hõlmavad struktuuri kõiki tippe ja tipupaare ning iseloomustavad ainult seda struktuuri ja ükski teine struktuur sellist ei oma.

Järeldus 1. *Bi-kliki* bininaar(+)tunnus ja *2-r-kliki* bininaar(-)tunnus on struktuuri *täielikud invariandid*.

Järeldus 2. *r-kliid* on lihtsalt konstrueeritavad, see nõuab vaid sobivate komponent-klikkide kogumite moodustamist.

Täpsustus. Komponentklikkide kogumite moodustamine on *aritmeetika*, nende sissetippimine arvutisse *rutiinne töö* ning tulemused tunnusmaatriksite ja teiste *struktuursete atribuutite* näol ongi käes.

Ei ole välistatud, et 10- ja 20-tipuliste hulgas leidub peale ülalloeletute veel teisigi. See, kes „avastab” uue kuni 20-tipulise bisümmeetrilise struktuuri saab endale *endanimelise graafi* ja seda kinnitava *SERRi sertifikaadi*. Sellist saavutust pole paraku küll võimalik rahaliselt premeerida ega kuulsakssaamist tagada, kuid asja eest oleks see küll. Oma tagasihoidlikkusele vaatamata kuulutab ja kinnitab siinkirjutaja kõik siin esitatud *kvadro-, kvinta-, seksta-, septa-, okta-, nona-, deka- ja dudeka-kliid* endanimelisteks graafideks. Täna tähelepanu eest!

Tugevalt regulaarsete graafide alast materjali leidub internetis hulgi. Seda surfides selgub, et „tugevregulaarikud” ei ole ühel meelel, mõni peab ka täisgraafe tugevateks, teised mitte, jne. Nende poolt esitatud loetelud on erinevad ja vaid osaliselt kattuvad. Kõik meie poolt esitatud *sidusad struktuurid* vastavad ka *tugeva regulaarsuse* tingimustele. Tavaliselt on kuni 27-tipuliste tugevalt regulaarsete loetelu millegipärast äärmiselt napp ja *r*-klikke nende hulgas ei ole leidunud.

Järeldus 3. Kas tõepoolest *ei ole r-klikke keegi veel märganud!?*

Esitame väljavõtte ühest pajudest tugevalt regulaarsete loeteludest, antud juhul on selleks valitud <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/remote/srgs/>:

Strongly regular graph parameters on 5-99 vertices

The fields in the following table are all straightforward. The parameters are given in the standard (n,k,a,c) fashion. The eigenvalues of the adjacency matrix are called **theta** and **tau** with respective multiplicities **m_theta** and **m_tau**.

The **Number** field (will eventually) give some indication of the number of graphs known, the **Type** field indicates if the graph is a conference graph or a Smith graph (one of the Krein conditions is tight). Any further comments will be linked into the final column.

Parameters	theta	m_theta	tau	m_tau	Number	Type	Comments
(5, 2, 0, 1)	0.618	2	-1.618	2	3	Conf.	none yet
(9, 4, 1, 2)	1.000	4	-2.000	4	14	Conf.	none yet
(10, 3, 0, 1)	1	5	-2	4	17		none yet
(13, 6, 2, 3)	1.303	6	-2.303	6	29	Conf.	none yet
(15, 6, 1, 3)	1	9	-3	5	38		none yet
(16, 5, 0, 2)	1	10	-3	5	44	Smith	none yet
(16, 6, 2, 2)	2	6	-2	9	46		Comp. OA(3,4)
(17, 8, 3, 4)	1.562	8	-2.562	8	50	Conf.	none yet
(21, 10, 3, 6)	1	14	-4	6	67		none yet
(21, 10, 5, 4)	3	6	-2	14	?		none yet
(25, 8, 3, 2)	3	8	-2	16	69		none yet
(25, 12, 5, 6)	2.000	12	-3.000	12	71	Conf.	none yet
(26, 10, 3, 4)	2	13	-3	12	?		none yet
(27, 10, 1, 5)	1	20	-5	6	72	Smith	none yet
(40, 12, 2, 4)	2	24	-4	15	74		none yet

Siin on lahtrisse **Number** paigutatud selle graafi järjekorranumber eelmises tabelis. Rea (16, 6, 2, 2) lahtris Number on originaalis märges 2?. Weisfeileril asub samadel koordinaatidel *monosümmeetriline* struktuur (vt meie **M16-6**). Ka tabelis esinev (21, 10, 5, 4) on küll tugevalt regulaarne kuid *monosümmeetriline*. 26-tipuline graaf ei ole meil vaatluse alla võetud.

On tähelepanuväärne ka, et tugevalt regulaarsuse vallas on nüüdseks graafe suvaliselt ümber nimetatud, algataja Weisfeiler „maha maetud” ja Netšepurenko graaf „ära varastatud”. Veelgi huvitavam on, et 38st *sidusast bisümmeetrilisest ja tugeva regulaarsuse tingimusele vastavast* 5- kuni 20-tipulisest struktuurist on selles „tugevregulaarikute” tabelis vaid 8.

Selle eest on needsamad „tugevregulaarikud” esitanud ka kuni 999-tipulisi struktuure, kuigi viimaseid on üks:

(999, 448, 172, 224)	4	924	-56	74	?	none yet
----------------------	---	-----	-----	----	---	----------

Seda küllaltki suure valentsusega graafi arvutisse sisse tippida on muidugi tüütu, kuigi huvitaks, kas see ikkagi ka bisümmeetriline on.

Struktuurisemioolilisest aspektist saame tugevalt regulaarseid rohkem, kusjuures need on lihtsalt tuletatavad.

Nr	Tähistus	deg	E	SR	Regulaarsus	Selgitus	(+)tunnus
1	B999-2	2	999	0.9989	<i>3-kliik</i>	333 komponentset 3-klikki	+2.3.3
2	B999-2C	996	497502		<i>333-kliik</i>	333 3-elementilist alust 3-tritsent-triginta-tri-kliik	?
3	B999-8	8	3996	0.9979	<i>9-kliik</i>	111 komponentset 9-klikki	+2.9.36
4	B999-8C	990	494505		<i>111-kliik</i>	111 9-elementilist alust 9-tsent-undeka-kliik	?
5	B999-110	110	54945	0.9736	<i>111-kliik</i>	9 komponentset 111-klikki	+2.111.6105
6	B999-110C	888	443556		<i>9-kliik</i>	9 111-elementilist alust 111-nona-kliik	?
7	B999-332	332	165832	0.9515	<i>333-kliik</i>	3 komponentset 333-klikki	+2.333.55278
8	B999-332C	666	332667		<i>3-kliik</i>	3 333-elementilist alust 333-tri-kliik	?

Kui komponentsetest klikkidest koosnevat struktuuri tugevalt regulaarseks ei tituleerita, siis nende täiendid sellest ei pääse. Kuna siinesitatuid ei ole töödeldud, siis ei ole veel teada nende binaartunnused. *r*-klikkide nimetusi võib muidugi kritiseerida, kuid paremat võimalust ei ole leidnud.

Järeldus 4. *Bisümmeetria on eriline ja eristatav vähemrangemast mono- ja multisümmeetriast ehk „transitiivsusest” ning mono-, multi- ja ositi sümmeetrilisest tugevast regulaarsusest.*

Kirjanduse loetelu

Netšepurenko, M. jt. Нечепуренко, М. и др. Алгоритмы и программы решение задач для графов и сетей. Новосибирск, 1990.

Read, R. C., Wilson, R. J. An Atlas of Graphs. Oxford University Press, 2004.

Tevet, J.-T. (2004e) Sümmeetria graafides. *S.E.R.R., Tallinn, 2004, 20 lk, (vt digitaalvariant).*

(2005a) Klikid, kaas- ja naabergraafid: tunnusmaatriksit lugedes. *S.E.R.R., Tallinn, 2005, 26 lk, (vt digitaalvariant).*

(2005b) Graafide süsteemanalüüs: algoritm ja rakendus. *S.E.R.R., Tallinn, 2005, 94, (vt digitaalvariant).*

(2006b) Structure Semiotic Approach to the Graphs. *S.E.R.R., Tallinn, 2006, pp. 47, (vt digitaalvariant).*

(2006c) Graafide struktuurisemiootiline käsitus. *S.E.R.R., Tallinn, 2006, 47 lk, (vt digitaalvariant).*

(2007b) Valik graafide struktuure. *S.E.R.R., Tallinn, 2007, 48 lk, (vt digitaalvariant).*

Titov, V. Тутов, В. О симметрии в графах. *Вопросы кибернетики, 15, N2, 1975, 76-109.*

Weisfeiler, B. On Construction and Identification of Graphs. – *Springer Lect. Notes Math., 558, 1976.*

Digitaalvariant vt: nlib.ester.ee.

Boris Weisfeilerist

Kuna antud traktaadi asendiks oli juhuslikult jälle kätte võetud B. Weisfeileri 30-aasta-tagune publikatsioon, siis sobib siin lõpetada Wikipediast võetud väikese ülevaatega.

Weisfeiler was born in the Soviet Union. He obtained his Ph.D. in 1970 from Steklov Institute of Mathematics Leningrad Department, as a student of E.B.Vinberg. In the early 1970s Weisfeiler was asked to sign letter against a colleague, and for his refusal was branded „anti-Soviet”. Like other Russian Jews he also experienced discrimination. In 1975, Weisfeiler left the USSR in order to freely practice his career and religion. After short time under Armand Borel at the Institute for Advanced Study near Princeton University, Weisfeiler settled in as professor at Penn State University. In 1981, he became a naturalized citizen of the US.

Weisfeiler’s research spanned twenty years, and he published three dozen research papers. According to his colleague Alexander Lubotzky, Weisfeiler was studying „the more difficult questions” of algebraic groups in „the case when the field is not algebraically closed and the groups do not split or – even worse – are nonisotropic”. He is known the Weisfeiler-Leman Algorithm, the Kac-Weisfeiler conjectures, the Weisfeiler filtration, and work on strong approximation and finite linear groups.

Weisfeiler, an experienced outdoorsman, went on a solo hiking trip over Christmas of 1984 to the Chilean Andes.