

John-Tagore Tevet

SÜMMEETRIA GRAAFIDES

2004

Teavikus käsitletakse sümmeetriat graafides nõ struktuurisemiootilisest seisukohast [Tevet, 2004d], mis viib mõnedele originaaltulemustele.

SISUKORD

Sissejuhatus	2
1. GRAAFIDE SÜMMEETRIA ALUSED	3
1.1. Automorfismid ja sümmeetriaklassid	3
1.2. Sümmeetria liigid	4
1.3. Sümmeetriaklasside kaasgraafid	6
2. SÜMMEETRIA ANALÜÜS GRAAFIDES	7
2.1. Kaasgraafide rakendus	7
2.2. Peterseni fenomenist	8
2.3. Binaargraafide täielikkusest	10
2.4. Jääkgraaf ja selle rakendus	11
2.5. Mäng Mathoni graafidel	13
3. SÜMMEETRIATE ERAKORDSUSTEST	15
3.1. Sümmeetria naabus	15
3.2. Asümmeetria naabrusest	16
3.3. Sümmeetria mõõt	17
Kokkuvõte	19
Kirjanduse loetelu	20

Sissejuhatus

Esitatud sümmeetriakäsitlus rajaneb “Struktuurisemiootika ‘04” [Tevet, 2004d] siin viidatud aksioomidel, definitsioonidel, otsustustel, algoritmidel ja näidetel. Siin esitatud täiendavate definitsioonide, näidete ja otsustuste numeratsioon on eelmisele jätkuv.

Kõige *üldisemas* mõttes on sümmeetria objekti omadus, mis avaldub tema *muutumatuks jäämises mingi ümberpaigutuse korral*.

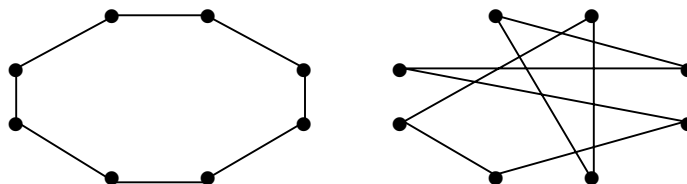
Matemaatikas defineeritakse sümmeetriat kui: a) kujundi omadust *teisenduda iseendaks* (näiteks isomeetriselt); b) *binaarse relatsiooni* omadust $xRy \leftrightarrow yRx$.

Graafiteoorias nimetatakse sümmeetriat ka *transitiivsuseks* (mitte ära segada suunatud graafide transitiivsusega!)– see on tulnud geomeetris-kombinatoorsest käsitlusest, kus transitiivsusel tõepoolest oma roll on.

Sümmeetria on *struktuuri* olulisemaid atribuute ning on seotud selle *orbiitide* võimsuse ja arvuga. Struktuurset aspektist sobib orbiiti *sümmeetriaklassiks* nimetada. Sümmeetria on *mõõdetav*, selle väärtus on maksimaalne kui eksisteerib üksainus orbiit, selle väärtus on 0, kui orbiitide arv võrdub struktuurilelementide arvuga.

Sümmeetriaga on lugu samasugune nagu struktuuriga. Kõik teavad mis see on, kuid ei oska selgitada. Siiski on sümmeetriaga asi lihtsam, teatmeteostes domineerivad definitsioonid ‘a la “sümmeetria on terviku säärane asetus, kus selle mingist teljest või keskpunktist võrdsel kaugusel olevad osad on ühetaolised”. See on “figuraalne” lähenemine. Struktuurset aspektist on sümmeetria pigem *ühetaoliste kordumine* kui mingi telje ümber *peegelduv paarilisus*.

Struktuuri “figuursus” on teisejärguline. Struktuur on *mõiste* (aksioom 1), isomorfsete graafide identsed struktuurid võivad omada väga erinevaid “figuure”. Täiesti sümmeetrilise graafi “figuur” võib olla, ja tavaliselt ongi, selline kus mingit sümmeetriat näha ei ole. Nii nagu struktuur, on selle sümmeetria pigem abstraktne mõiste kui mingi “figuurne” nähtus. Muidugi saab sümmeetrilise struktuuri graafi nii välja joonistada, et selle sümmeetria “figuurselt” silma torkab.



Ühe ja sama struktuuri sümmeetrilise ja mitesümmeetrilise “figuuriga” graaf.

Graafide struktuurikäsitluse, sh sümmeetriakäsitluse, “võtmeks” on *binaargraafid* g_{ij} (definitsioon 1). *Binaargraafide isomorfismi-klassile* \mathbf{g}_n vastab: **a)** automorfismide transitiivsuspierakkond ehk *binaarorbiit* $\mathcal{OR}_n, \mathbf{g}_n \rightarrow \mathcal{OR}_n$ (aksioom 3.1); **b)** invariantide ehk *binaartunnuste klass* $W_n, \mathbf{g}_n \rightarrow W_n$ (aksioom 4.1); **c)** *taust- ehk kaasgraaf* G_n (def. 3), $\mathbf{g}_n \rightarrow G_n$; **d)** *naaberstruktuur* $\mathbf{g}_n \rightarrow GS_n^{adj}$ (def. 6, aksioom 7.2). Tipupaaride v_i, v_j , binaarorbiidi \mathcal{OR}_n ja kaasgraafi G_n identifikaatoriteks on *binaartunnused* w_{ij} (def. 4). Graafi sümmeetriat käsitleme nn *tunnusmaatriksi* W tasemel, kus kõik tarvilik välja loetav on.

Graafide struktuurikäsitlus võimaldab *tuvastada ja analüüsida*: **1)** graafi *struktuuri* GS (otsustused 4 ja 11) koos tema *tipu- ja binaarorbiitidega*, vastavalt $\mathcal{OR}_k, \mathcal{OR}_n^+$, ja \mathcal{OR}_n^- (algoritm 1, 2, 7 ja 8, otsustused 2 ja 3 ning näited 1, 5, 6, 12 kuni 17); **2)** graafide *isomorfismi* (algoritm 9, def. 9, otsustus 12 ning näited 15 ja 18); **3)** graafi *diameetrit, ringe ja klikke* (algoritm 3 ja 4, otsustus 7 ning näited 8 kuni 11); **4)** graafi *kaas- ehk taustgraafe* G_n (algoritm 5, otsustus 8 ning näide 12); **5)** graafi *struktuurseid karakteristikuid* (algoritm 10, otsustus 13 ning näide 19); **6)** graafi *naaberstruktuure* GS_n^{adj} ja *taastatavust* (vt def. 6, algoritm 11, otsustused 14, 15 ning näited 20 ja 21); **7)** *struktuuride süsteemi* FGS^{VI} (aksioom 10, algoritm 11, otsustused 16 kuni 19 ning näited 22 ja 23); **8)** *struktuurimuutuste tõenäosuslikke karakteristikuid* (aksioom 9, algoritm 12, otsustused 20 kuni 23 ning näide 24).

Järgnevas materjalis lisandub loetelule ka *graafide sümmeetriaga* seonduv.

1. GRAAFIDE SÜMMEETRIA ALUSED

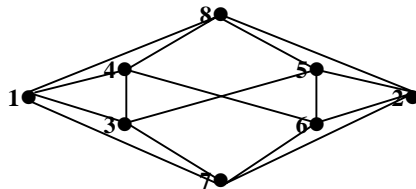
1.1. Automorfismid ja sümmeetriaklassid

Sümmeetria graafides rajaneb orbiitidel Ω ehk automorfismide transitiivsusiirkondadel. Kombinatorsest aspektist käsitletakse automorfismi $\alpha(v_i)=v_j$ kui graafi tippude **naabrust säilitavat permutatsiooni**. Seda tõlgendatakse kui **isomorfismi iseendas**. Automorfismid moodustavad graafi automorfismirühma $AutG$. Permutatsioonitehnika võtetega fikseeritakse selles rühmas automorfismide transitiivsusiirkonnad ehk orbiidid, mille elemente peetakse “ühesugusteks”. $AutG$ puhul huvitatakse peamiselt tipuorbiitidest.

Struktuursest aspektist käsitletakse automorfismi α kui **struktuuri säilitavat tippude või tipupaaride substitutsiooni** (permutatsiooni). Kuna automorfismid on seotud isomorfismiga, siis toimub **orbiitide indutseerimine binaargraafide isomorfismiklasside** $\{g_{ij1} \cong g_{ij2} \cong \dots \cong g_{ijq}\} = \mathbf{g}_n \subset GS$ baasil, kus iga klass kujutab nõ “isomorfismide transitiivsusiirkonda”, kus transitiivsusel tähendust ei ole. Niisiis, lokaalne isomorfism $g_{ij1} \cong g_{ij2}$ või $G_{i1} \cong G_{i2}$ vastab graafi automorfismile, isomorfismiklass aga orbiidile Ω (vt orbiidiaksiomid 3) ehk **sümmeetriaklassile**.

Permutatsioonitehnikas käsitletakse graafi kui “figuuri”, mis selle pööramisel ümber oma telgede ja/või keskme säilitab oma kuju ja märgistatuse.

Näide 25a. Graaf G , selle binaartunnused ja orbiite tuvastav tunnusmaatriks W^{**} :



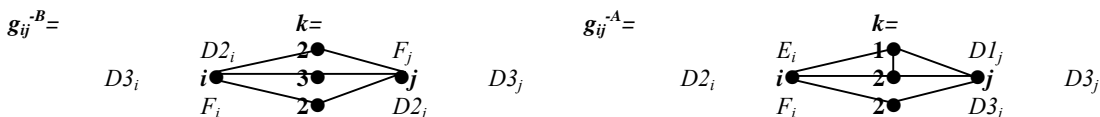
Binaartunnused: $-A=-2.5.7$; $-B=-2.5.6$; $-C=-2.4.4$; $+D=+2.3.3$; $+E=+2.4.5$; $+F=+3.8.16$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	ABCDEF	k
1	0	-C	+E	+E	-C	-C	+D	+D	003220	1
2		0	-C	-C	+E	+E	+D	+D	003220	1
3			0	+D	+F	-B	+D	-A	111211	2
4				0	-B	+F	-A	+D	111211	2
5					0	+D	-A	+D	111211	2
6						0	+D	-A	111211	2
7							0	-C	201400	3
8								0	201400	3

Näide 25b. Võrdleme tunnusmaatriksiga saadud graafi G “figuuri” pööramisel ümber telgede saadud rühma $AutG$ **permutatsiooni-maatriksiga**, mis on täiendatud vastavate tipusubstitutsioonide, binaartunnuste ja korrutustabeliga.

α/i	12345678	Substitutsioonid	Binaartunnused	α	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$
I	12345678	\emptyset	\emptyset	$\alpha 1$	I	$\alpha 3$	$\alpha 2$
$\alpha 1$	12436587	$(\emptyset)(3-4)(5-6)(7-8)$	$\emptyset, +D2, +D2, -C3$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	I	$\alpha 1$
$\alpha 2$	21654378	$(1-2)(3-6)(4-5)(\emptyset)$	$-C1, -B, -B, \emptyset$	$\alpha 3$	$\alpha 2$	$\alpha 1$	I
$\alpha 3$	21563487	$(1-2)(3-5)(4-6)(7-8)$	$-C1, +F, +F, -C3$				

Näide 25c. Tippude substitutsiooni identifitseeriva ($-B$) ja mitte identifitseeriva binaartunnuse ($-A$) binaargraafid g_{ij} koos nende servi iseloomustavate binaartunnustega:



Kommentaari: Identifitseerivat binaargraafi moodustava tipuga i intsidentsete servade binaartunnused kattuvad tipuga j intsidentsete servade binaartunnustega, mitteidentifitseerival need ei kattu.

Otsustused 24. Permutatsioonitehnika ja struktuurse käsitluse erinevustest ja kokkulangevusest orbiitide tuvastamisel:

O24.1. Permutatsioonitehnika orbiidituvastus toimub graafi “figuuri-pööramis-operatsioonide” transitiivsuse kindlaksmääramise teel, struktuurne käsitlus rajaneb binaartunnuste klassidel.

O24.2. Permutatsioonitehnika toimub tipu- ja servaorbiitide tuvastamine eraldi ning “mitteseva” orbiitide tuvastamist ei tunta. Struktuursel käsitlusel toimub positsiooni-, binaar(+)- ja binaar(-)orbiitide tuvastamine komplekselt, kus tunnusmaatriks W esitab tervikliku pildi.

O24.3. Permutatsioonitehnika võib sümmeetriliste graafide puhul üksikoperatsioonide arv ulatuda faktoriaalini, struktuursel käsitlusel seda ei juhtu.

O24.4. *Erinevate struktuuridega graafid võivad omada ühte ja sama rühma AutG kuid omavad erinevaid tunnusmaatrikseid W^{**} .*

O24.5. Permutatsioonitehnika iga tipusubstitutsiooni jaoks leidub seda identifitseeriv binaartunne, kuid mitte kõik binaartunnused ei identifitseeri substitutsiooni.

O24.6. *Nii permutatsioonitehnika kui ka struktuursel käsitlusel tuvastatud orbiidid langevad kokku!*

O24.7. Struktuurne orbiidituvastus on lihtsam kui permutatsioonitehniline tuvastamine.

1.2. Sümmeetria liigid

Definitsioon 10. Graafi G , millel on üksainus tipuorbiit ΩV_k nimetame *tippudest sümmeetriliseks* ehk struktuuri GS , millel on üksainus positsiooniorbiit ΩV_k nimetame *elementidest sümmeetriliseks*.

Otsustus 25. Tippudest sümmeetrilise graafi alamgraafide hulk $\{G-v_i\}$ kujutab endast isomorfismiklassi.

Definitsioon 11. Graafi G ja selle struktuuri GS , millel on ainult üks binaarorbiit ΩR_n nimetame *täissümmeetriliseks*.

Kommentaari: Täisgraaf koosneb ainult ühest binaar(+)orbiidist omamata ühtki binaar(-)orbiiti ning tühigraaf koosneb ainult ühest binaar(-)orbiidist omamata ühtki binaar(+)orbiiti – need mõlemad ongi täis- ehk 100% sümmeetrilised.

Definitsioon 12. Graafi G ja selle struktuuri GS , millel on ainult üks binaar(+)orbiit ΩR_n^+ ja ainult üks binaar(-)orbiit ΩR_n^- nimetame *duaalsümmeetriliseks*.

Kommentaari: Duaalsümmeetrilist graafi on nimetatud ka “tugevalt sümmeetriliseks” [Titov, 1975] kuid seda hoopis teistel alustel ja sellele on tulnud hoopis teisi radu pidi.

Näide 26. Duaalsümmeetrilise Titovi graafi G^{TIT9} binaartunnused ja täielik tunnusmaatriks W^{**} . Graafi ennast ei ole mõtet esitada, sest “figuurselt” ei ole duaalsümmeetria äratuntav.

Binaartunnused: $-A=-2.4.4$ ja $+B=+2.3.3$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	AB	k
1	0	+B	+B	+B	+B	-A	-A	-A	-A	44	1
2		0	+B	-A	-A	+B	+B	-A	-A	44	1
3			0	-A	-A	-A	-A	+B	+B	44	1
4				0	+B	-A	+B	+B	-A	44	1
5					0	+B	-A	-A	+B	44	1
6						0	+B	-A	+B	44	1
7							0	+B	-A	44	1
8								0	+B	44	1
9									0	44	1

Kommentaari: a) Juhuslikult on duaalsümmeetriline graaf G^{TIT9} ka isetäienduv. b) Ka Peterseni graaf G^{PET} on duaalsümmeetriline (kuid mitte isetäienduv).

Definitsioon 13. Graafi G ja selle struktuuri GS , millel on:

- a) üks binaar(+)orbiit \mathcal{OR}_n^+ ja mitu binaar(-)orbiiti \mathcal{OR}_n^- nimetame (+)ümmeetriliseks (graafi G puhul ka servadest sümmeetriliseks);
- b) üks binaar(-)orbiit \mathcal{OR}_n^- ja mitu binaar(+)orbiiti \mathcal{OR}_n^+ nimetame (-)ümmeetriliseks.

Kommentaariid: (+)ümmeetrilist graafi, millel on rohkem kui üks binaar(-)orbiit on nimetatud ka “küllaltki sümmeetriliseks” [Titov, 1975] kuid seda hoopis teistel alustel ja sellele on jõutud hoopis teisi radu pidi, näiteks “servalähedast sümmeetriat” ja muud seesugust tõestades.

Näide 27. (+)ümmeetrilise Heawood'i graafi G^{HEAW} binaartunnused ja täielik tunnusmaatriks W^{**} .

Binaartunnused: $-A=-3.8.9$, $-B=-2.3.2$ ja $+C=+5.14.21$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	ABC	k
1	0	+C	-B	-A	-B	+C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	+C	463	I
2		0	+C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	+C	-B	-A	-B	463	I
3			0	+C	-B	-A	-B	+C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	463	I
4				0	+C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	+C	-B	463	I
5					0	+C	-B	-A	-B	+C	-B	-A	-B	-A	463	I
6						0	+C	-B	-A	-B	-A	-B	-A	-B	463	I
7							0	+C	-B	-A	-B	+C	-B	-A	463	I
8								0	+C	-B	-A	-B	-A	-B	463	I
9									0	+C	-B	-A	-B	+C	463	I
10										0	+C	-B	-A	-B	463	I
11											0	+C	-B	-A	463	I
12												0	+C	-B	463	I
13													0	+C	463	I
14														0	463	I

Kommentaariid: Heawood'i graafi binaartunnuste arv võrdub binaarorbiitide ja naaberstruktuuride arvuga.

Definitsioon 14. Tippudest sümmeetrilist graafi G ja selle struktuuri GS , millel on mitu binaar(+)orbiiti \mathcal{OR}_n^+ ja mitu binaar(-)orbiiti \mathcal{OR}_n^- nimetame *polüsümmeetriliseks* (vt näide 13).

Duaal-, (+)-, (-)- ja polüsümmeetrilisi struktuure koos võib nimetada lihtsalt *sümmeetrilisteks* struktuurideks.

Otsustused 26. Struktuuri sümmeetriatribuutide omavahelisest seotusest:

O26.1. a) (+)ümmeetriline struktuur on kas elementidest sümmeetriline või kahealuseline; b) duaal-, (-)- ja polüsümmeetriline struktuur on elementidest sümmeetriline.

O26.2. a) Sümmeetriaklassi ehk binaarorbiidile \mathcal{OR}_n vastab *binaargraafide isomorfismklass* \mathfrak{g}_n (def. 1, aksioom 3) ja selle *binaartunnuste klass* W_n (aksioom 4). b) Sümmeetriaklassi ehk binaarorbiidi \mathcal{OR}_n igale elemendile $v_i v_j$, $v_i v_j \in \mathcal{OR}_n$, vastab *naabergraaf* G^{adj}_{ij} (def. 6), niisugune mis on isomorfne kõigi selle orbiidi elementidele vastavate naabergraafidega, st need kujutavad *naaberstruktuuri* GS^{adj}_n . c) Igale sümmeetriaklassile ehk binaarorbiidile \mathcal{OR}_n vastab üks *naaberstruktuur* GS^{adj}_n (aksioom 7).

Sümmeetrilisi struktuure esineb harva. Näiteks 6-elemeniliste struktuuride hulgas on neid vaid 4, st vaid 2,56%. See % kahaneb elementide arvu suurenemisel. Sümmeetriline struktuur, kui ta ei ole kahealuseline, on muidugi regulaarne. Ka regulaarsete ja rangelt regulaarsete hulgas on sümmeetriliste esinemine harv nähtus. Näites 6 esitatud tugevalt regulaarsel graaf ei ole tippudest sümmeetriline, sellel on 15 tipu-, 79 binaar(+)- ja 74 binaar(-)orbiiti. Seda enam on alust struktuuride sümmeetriat uurida.

Definitsioon 15. Graafi G ja selle struktuuri GS , mis ei ole elementidest (tippudest) sümmeetriline ja omab vähemalt üht positsiooniorbiiti (tipuorbiiti) \mathcal{OV}_k elementide arvuga rohkem kui üks nimetame *lokaalsümmeetriliseks* (vt näide 25a).

Kommentaariid: Peaaegu kõik struktuurid on lokaalsümmeetrilised. Näiteks, kõigist 156 6-tipulistest graafidest on 149 lokaalsümmeetrilised, st ~95,5% graafidest. Tippude arvu suurenemisel see protsent väheneb, kuid rõhuvaks enamuseks osutuvad nad ikkagi.

Definitsioon 16. Graafi G ja selle struktuuri GS , mille positsiooniorbiitide arv K võrdub elementide arvuga $|V|$ ehk binaarorbiitide arv N võrdub tipupaaride arvuga $|R|$ nimetame **täisasümmeetriliseks ehk 0-sümmeetriliseks**.

Kommentaari: Graafi täielik asümmeetria ehk täisasümmeetria on peaaegu sama erandlik nagu sümmeetria. Näiteks, kõigi 156 6-tipuliste graafide hulgas on neid vaid kolm, st $\sim 1,9\%$ graafidest (vähem kui sümmeetrilisi!). Kuid see protsent suureneb tippude arvu suurenemisel.

Otsustus 27. Sümmeetria seotus sümmeetriaklasside ehk orbiitide ΩR_n arvuga N annab sobiva liigituse.

1.3. Sümmeetriaklassi kaasgraafid

Kaasgraafi moodustavad binaarorbiidi (sümmeetriaklassi) ΩR_n elemendid. Definitsioonis 3^s olime seda veel taustgraafiks nimetanud.

Definitsioon 17. Graafi, mille servad e_{ij} vastavad graafi G binaarorbiidi ΩR_n elementidele (st tipupaaridele $v_i v_j$) nimetame graafi G **kaas- ehk taustgraafiks** G_n .

Otsustused 28. Graafi G kaasgraafide G_n moodustumise kohta:

O28.1. a) Igal orbiidil ΩR_n on oma kaasgraafi G_n ; b) Kaasgraaf on graafi endastmõistetav atribuut.

O28.2. a) Binaar(+)orbiidile ΩR_n^+ vastab kaas(+)-graaf G_n^+ ja see kujutab endast graafi G osagraafi; b) binaar(-)orbiidile ΩR_n^- vastab kaas(-)-graaf G_n^- ja see kujutab endast graafi täiendi \bar{G} osagraafi.

O28.3. Kaasgraaf G_n omab samuti kaasgraafi ehk **teist ehk kõrgemat järku kaasgraaf** G_n^2 .

O28.4. Duaalsümmeetrilise struktuuri täiend \bar{GS} on selle ainuke kaasgraaf, mis on samuti duaalsümmeetriline.

Näide 28. (+)sümmeetriline Heawood'i graaf G^{HEAW} (vt näide 27) omab kaht kaas(-)graafi G_n^- . Selle graafi esimese kaas(-)graafi $G_{n-3,8,9}$ binaartunnused ja tunnusmaatriks W^{**} :

Binaartunnused: $-A=-3.10.16$, $-B=-2.4.4$ ja $+C=+3.8.10$,

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	ABC	k
1	0	-A	-B	+C	-B	-A	-B	+C	-B	+C	-B	+C	-B	-A	364	1
2		0	-A	-B	+C	-B	+C	-B	+C	-B	-A	-B	+C	-B	364	1
3			0	-A	-B	+C	-B	-A	-B	+C	-B	+C	-B	+C	364	1
4				0	-A	-B	+C	-B	+C	-B	+C	-B	-A	-B	364	1
5					0	-A	-B	+C	-B	-A	-B	+C	-B	+C	364	1
6						0	-A	-B	+C	-B	+C	-B	+C	-B	364	1
7							0	-A	-B	+C	-B	-A	-B	+C	364	1
8								0	-A	-B	+C	-B	+C	-B	364	1
9									0	-A	-B	+C	-B	-A	364	1
10										0	-A	-B	+C	-B	364	1
11											0	-A	-B	+C	384	1
12												0	-A	-B	364	1
13													0	-A	364	1
14														0	364	1

Kommentaari: a) Graafi G^{HEAW} esimene kaas(-)graaf $G_{n-3,8,9}$ on samuti (+)sümmeetriline ja omab omakorda kaht kaas(-)graafi nagu G^{HEAW} , kuid selle struktuur on hoopis teistsugune. b) Graafi G^{HEAW} teist järku kaasgraaf: esimese kaas(-)graafi $G_{n-3,8,9}$ esimese kaas(-)graafi $G_{n-3,10,16}$ (siin esitamata) binaartunnused on $-A=-3.8.9$, $-B=-2.3.2$ ja $+C=+5.14.21$ ning see osutub Heawood'i graafiks G^{HEAW} endaks! c) Graafi G^{HEAW} teise kaas(-)graafi $G_{n-2,3,2}$ (siin esitamata) binaartunnused on $-A=-0$ ja $B=+2.7.21$, seega on see duaalsümmeetriline ning tunnustest on välja loetav (vt otsustus 5.4), et see koosneb kahest 7-klikilisest komponendist.

Otsustused 29. Graafi G kaasgraafide G_n omaduste kohta:

O29.1. Kaasgraafid G_n on reeglina (+)sümmeetrilised.

- O29.2.** Kaasgraafid G_n (kaasstruktuurid GS_n) järgivad graafi G struktuuri GS sümmeetriat, veelgi enam, nad võivad täpsustada graafi sümmeetriaomadusi.
- O29.3.** Juhul kui ei ole teada, kas binaartunnuste klass W_p vastab binaarorbidele, siis saadakse vastava "robustse" kaasgraafi G_p abil täpsustatud binaartunnuste klass W_n mis parajasti vastab orbidele ΩR_n . Seda võtet kasutatakse tippudest sümmeetriliste graafide struktuuri tuvastamisel (vt algoritm 7.1 ja näide 13).
- O29.4.** Kaasgraaf G_n omab samuti kaasgraafi ehk teist ehk kõrgemat järku kaasgraaf G_n^2 .

Kommentaari: Kaasgraaf G_n on struktuuri oluline uurimisvahend.

2. SÜMMEETRIA ANALÜÜS GRAAFIDES

2.1. Kaasgraafide rakendus

Huvitava grupi moodustavad ka sümmeetrilised kahealuselised graafid. Kunagi 1965 aastal püstitas F.Harary küsimuse: kas graafi servasümmeetriast, st (+)sümmeetriast järeldub ka tipusümmeetria? Küsimuse lahendas J.Folkman [1967], kes konstrueeris (+)sümmeetriliste graafide klassi, mille graafid ei ole tippudest sümmeetrilised. Neid nimetatakse *kooskõlastamata kahealuselisteks graafideks*. Väikseim neist on 20-tipuline.

Folkmani graafi analüüs [vt näide 12, Tevet 2004d] näitas, et selle kaas(-)graafideks on osutunud: G^{FOLK}_{n-A} – Peterseni graaf G^{PET} , G^{FOLK}_{n-B} – G^{FOLK} enda kahealuseline täiend; G^{FOLK}_{n-C} – paljukomponentne (+)sümmeetriline graaf; G^{FOLK}_{n-D} – Peterseni graafi G^{PET} täiend; G^{FOLK}_{n-E} – kaas(-)graafi G^{FOLK}_{n-C} sidus ja (+)sümmeetriline täiend; G^{FOLK}_{n-F} – Folkmani graaf G^{FOLK} ise.

Järgnevas võrdleme Folkmani graafi Titovi [1975] poolt konstrueeritud 20-tipulise kahealuselise kooskõlastamata graafiga.

Näide 29a. (+)sümmeetrilise kahealuselise Titovi graafi G^{TIT20} binaartunnused koos Folkmani graafi G^{FOLK20} binaartunnustega (sulgudes esitatult) ja täielik tunnusmaatriks W^{**} :

Binaartunnused: $-A=-3.14.30 (-4.14.24)$; $-B=-2.8.12 (-3.8.10)$; $-C=-2.6.8 (-2.6.8)$; $-D=-2.5.6 (-2.4.4)$; $-E=-2.4.4 (-2.3.2)$; $-F=+3.12.24 (+3.6.8)$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	ABCDEF	k
1	0	-C	-E	-E	-C	-C	-C	-E	-C	-C	+F	+F	-A	-A	+F	+F	+F	-A	-A	+F	406036	1
2		0	-C	-E	-E	-C	-C	-C	-E	-C	+F	+F	+F	-A	-A	+F	+F	+F	-A	-A	406036	1
3			0	-C	-E	-C	-C	-C	-E	-C	-A	+F	+F	+F	-A	-A	+F	+F	+F	-A	406036	1
4				0	-C	-E	-C	-C	-C	-C	-A	-A	+F	+F	+F	-A	-A	+F	+F	+F	406036	1
5					0	-C	-E	-C	-C	-C	+F	-A	-A	+F	+F	+F	-A	-A	+F	+F	406036	1
6						0	-E	-C	-C	-E	+F	+F	-A	+F	-A	+F	+F	-A	+F	-A	406036	1
7							0	-E	-C	-C	-A	+F	+F	-A	+F	-A	+F	+F	-A	+F	406036	1
8								0	-E	-C	+F	-A	+F	+F	-A	+F	-A	+F	+F	-A	406036	1
9									0	-E	-A	+F	-A	+F	+F	-A	+F	-A	+F	+F	406036	1
10										0	+F	-A	+F	-A	+F	+F	-A	+F	-A	+F	406036	1
11											0	-D	-D	-D	-D	-B	-D	-D	-D	-D	410806	2
12												0	-D	-D	-D	-D	-B	-D	-D	-D	410806	2
13													0	-D	-D	-D	-D	-B	-D	-D	410806	2
14														0	-D	-D	-D	-D	-B	-D	410806	2
15															0	-D	-D	-D	-D	-B	410806	2
16																0	-D	-D	-D	-D	410806	2
17																	0	-D	-D	-D	410806	2
18																		0	-D	-D	410806	2
19																			0	-D	410806	2
20																				0	410806	2

Kommentaari: a) Graafide G^{TIT20} ja G^{FOLK20} binaartunnused on erinevad kuid kaas(-)graafide arv on võrdne. b) Graafis G^{TIT20} on graafi G^{FOLK20} Peterseni (kaas)graafi ja selle täiendi kohal, st osamaatriksis $W_{2,2}$, üks (+)sümmeetriline 8-valentne kaas(-)graaf G^{TIT20}_{n-D} ja selle täiend viie 2-klkilise komponendi näol esindatud. c) Kahealuseline (+)sümmeetrilise graaf G^{TIT20} ise ja selle täiend on esindatud osamaatriks $W_{1,2}$.

Näide 29b. Titovi graafi G^{TIT20} osamaatriksi $W_{I,I}$ baasil saadava kaasgraafi G^{TIT20}_{n-E} tunnusmaatriks W^{**} .

Binaartunnused: $-A=-2.3.2$ ja $+B=+4.10.15$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	AB	k
1	0	-A	+B	+B	-A	-A	-A	+B	-A	-A	63	1
2		0	-A	+B	+B	-A	-A	-A	+B	-A	63	1
3			0	-A	+B	-A	-A	-A	-A	+B	63	1
4				0	-A	+B	-A	-A	-A	-A	63	1
5					0	-A	+B	-A	-A	-A	63	1
6						0	+B	-A	-A	+B	63	1
7							0	+B	-A	-A	63	1
8								0	+B	-A	63	1
9									0	+B	63	1
10										0	63	1

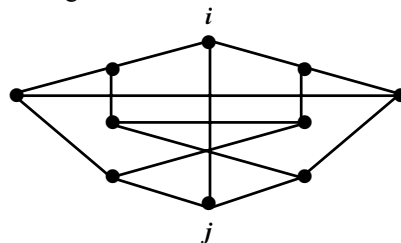
Kommentaari: Graafi G^{TIT20} osamaatriksi $W_{I,I}$ baasil saadav kaasgraaf $G^{TIT20}_{n-E} = G^{PET}$ on **Peterseni graaf** (me tunneme selle ära tunnuse $+4.10.15$ põhjal). **d)** Samas on ka selle täiend kaasgraafi G^{TIT29}_{n-C} näol esindatud.

Huvitavaid tulemusi annab ka kaasgraafide edasine uurimine, kuid piirdume esitatud tunnusmaatriksist väljaloetuga.

Otsustus 30. Erinevate kahealuseliste kooskõlastamatute graafide üheks kaasgraafiks G_n võib osutada Peterseni graaf G^{PET} . Kaasgraafide analüüsimine on tarvilik.

2.2. Peterseni fenomenist

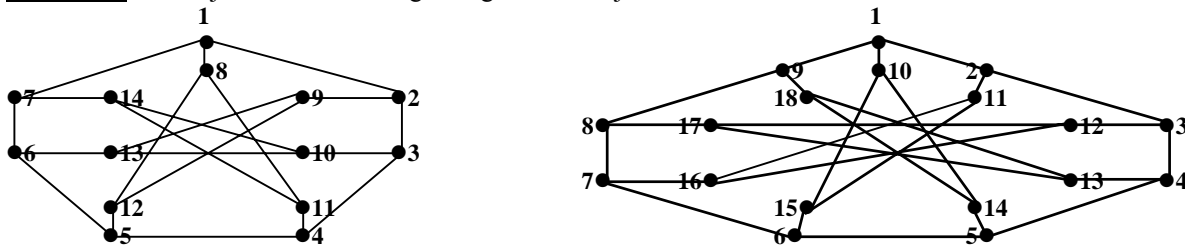
Näide 30. Peterseni graafi G^{PET} "binaarfiguur".



Kommentaari: Ilma Peterseni graafi klassikalise "spikri" abita on tema binaarfiguurina kujutamine raskendatud.

Tegime katseid konstrueerida 14- ja 18-tipulisi (st 7- ja 9-"nurkseid" ehk –"tsüklilisi) Peterseni graafide analooge mida siin "pseudopetersenlikeks" graafideks nimetame. Katsed andsid järgmisi tulemusi.

Näide 31a. Üks 7- ja üks 9-"nurkne" graaffiguur G^{PSEU7} ja G^{PSEU9} .



Näide 31b. Graafide G^{PSEU7} ja G^{PSEU9} binaartunnused w_{ij} ja tunnusmaatriksid W^{**} .

$$G^{PSEU7}: -A=-3.6.6; -B=-3.4.3; -C=-2.3.2; +D=+4.5.5; +E=+4.8.9.$$

$$G^{PSEU9}: -A=-4.8.9; -B=-3.4.3; -C=-2.3.2; +D=+4.5.5; +E=+4.8.9.$$

i	8	9	10	11	12	13	14	1	2	3	4	5	6	7	ABCDE	k
8	0	-C	-B	+E	+E	-B	-C	+E	-C	-A	-C	-C	-A	-C	22603	1
9		0	-C	-B	+E	+E	-B	-C	+E	-C	-A	-C	-C	-A	22603	1
10			0	-C	-B	+E	+E	-A	-C	+E	-C	-A	-C	-C	22603	1
11				0	-C	-B	+E	-C	-A	-C	+E	-C	-A	-C	22603	1
12					0	-C	-B	-C	-C	-A	-C	+E	-C	-A	22603	1
13						0	-C	-A	-C	-C	-A	-C	+E	-C	22603	1
14							0	-C	-A	-C	-C	-A	-C	+E	22603	1
1								0	+D	-C	-A	-A	-C	+D	40621	2
2									0	+D	-C	-A	-A	C	40621	2
3										0	+D	-C	-A	-A	40621	2
4											0	+D	-C	-A	40621	2
5												0	+D	-C	40621	2
6													0	+D	40621	2
7														0	40621	2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	ABCDE	k
1	0	+D	-C	-B	-B	-B	-B	-C	+D	+E	-C	-B	-B	-C	-C	-B	-B	-C	08621	1
2		0	+D	-C	-B	-B	-B	-C	-C	-C	+E	-C	-B	-B	-C	-C	-B	-B	08621	1
3			0	+D	-C	-B	-B	-B	-B	-B	-C	+E	-C	-B	-B	-C	-C	-C	08621	1
4				0	+D	-C	-B	-B	-B	-B	-B	-C	+E	-C	-B	-B	-C	-C	08621	1
5					0	+D	-C	-B	-B	-C	-B	-B	-C	+E	-C	-B	-B	-C	08621	1
6						0	+D	-C	-B	-C	-C	-B	-B	-C	+E	-C	-B	-B	08621	1
7							0	+D	-C	-B	-C	-C	-B	-B	-C	+E	-C	-B	08621	1
8								0	+D	-B	-B	-C	-C	-B	-B	-C	+E	-C	08621	1
9									0	-C	-B	-B	-C	-C	-B	-B	-C	+E	08621	1
10										0	-C	-A	-B	+E	+E	-B	-A	-C	26603	2
11											0	-C	-A	-B	+E	+E	-B	-A	26603	2
12												0	-C	-A	-B	+E	+E	-B	26603	2
13													0	-C	-A	-B	+E	+E	26603	2
14														0	-C	-A	-B	+E	26603	2
15															0	-C	-A	-B	26603	2
16																0	-C	-A	26603	2
17																	0	-C	26603	2
18																		0	26603	2

Kommentaariid: a) Saadud graafid ei ole duaalsümmeetrilised (nagu seda on G^{PET}) ega (+)sümmeetrilised ega ka tippudest sümmeetrilised, kuid Peterseni ringid $d+l=5$ säiluvad. b) Graafide G^{PSEU7} ja G^{PSEU9} struktuurid on sarnased, seda iseloomustavad nende sarnased binaartunnused. c) Nii graafi G^{PSEU7} kui ka graafi G^{PSEU9} kaas(+)graaf $G^{PSEU_{n:+D}}$ kujutab selle “välis-“ ja $G^{PSEU_{n:+E}}$ kujutab selle “siseringi”. d) Seega 7-ringe ega 9-ringe ei õnnestunud konstrueerida.

Otsustus 31. Peterseni graafi analoogid G^{PSEU} säilitavad Peterseni ringid pikkusega $d+l=5$.

Näide 32. Graafi G^{PSEU7} kaasgraafide $G^{PSEU7_{n:-A}}$ ja $G^{PSEU7_{n:+D}}$ binaartunnused ja tunnusmaatriksid W^{**} .

Kaasgraafi $G^{PSEU7_{n:-A}}$ binaartunnused: $-A=-4.8.9$, $-B=-4.5.4$, $-C=-3.4.3$, $-D=-2.3.2$, $+E=+2.3.3$.

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	ABCDE	k
1	0	-D	-C	+E	+E	-C	-D	-A	-D	+E	-C	-C	+E	-D	10444	1
2		0	-D	-C	+E	+E	-C	-D	-A	-D	+E	-C	-C	+E	10444	1
3			0	-D	-C	+E	+E	+E	-D	-A	-D	+E	-C	-C	10444	1
4				0	-D	-C	+E	-C	+E	-D	-A	-D	+E	-C	10444	1
5					0	-D	-C	-C	-C	+E	-D	-A	-D	+E	10444	1
6						0	-D	+E	-C	-C	+E	-D	-A	-D	10444	1
7							0	-D	+E	-C	-C	+E	-D	-A	10444	1
8								0	-C	-B	-D	-D	-B	-C	12442	2
9									0	-C	-B	-D	-D	-B	12442	2
10										0	-C	-B	-D	-D	12442	2
11											0	-C	-B	-D	12442	2
12												0	-C	-B	12442	2
13													0	-C	12442	2
14														0	12442	2

Kaasgraafi $G^{PSEU7}_{n:+D}$ binaartunnused: $-A=-3.4.3$, $B=-2.3.2$, $C=+6.7.7$

i	1	2	3	4	5	6	7	ABC	k
1	0	+C	-B	-A	-A	-B	+C	222	1
2		0	+C	-B	-A	-A	-B	222	1
3			0	+C	-B	-A	-A	222	1
4				0	+C	-B	-A	222	1
5					0	+C	-B	222	1
6						0	+C	222	1
7							0	222	1

Kommentaariid: a) Kaasgraafi $G^{PSEU7}_{n:-A}$ sümmeetria järgib originaali G^{PSEU7} sümmeetriat selles, et mõlemal on kaks tipuorbiiti ja 9 binaarorbiiti, igas osamaatriksis kolm. b) Põhiline erinevus: G^{PSEU7} on regulaarne 3-valentne, selle kaasgraaf $G^{PSEU7}_{n:-A}$ on mitteregulaarne, 2- ja 4-valentne, kuid (+)-sümmeetriline. d) Kaasgraaf $G^{PSEU7}_{n:-B}$ (ei ole esitatud) on nelja tipuorbiidiga ebasümmeetriline regulaarne 2-valentne graaf. e) Kaasgraaf $G^{PSEU7}_{n:-C}$ (ei ole esitatud) on kahe tipuorbiidi ja paljude binaarorbiitidega 6-valentne regulaarne graaf. f) Kaas(+)-graaf $G^{PSEU7}_{n:+D}$ kujutab endast G^{PSEU7} 7-tipulist välisringi ning on (+)-sümmeetriline. g) Kaasgraaf $G^{PSEU7}_{n:+E}$ (ei ole esitatud) kujutab endast 7-tipulist siseringi koos rippuvate välisringi tippudega 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7 ning ei ole sümmeetriline.

2.3. Binaartunnuste täielikkusest

Binaartunnustel on oluline roll graafi sümmeetriaklasside tuvastamisel. Nende *täielikkus* on saavutatav mitmesuguste süvaidentifitseerimise võtetega (vt algoritm 7). Vaatleme nõ esmaseid binaartunnuseid eesmärgiga välja selgitada, missugustel tingimustel on binaartunnused binaargraafi täielikud invariandid. Vastavalt definitsioonile 4 määrab binaartunnus $\pm d.n.q_{ij}$: a) binaargraafi g_{ij} moodustavate tippude naabruse (+) või "mittenaabruse" (-); b) moodustavate tippude vahelise kauguse $-d$ või kolateraalse kauguse $+d$; c) binaargraafi tippude arvu n ; d) binaargraafi servade arvu q .

Otsustused 32. Binaargraafide täielikkusest:

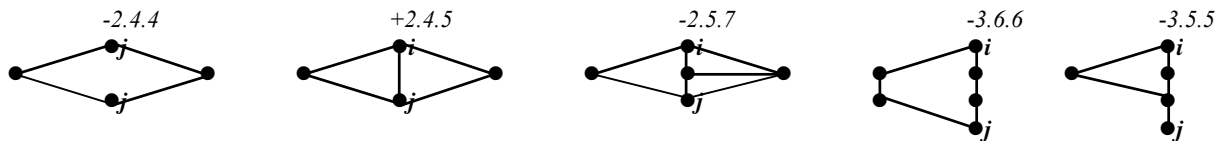
O32.1. Kui binaargraafi g_{ij} servade suvaline, kuid pikkust d säilitav ümberpaigutus ei muuda tema struktuuri või märki, siis on esmane binaartunnus $\pm d.n.q_{ij}$ oma binaargraafi *täielik invariant*.

O32.2. Kui graafi iga binaar(+)-tunnuse $d.n.q$ puhul $n=|V|$ (st graafi tippude arvuga) ja $q=|E|$ (st graafi servade arvuga), siis kattuvad selle kõik binaar(+)-graafid graafi endaga, kus $d+1$ näitab graafisüste ringide (tsüklite) pikkust. Sel juhul on binaar(+)-tunnus graafi *täielik invariant*, sest vastava binaargraafi tippudevahelisi servi iseloomustavad täpselt samasugused binaargraafid ja nende binaartunnused.

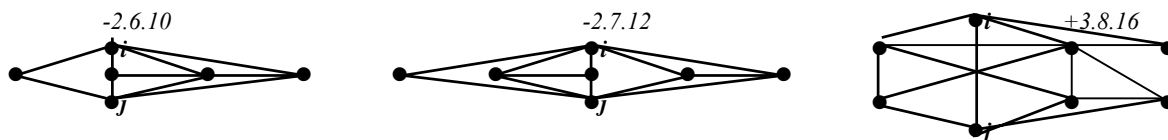
O32.3. Kui duaalsümmeetrilise graafi binaar(+)-tunnuse n ja q võrduvad vastavalt duaalsümmeetrilise graafi tippude arvu $|V|$ ja servade arvu $|E|$ mingi osaga ja binaar(-)-tunnus $-d=-0$, siis koosneb duaalsümmeetriline graaf mitmest ühesugusest komponendist.

Kommentaariid: Täielikud invariandid on näiteks *Peterseni tunnus* $+4.10.15$ ja *Heawood'i tunnus* $+5.14.21$.

Näide 33a. Binaargraafe, millede binaartunnused on *täielikud* invariandid:



Näide 33b. Binaargraafe, millede binaartunnused on *mittetäielikud* invariandid:



2.4. Jääkgraaf ja selle rakendus

Vaatleme lähemalt piirjuhtu, kus kahe 40-tipulise *tugevalt regulaarse duaalsümmeetrilise graafi* G^{NET}_A ja G^{NET}_B [Netshepurenko jt 1990] puhul kus mõlema binaar(+)-orbiit moodustub 4-klikke kujutavate binaar(+)-graafide isomorfismiklassi $+g_n$ baasil (tunnus $w_{ij}=+2.4.6$) ja mõlema binaar(-)-orbiit binaar(-)-graafide isomorfismiklassi $-g_n$ (tunnus $w_{ij}=-2.6.8$) on samuti täielik invariant. Mõlema graafi duaalsümmeetrias kahtlust ei ole. Eelnevalt paar selgitust.

Definitsioon 18. Graafi G_{ij} , mis saadakse binaargraafi g_{ij} eemaldamisel graafist G nii, et säilivad seda moodustavad tipud v_i ja v_j , $G_{ij}=(G-g_{ij})\cup(v_i\&v_j)$ nimetame *jääkgraafiks*.

Otsustused 33. Jääkgraafide kohta:

O33.1. Jääkgraafi G_{ij} baasil saadud binaargraaf kujutab endast *teist järku binaargraafi* $g_{ij}^{m=2}$ ja selle binaartunnus *teist järku binaartunnust* $w_{ij}^{m=2}$. Graafist G teist järku binaargraafi $g_{ij}^{m=2}$ eemaldamisel saadud jääkgraaf kujutab endast *teist järku jääkgraafi* $G_{ij}^{m=2}$, mille binaargraafid on *kolmandat järku binaargraafid* $g_{ij}^{m=3}$ jne.

O33.2. Jääkgraafi $G_{ij}^m=(G-g_{ij}^m)\cup(v_i\&v_j)$ kõrgemat järku binaargraaf g_{ij}^{m+1} , milles on eemaldatud seda moodustavad tipud v_i ja v_j , kujutab endast *binaargraafi tuuma* g_{ij}^{mc}

Kommentaariid: **a)** Põhimõtteliselt võib identifitseerimisfunktsioon (vt algoritm 1) olla konstrueeritud nii, et see identifitseerib ka kõrgemat järku binaartunnuse. **b)** Kõrgemat järku binaargraafide saamine on kiiresti koonduv, seni ei ole leidunud graafi, mille binaargraafide järk on suurem kui $m=3$. **c)** Küsimus on, kas graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B struktuurid on identsed või mitte. Selleks tuleb võrrelda kumbagi graafi *kõrgemat järku binaargraafe* (vt. algoritm 3 ja näide 14).

Graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B puhul saame mõlemale teist järku binaartunnused $+w_{ij}^{m=2}=+3.20.64$ ja $-w_{ij}^{m=2}=-3.18.48$. Ka nende tunnuste baasil ei ole graafide struktuurid eristatavad. Kolmandat järku binaargraaf $g_{ij}^{m=3}$ ei teki, see osutub tühjaks \emptyset . Kuna saadud binaartunnused $w_{ij}^{m=2}$ on mittetäielikud invariantid tuleb tuvastada graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B teist järku binaargraafide $g_{ij}^{m=2}$ struktuur, st moodustada nende *lokaalsed tunnusmaatriksid* $W_{ij}^{m=2}$. Selleks valime mõlemast graafist ühe suvalise teist järku binaargraafi, olgu need $g_{1-6}^{m=2}\subset G^{NET}_A$ ja $g_{20-22}^{m=2}\subset G^{NET}_B$.

Näide 34a. Teist järku binaargraafi $g_{1-6}^{m=2}\subset G^{NET}_A$ binaartunnused ja tunnusmaatriks $W_{ij}^{NET,m=2}_A$:

Binaartunnused $-A=-2.6.8$; $-B=-2.4.4$; $-C=-2.3.2$; $+D=+2.4.6$; $+E=+3.12.28$; $+F=+3.20.64$.

i	4	9	10	11	16	20	21	23	27	28	30	32	33	34	35	36	37	40	1	6	ABCDF	k
4	0	-C	-B	-B	-B	-C	-A	+E	-D	-A	+E	-D	-C	-B	-B	-C	-B	+E	-A	-D	364330	1
9		0	-B	-B	-B	-A	-C	-B	-C	-D	-B	-A	-C	+E	+E	-D	+E	-B	-A	-D	364330	1
10			0	-A	-A	-B	-B	-C	+E	-B	-C	-B	+E	-C	-D	+E	-C	-D	-D	-A	364330	1
11				0	-A	-B	-B	-C	+E	-B	-D	-B	+E	-D	-C	+E	-C	-C	-D	-A	364330	1
16					0	-B	-B	-D	+E	-B	-C	-B	+E	-C	-C	+E	-D	-C	-D	-A	364330	1
20						0	-D	-B	-C	-C	-B	-A	-D	+E	+E	-C	+E	-B	-A	-D	364330	1
21							0	+E	-C	-A	+E	-C	-D	-B	-B	-C	-B	+E	-A	-D	364330	1
23								0	-B	+E	-A	-B	-B	-C	-C	-B	-D	-A	-D	-A	364330	1
27									0	-C	-B	-D	-A	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-D	364330	1
28										0	+E	-C	-C	-B	-B	-D	-B	+E	-A	-D	364330	1
30											0	-B	-B	-D	-C	-B	-C	-A	-D	-A	364330	1
32												0	-C	+E	+E	-C	+E	-B	-A	-D	364330	1
33													0	-B	-B	-A	-B	-B	-A	-D	364330	1
34														0	-A	-B	-A	-C	-D	-A	364330	1
35															0	-B	-A	-D	-D	-A	364330	1
36																0	-B	-B	-A	-D	364330	1
37																	0	-C	-D	-A	364330	1
40																		0	-D	-A	364330	1
1																			0	+F	900901	2
6																				0	900901	2

Näide 34b. Teist järku binaargraafi $g_{20-22}^{m=2} \subset G^{NET}_B$ binaartunnused ja tunnusmaatriks $W_{ij}^{NET, m=2}_B$:

Binaartunnused: $-A=-2.6.8$; $-B=-2.4.4$; $+C=+2.4.6$; $+D=+3.12.24$; $+E=+3.20.64$.

<i>i</i>	1	2	5	7	8	9	11	14	15	18	25	27	29	32	33	35	39	40	20	22	ABCDE	<i>k</i>
1	0	+C	B	-B	-B	-B	-B	-B	-B	-B	-B	-B	+D	-B	+C	-B	+D	+D	-A	+C	1.12.330	1
2		0	B	-B	+D	-B	-B	-B	+D	-B	-B	+D	-B	-B	+C	-B	-B	-B	-A	+C	1.12.330	1
5			0	+D	-B	-B	-B	+C	-B	-B	+C	+D	-B	-B	-B	-B	-B	+D	-A	+C	1.12.330	1
7				0	-B	-B	-B	-B	+C	-B	-B	-B	-B	+D	+D	-B	+C	-B	+C	-A	1.12.330	1
8					0	+C	-B	+D	-B	-B	-B	-B	-B	+D	-B	-B	-B	+C	+C	-A	1.12.330	1
9						0	+D	-B	-B	-B	+D	-B	-B	-B	+D	-B	-B	+C	+C	-A	1.12.330	1
11							0	-B	-B	-B	-B	+D	-B	+C	-B	+C	+D	-B	-A	+C	1.12.330	1
14								0	-B	+C	+D	-B	-B	-B	-B	-B	+D	-B	-A	+C	1.12.330	1
15									0	-B	+D	-B	-B	-B	-B	+D	+C	-B	+C	-A	1.12.330	1
18										0	-B	+C	+C	-B	+D	+D	-B	-B	+C	-A	1.12.330	1
25											0	-B	+D	-B	-B	-B	-B	-B	-A	+C	1.12.330	1
27												0	+C	-B	-B	-B	-B	-B	+C	-A	1.12.330	1
29													0	+D	-B	-B	-B	-B	+C	-A	1.12.330	1
32														0	-B	+C	-B	-B	-A	+C	1.12.330	1
33															0	-B	-B	-B	-A	+C	1.12.330	1
35																0	-B	+D	-A	+C	1.12.330	1
39																	0	-B	+C	-A	1.12.330	1
40																		0	+C	-A	1.12.330	1
20																			0	+E	90901	2
22																				0	90901	2

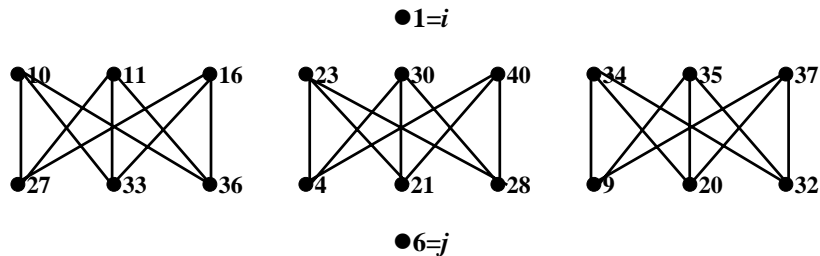
Kommentaariid: a) Struktuuride erinevust iseloomustab eelkõige erinevate tunnuste, st binaarorbiitide arvu, erinevus. b) Saadud struktuurid ei ole duaal-, (+)- ega (-)-sümmeetrilised, need on *lokaalsümmeetrilised*. c) Ka kõrgemat järku binaargraafidele võib moodustada kaasgraafe, millede abil võib struktuuri uurida soovitava tasemeni (sügavuseni). d) Näites 14 esitatud $\max w_{ij}^{deep}$ on võetud $g_{ij}^{NET, m=2}$ tuuma (vt otsustus 34.2) esitavast tunnusmaatriksist W_{ij} .

Teist järku binaargraafide $g_{1-6}^{m=2} \subset G^{NET}_A$ ja $g_{20-22}^{m=2} \subset G^{NET}_B$ binaartunnus on $+3.20.64$, mis tähendab et kumbki koosneb 20 tipust ja 64 servast ning *i* ja *j* vaheline kolateraalne kaugus $+d=3$.

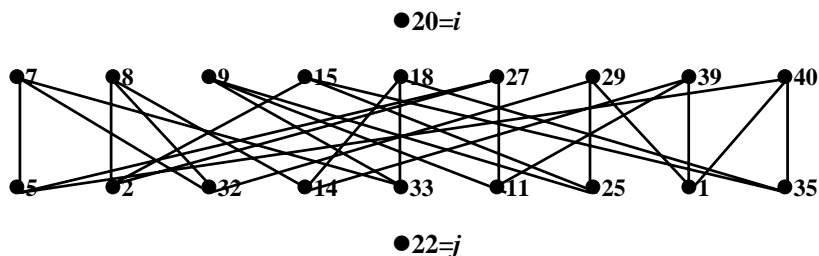
Näide 34c. Teist järku binaargraafide $g_{1-6}^{m=2} \subset G^{NET}_A$ ja $g_{20-22}^{m=2} \subset G^{NET}_B$ võrdlev tabel ja nende tuumade “figuurid”:

<i>i</i>	1	20
<i>i</i> -4klikid	1, 10, 35, 40; 1, 16, 23, 37; 1, 11, 30, 34.	20, 8, 9, 40; 20, 7, 15, 39; 20, 18, 27, 29.
<i>i</i> -4klikkide tunnus	+2.4.6	+2.4.6
Tunnus <i>i</i> -4kliki ja <i>j</i> -4kliki tippude vahel	+3.12.28	+3.12.24
<i>j</i> -4klikkide tunnus	+2.4.6	+2.4.6
<i>j</i> -4klikid	6, 4, 27, 32; 6, 9, 28, 36; 6, 20, 21, 33.	22, 11, 32, 35; 22, 5, 14, 25; 22, 1, 2, 33.
<i>j</i>	6	22

$g_{1-6}^{m=2} \subset G^{NET}_A$ tuuma “figuur”:



$g_{20-22}^{m=2} \subset G^{NET}_B$ tuuma “figuur”:



Kommentaariid: **a)** Tabelist näeme, et erinevus teist järku binaargraafide $g_{1-6}^{m=2} \subset G^{NET}_A$ ja $g_{20-22}^{m=2} \subset G^{NET}_B$ vahel seisneb ainult tasemetevaheliste servade binaartunnustes vastavalt +3.12.28 ja +3.12.24, mis tundub võibolla “tühisena”. Tuuma “pildid” on seevastu drastiliselt erinevad, ei ole mingit mõtet nendes mingit isomorfismi otsima hakata. **b)** Näide iseloomustab ka binaartunnuste tähendust ja tähtsust. **c)** Esitatud tuum ilmestab graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B struktuuri erinevust. **d)** Nii graafis G^{NET}_A kui ka graafis G^{NET}_B on 240 sellist isomorfset teist järku binaargraafi $g_{ij}^{m=2}$, mille klass (isomorfismiklass) moodustab nende ainukese binaar(+)-orbiidi. Samasugune lugu on ka nende ainukese binaar(-)-orbiidiga. **e)** Graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B tipunimekirjad on esitatud varasemas teavikus [vt Tevet 2002], Netshepurenko’s [1990] endas on näpuvigu.

Otsustus 34. Tugevalt regulaarsete duaalsümmeetriliste graafide struktuuride erinevus on tuvastatav ja süvaanalüüs on teostatav nende kõrgemat järku binaargraafide tasemel.

2.5. Mäng Mathoni graafidel

Süvaanalüüs on mõttekas ka mõnede teiste graafitüüpide puhul. Näites 15 esitatud Mathoni [1980] kahealuseliste graafide G^{MAT25A} ja G^{MAT25B} struktuur on tuvastatud vastava süvaidentifitseerimise funktsiooni abil (vt algoritm 7.3). Vaatleme graafi G^{MAT25A} lähemalt.

Näide 35a. Graafi G^{MAT25A} binaartunnused ja fragment tunnusmaatriksist W :

Binaartunnused: $-A = -3.12.18$; $-B = -2.4.4$; $-C = -2.3.2$; $D = +3.8.10$

i	11	12	13	14	...	23	24	25	1	2	3	...	8	9	10	ABCD	k
11	0	-B	-B	-B	...	-C	-C	-C	+D	+D	+D	...	-A	-A	-A	6684	1
12		0	-B	-C	...	-C	-B	-C	+D	+D	-A	...	-A	-A	-A	6684	1
13			0	-C	...	-B	-C	-B	+D	-A	+D	...	-A	-A	-A	6684	1
14				0	...	-C	-B	-B	+D	-A	-A	...	+D	+D	-A	6684	1
...															
23						0	-C	-B	-A	-A	+D	...	+D	-A	-A	6684	1
24							0	-B	-A	-A	-A	...	-A	+D	-A	6684	1
25								0	-A	-A	-A	...	+D	-A	-A	6684	1
1									0	-B	-B	...	-B	-B	-B	9906	2
2										0	-B	...	-B	-B	-B	9906	2
3											0	...	-B	-B	-B	9906	2
...															
8													0	-B	-B	9906	2
9														0	-B	9906	2
10															0	9906	2

Kommentaariid: **a)** Tunnusmaatriksi W järgi näib G^{MAT25A} (+)sümmeetriline olevat nagu kahealuselised G^{FOLK20} ja G^{PET20} (näide 29a). Kas see nii on? **b)** Kaasgraafid $G^{MAT25A}_{n:-A}$, $G^{MAT25A}_{n:-B}$ ja $G^{MAT25A}_{n:-C}$ järgivad samasugust olekut ega anna täiendavat klassijaotust. **c)** Tunnus $+D = +3.8.10$ on täielik invariant ja binaargraafide erinevusi ei saa olla. **d)** Tunnus $-A = -3.12.18$ ei ole küll täielik invariant, kuid kõik selle binaargraafid osutuvad isomorfseteks. **e)** Kuid millised on tunnusega $-A$ märgistatud teist järku binaargraafid $g_{ij}^{MAT25A, m=2}_{-A}$? Selgub, et need on tühjad $g_{ij}^{MAT25A, m=2}_{-A} = \emptyset$! **f)** Eksisteerivad siiski vastavad jääkgraafi $G_{ij}^{MAT25A, m=1}_{-A}$ tuumad. **g)** Graafi G^{MAT25A} jääkgraafi $G_{ij}^{MAT25A, m=1}_{-A}$ tuum on see osa 25-tipulisest graafist G^{MAT25A} , mis jääb alles pärast 12-tipulise binaargraafi g_{ij-A} eemaldamist.

Näide 35b. Graafi G^{MAT25A} jääkgraafi-tuumade $G_{1-17}^{MAT25A,m=1}_{-A}$ ja $G_{6-14}^{MAT25A,m=1}_{-A}$ binaartunnused ja tunnusmaatriksid W :
 $G_{1-17}^{MAT25A,m=1}_{-A}$ binaartunnused: $-A=-4.10.12$; $-B=-3.9.12$; $-C=-3.8.10$; $-D=-3.6.6$; $-E=-2.4.4$; $-F=-2.3.2$; $+G=+3.4.4$; $+H=+3.6.7$.

i	4	18	21	24	25	5	6	7	10	19	20	22	23	ABCDEFGH	k
4	0	+H	+H	+H	+H	-E	-E	-E	-E	-C	-C	-C	-C	00404004	1
18		0	-E	-F	-E	-B	-B	+G	+G	-F	-F	-F	-F	02002521	2
21			0	-E	-F	-B	+G	-B	+G	-F	-F	-F	-F	02002521	2
24				0	-E	+G	+G	-B	-B	-F	-F	-F	-F	02002521	2
25					0	+G	-B	+G	-B	-F	-F	-F	-F	02002521	2
5						0	-F	-F	-E	+G	-D	+G	-D	02022240	3
6							0	-E	-F	-D	+G	-D	+G	02022240	3
7								0	-F	-D	+G	-D	+G	02022240	3
10									0	+G	-D	+G	-D	02022240	3
19										0	-A	-E	-A	20121420	4
20											0	-A	-E	20121420	4
22												0	-A	20121420	4
23													0	20121420	4

$G_{6-14}^{MAT25A,m=1}_{-A}$ binaartunnused: $-A=-4.10.13$; $-B=-3.9.12$; $-C=-3.9.11$; $-D=-3.8.10$; $-E=-3.7.8$; $-F=-3.6.7$; $-G=-3.6.6$; $-H=-2.4.4$; $-I=-2.3.2$; $+J=+3.4.4$; $+K=+3.6.7$.

i	5	10	13	18	2	3	19	22	7	11	17	16	25	ABCDEFGHIJK	k
5	0	-H	+K	-B	-I	-H	+J	+K	-H	-E	-E	-D	+J	01012003122	1
10		0	-B	+K	-H	-I	+K	+J	-H	-E	-E	+J	-D	01012003122	1
13			0	-I	-C	+J	-I	-H	+J	-I	-I	-I	-H	01100002521	2
18				0	+J	-C	-H	-I	+J	-I	-I	-H	-I	01100002521	2
2					0	-H	+J	-B	-I	+J	+J	-F	-G	01100112240	3
3						0	-B	+J	-I	+J	+J	-G	-F	01100112240	3
19							0	-H	-B	-I	-I	-I	-I	02000002521	4
22								0	-B	-I	-I	-I	-I	02000002521	4
7									0	-G	-G	+J	+J	02000022240	5
11										0	-H	-A	-A	20002011420	6
17											0	-A	-A	20002011420	6
16												0	-I	20010111420	7
25													0	20010111420	7

Kommentaariid: a) Graafi G^{MAT25A} tunnusega $-A=-3.12.18$ märgistatud tipupaarid jagunevad kaheks (tõepoolest vaid kaheks!). b) Tipupaarid, mille jääkgraafi-tuumadel on 4 tipuorbiiti tähistagem $-A1=-3.12.18.1$ ja mille tuumadel on 7 tipuorbiiti tähistagem $-A2=-3.12.18.2$, st lisame neljanda tunnuse. c) Täiendatud binaartunnustega tunnusmaatriks W korrastatakse (vt algortim 2) täielikuks tunnusmaatriksiks W^{**} , nii nagu see on esitatud näites 15. d) Esitatu on lihtsalt üks süvaanalüüsi näide, samale tulemusel sama graafi G^{MAT25A} juures võib tulla suvalisel teel. e) Näiteks, täpselt samad tunnusmaatriksid $W_{1,17}$ ja $W_{6,14}$ saame kaasgraafi $G^{MAT25A}_{n:A}$ esimest järku binaargraafide $g_{1,17}$ ja $g_{6,14}$ baasil. f) Antud juhul meie ei analüüsinud graafis G^{MAT25A} kahtlust tekitanud (+)sümmeetriat esitanud tunnust $+D=+3.8.10$ ennast, kuid saime õige tulemuse – selle, et (+)sümmeetriat ei esine, sest tunnuse $+D$ baasil on moodustunud kolm binaar(+)orbiiti – ja seda hoopis tunnuste $-A1$ ja $-A2$ alusel. Tunnusmaatriksi korrastamisfunktsioon (algoritm 2) ajab asja joonde. g) Graaf G^{MAT25A} ning selle jääkgraafi-tuumad $G_{ij}^{MAT25A,m=1}_{-A1}$ ja $G_{ij}^{MAT25A,m=1}_{-A2}$ on lokaalsümmeetrilised.

Siin võiks küsida: Kuidas nii, orbiidiaksoomi (aksioom 3) järgi vastab binaarorbiit ΩR_n binaargraafide isomorfismiklassile g_n , tunnus $+D=+3.8.10$ on ju täielik invariant ja vastavad binaargraafid peaksid moodustama ühe binaarorbiidi, mitte kolm. Vastus: Esiteks, kui me oleksime lahanud tunnust $+D$ ennast, siis oleksime lahknevused tabanud samuti tema kõrgemat järku binaargraafide puhul. Teiseks, vastavalt otsustusele 3 määrab binaarorbiidi see isomorfismiklass, mille tunnused on fikseeritud ühes kindlas osamaatriksis $W_{ki,kj}$.

Otsustused 35. Esimest ja teist järku binaargraafide ning jääkgraafide seotusest binaartunnuste klassi W_n ja kaasgraafiga G_n :

O35.1. Kui graafi G binaartunnus w_{ij} kuulub klassi W_n , siis selle kaasgraafi G_n esimest järku binaargraafi $g_{ij,n}$ tuum ühtib (langeb kokku) graafi G teist järku binaargraafi $g_{ij}^{m=2}_n$ (või jääkgraafi $G_{ij}^{m=1}_n$) tuumaga.

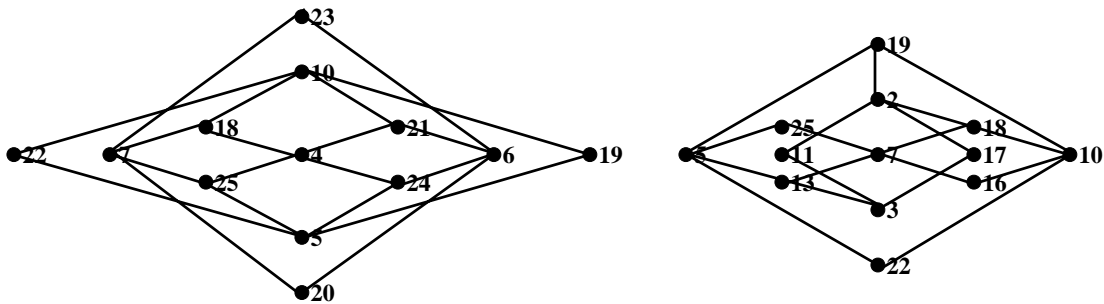
O35.2. Jääkgraafid G_{ij} võivad omada samasuguseid funktsioone kui binaargraafid g_{ij} .

O35.3. Tipupaar v_i, v_j on iseloomustatav erinevate binaargraafide ja nende tunnustega, sõltuvalt sellest kas see paar on käsitletav esimest või kõrgemat järku binaargraafi moodustavana, või kaasgraafi binaargraafina.

Kommentaari: Teatud tüüpi graafide puhul määratakse nende lõplikud (täielikud) binaartunnused süvamenetluste teel (vt algoritm 7). Seda meie siin illustreerisimegi.

Tunnusmaatriks on struktuuri tesaurus, kuid kindlasti meeldib “figuur” paljudele paremini.

Näide 36. Graafi G^{MAT25A} teist järku binaargraafide $g_{1,17}^{m=2}$ ja $g_{6,14}^{m=2}$, nendega kokkulangevate jääkgraafide $G_{1,17}^{m=1}$ ja $G_{6,14}^{m=1}$ ning kaasgraafi $G_{n:A}$ esimest järku binaargraafide $g_{1,17}$ ja $g_{6,14}$ ühised “figuurid”:



3. SÜMMEETRIATE ERAKORDSUSTEST

3.1. Sümmetria naabus

Nagu mainitud, on sümmetria juhuslike graafide hulgas väga harva esinev nähtus, iga sümmetria on erakordne. See on ajendanud paljusid erakordseid sümmetriaid sihipäraselt konstrueerima. Kui sümmetrilises graafis üks seos valesti paigutada, jätta paigutamata või juurde paigutada, siis on kogu esialgne sümmetria täielikult kadunud.

Näide 37. Struktuur, mis on saadud duaalsümmetrilise Peterseni graafile G^{PET} (vt näide 28b) juhusliku seose $e_{8,10}$ lisamisel. Selle binaartunnused ja tunnusmaatriks W^{**} .

Binaartunnused: $-A=-2.4.4$; $-B=-2.3.3$; $+C=+2.3.3$; $+D=+3.4.4$; $+E=+4.10.16$.

i	4	5	2	9	1	3	6	7	8	10	ABCDE	k	1234
4	0	-B	+E	-B	+E	-B	+E	-B	-B	-B	06003	1	1020
5		0	+E	-B	-B	+E	-B	+E	-B	-B	06003	1	1020
2			0	+E	-B	-B	-B	-B	-B	-B	06003	2	2100
9				0	-B	-B	-B	-B	+C	+C	06201	3	1002
1					0	+D	-B	-B	+D	-A	15021	4	1011
3						0	-B	-B	-A	+D	15021	4	1011
6							0	+D	-A	+D	15021	4	1011
7								0	+D	-A	15021	4	1011
8									0	+C	23220	5	0121
10										0	23220	5	0121

Kommentaari: a) Saadud struktuur ei ole enam duaalsümmetriline, see on lokaalsümmetriline, millel on 5 positsiooni- ja 16 binaarorbiiti! b) Tegemist on graafi G^{PET} naaberülemstruktuuriga $GS^{PET,upp}_n - G^{PET}$ struktuuri ühe kõige elementaarsema muutusega. c) Duaalsümmetrilisel graafil on üksainus naaberalamstruktuur $GS^{low}_{n=N=1}$ ja üksainus naaberülemstruktuur $GS^{upp}_{n=N=1}$ (otsustus 26.3) mida see täielik tunnusmaatriks W^{**} siin esitab. d) See tunnusmaatriks W^{**} esitab graafi G^{PET} kõigi 30 (niipalju on sellel graafil “mitteservi”) isomorfse naaberülemgraafi ühist struktuuri GS . e) See tähendab, et lisades graafile G^{PET} ükskõik millise suvalise serva saame ikkagi sellesama naaberülemstruktuuri $F: G^{PET} \rightarrow GS^{PET,upp}_{n=N=1}$ morfismi tõenäosusega $PF=30:30=1$. f) Analoogilise seisundi saame ka Peterseni graafist G^{PET} ühe seose eemaldamisel, st tema naaberalamstruktuuri $GS^{PET,low}_n$ puhul.

*

Toome veel ühe näite varemkäsitletud duaalsümmeetriliste graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B (vt ptk 2.4) kohta. Nende struktuuri eristamiseks kasutatakse süvaidentifitseerimist. Missugused on nende naaberstruktuurid? Eemaldame kumbagist ühe seose. Olgu see G^{NET}_A puhul $e_{1,6}$ ja G^{NET}_B puhul $e_{20,22}$.

Näide 38. Graafide G^{NET}_A ja G^{NET}_B naaberalamstruktuuride $GS^{NET,low}_A$ ja $GS^{NET,low}_B$ ühised binaartunnused (tunnusmaatrikseid endeid ei ole mõtet esitada):

$$-A=-2.6.8; -B=-2.5.6; -C=-2.4.4; +D=+2.3.3; +E=+2.4.5; +F=+2.4.6.$$

Kommentaariid: a) Tunnusmaatriksist W on väljaloetav, et naaberalamstruktuuridel on 4 positsiooni-orbiiti võimsustega vastavalt 2, 18, 18, 2. b) Vastavad u -tunnused on: 18.9.1.2.0.9, 26.1.0.0.0.12, 27.0.0.0.0.12 ja 27.0.0.1.9, millest on omakorda väljaloetav, et tunnuse $-A$ baasil moodustub 4, $-B$ baasil 2 ja $-C$ baasil 1 binaar(-)orbiit ning tunnuse $+D$ baasil moodustub 2, $+E$ baasil 1 ja $+F$ baasil 4 binaar(+)orbiiti – kokku 14 binaarorbiiti. Sama palju on ka naaberstruktuure ja kaasgraafe. c) Range duaalsümmeetria on ühe seose-operatsiooniga jäägitult kadunud, ei eksisteeri ka (-), (+)- ega polüsümmeetriat, jäi järgi vaid *lokaalsümmeetria*, mida pea et asümmeetriaks tituleerida võiks. d) Struktuurid $GS^{NET,low}_A$ ja $GS^{NET,low}_B$ on jälle kuidagi “sarnased”, kuid nende eristamine kaasgraafide abil on lihtne – need p e a v a d olema erinevad, sest need on erinevate duaalsümmeetriliste graafide naaberstruktuurid ning duaalsümmeetrilisel graafil on vaid üks naaberalamstruktuur (vt otsustus 26.2).

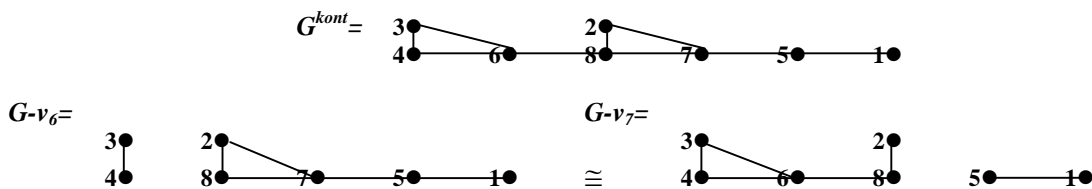
Otsustus 36. Duaalsümmeetrilise struktuuri naaberstruktuur on lokaalsümmeetriline – *sümmeetria on erakordne ja kergesti kaduv*.

Kommentaariid: Otsustus 36 kehtib ilmselt ka (-), (+)- ja polüsümmeetria kohta.

3.2. Asümmeetria naabrusest

Asümmeetriaga seotult vaatleme üht igivana kontranäidet väitele: “kui $G-v_i \cong G-v_j$, siis kuuluvad tipud v_i ja v_j ühte ja samasse orbiiti Ω ”

Näide 39a. Graaf G^{kont} ja selle isomorfsed alamgraafid $G-v_6$ ja $G-v_7$.



Kommentaariid: Struktuursest aspektist sellist küsimust tekkida ei saa. Vaatame mida näitab tunnusmaatriks.

Näide 39b. Graafi G^{kont} binaartunnused ja tunnusmaatriks W^{**} .

$$\text{Binaartunnused: } -A=-5.6.5; -4.5.4; -C=-3.4.3; -D=-2.3.2; +E=+1.2.1; +F=+2.3.3$$

i	8	7	2	6	5	3	4	1	ABCDEF	k
8	0	+F	+F	+E	-D	-D	-D	-C	001312	1
7		0	+F	-D	+E	-C	-C	-D	002212	2
2			0	-D	-C	-C	-C	-C	003202	3
6				0	-C	+F	+F	-B	011212	4
5					0	-B	-B	+E	021220	5
3						0	+F	-A	112102	6
4							0	-A	112102	6
1								0	212110	7

Kommentaari: a) Tõepoolest, tipud v_6 ja v_7 kuuluvad erinevatesse orbiitidesse ning mingit küsimust ei teki. b) Ainuke lokaalne sümmeetrijahus esineb positsiooniorbiidi $\mathcal{OR}_{k=6}$ näol, kuhu kuuluvad tipud v_3 ja v_4 – kõik klapih.

*

Vaatame kaht täisasümmeetrilise struktuuriga graafi. Täisasümmeetria on see, kui binaarorbiitide arv N võrdub tipupaaride arvuga (vt def. 15), samapalju on ka naaberstruktuure. Nägime, et sümmeetria on “kergeasti haavatav”. Meid huvitab, kas täisasümmeetria ka haavatav on, selle naaberstruktuurid peaksid olema “sümmeetrilisemad”.

Näide 40. Kaks täissümmeetrilist graafi G_A ja G_B struktuuride süsteemist $FGS^{V=6}$ (vt Tevet 1999b, kus nad kannavad järjekorranumbrit, vastavalt 76 ja 100):



Kommentaari: a) Graafid G_A ja G_B osutuvad teineteise suhtes naaberstruktuurideks:

- Kui GS_A on lähtestruktuur, siis $G_A - e_{2,6} \cong G_A - e_{3,5} \cong G_B$, mis tähendab et G_B esindab selle *naaberalamstruktuuri* GS_n^{low} , $F: GS_A \rightarrow GS_B$.
- Kui GS_B on lähtestruktuur, siis $G_B + e_{1,5} \cong G_B + e_{2,4} \cong G_A$, mis tähendab et G_A esindab selle *naaberülemstruktuuri* GS_n^{upp} , $F: GS_B \rightarrow GS_A$.

b) Kuuluvus erinevatesse binaarorbiitidesse:

- GS_A seosed $e_{2,6}$ ja $e_{3,5}$ kuuluvad vastavalt $e_{2,6} \subseteq \mathcal{OR}_{(A)n=9}$ ja $e_{3,5} \subseteq \mathcal{OR}_{(A)n=11}$.
- GS_B seosed $e_{1,5}$ ja $e_{2,4}$ kuuluvad vastavalt $e_{1,5} \subseteq \mathcal{OR}_{(B)n=4}$ ja $e_{2,4} \subseteq \mathcal{OR}_{(B)n=7}$.

Otsustus 37. Täisasümmeetrilise struktuuri GS naaberstruktuur GS_n^{adj} võib olla samuti täisasümmeetriline.

Kommentaari: Esitatud graafide G_A ja G_B ülejäänud naaberstruktuurid ei ole enam täisasümmeetrilised. Selle näite juurde tuleme tagasi siis, kui vaatleme kunagi naaberstruktuure üldiselt.

Otsustused 38. Sümmeetria üleminekute kohta:

O38.1. Täis-, duaal-, (+)-, (-)- ja polüsümmeetriliste struktuuride *naaberstruktuurid on lokaalsümmeetrilised*.

O38.2. Nende struktuuride vahel võivad eksisteerida *samm-sammulised monotoonsed üleminekud* mööda lokaalsümmeetrilisi struktuure (vt aksioom 10, algoritm 11 ja otsustused 16 – 19).

O38.3. *Eksisteerib samm-sammuline üleminek täis-, duaal-, (+)-, (-)- või polüsümmeetrilist täisasümmeetriliale.*

3.3 Sümmeetria mõõt

Sümmeetria mõõdu aluseks on klassikaline Shannoni informatsioonimahu valem, kus *binaarinfo maht HR* arvutatakse tipupaaride arvu $|R|$ ja binaarorbiitide võimsuse $\text{card} \mathcal{OR}_n$ alusel järgmise valemi kaudu:

$$HR = -\sum_{n=1}^N PF_n \log PF_n$$

kus $0 \leq PF_n = \text{card} \mathcal{OR}_n: |R| \leq 1$ ja $|R| = \lceil \log_2(|V|) \rceil$.

Siin $\min HR = 0 \leq HR \leq \log_2 |R| = \max HR$, kus, kui $N=1$, siis $HR=0$ ja kui $N=|R|$, siis $HR = \log_2 |R|$.

Kommentaari: a) *Binaar(+)-info maht HR^+* arvutatakse servade arvu $|R^+|$ ja servaorbiitide võimsuse $\text{card} \mathcal{OR}_n^+$ alusel.

b) *Binaar(-)-info maht HR^-* arvutatakse “mitteservade” arvu $|R^-|$ ja “mitteservaorbiitide” võimsuse $\text{card} \mathcal{OR}_n^-$ alusel.

Informatsioon tekib teatud *mitmekesisuse st eristatavuse* baasil. Informatsiooni maht sõltub *erinevuste hulgest*. Näiteks, kümne leheküljetäie tähe “aaaaa...” kordamisel saadav informatsiooni maht võrdub nulliga – tegemist on *ühetaolisusega*. Mingi tekst “aaabbbb” kujutab endast juba teatud mahuga infot, sest erinevust esineb. Struktuurses plaanis tähendab “ühetaoliste piirkond” orbiiti ehk sümmeetriaklassi. *Mida rohkem esineb erinevaid “ühetaoliste piirkondi” ehk sümmeetriaklasse, seda suurem on informatsiooni maht HR ja seda väiksem on “sümmeetrilisus”.*

Binaarinfo mahu HR alusel arvutatakse struktuur *binaarsümmeetrilisus* SR järgmise valemi alusel:

$$SR=1-HR:\log|R|, \text{ kus } 0\leq SR\leq 1.$$

Kommentaariid: **a)** Analoogiliselt binaarinfo mahuga võib ka *binaar(+)*sümmeetrilisust SR^+ ja *binaar(-)*sümmeetrilisust SR^- omaette arvutada, kuid meie pöördume üldise binaarsümmeetrilisusega SR . **b)** Viimase mõõdu (SR) ametlik nimi on *korrapära(sus)*.

Näide 41. Erinevate graafide infomaht HR ja binaarsümmeetrilisus SR ehk *korrapära(sus)*:

Sümmeetria tüüp	Graafi tähis	Näite nr.	HR	SR	$ V $	$ R $	N	K
Täissümmeetria	G^{TAIS}	-	0	1	suvaline	suvaline	1	1
Duaalsümmeetria	G^{NET}	ptk 2.4	0,2681	0,9073	40	780	2	1
Duaalsümmeetria	G^{PET}	29b	0,2767	0,8328	10	45	2	1
Duaalsümmeetria	G^{TIT9}	26	0,3010	0,8051	9	36	2	1
(+)sümmeetria	G^{HEAW}	27	0,4593	0,7655	14	91	3	1
(+)sümmeetria	G^{TIT20}	29a	0,6983	0,6936	20	190	6	2
(+)sümmeetria	G^{PSEU7D}	32	0,4771	0,6392	7	21	2	1
Lokaalsümmeetria	G^{TEV8}	25a	0,9526	0,3418	8	28	10	3
Polüüsümmeetria	G^{TEV24}	13	1,2308	0,0962	24	276	18	1
Täiasümmeetria	G^{AS}	40	1,4472	0	8	28	28	8

Kommentaariid: Näeme, et SR sõltub eelkõige binaarorbiitide arvust N , kusjuures *korrapärasust* mõjutab ka struktuuri maht $|V|$.

Otsustus 39. Struktuuri informatsiooniteoreetiline aspekt kinnitab, et *sümmeetria on teatud ühetaolisus, mille mõõt sõltub sümmeetriaklassi(de) arvust ja võimsus(t)est.*

KOKKUVÖTE

Nagu juba öeldud, on sümmeetria pigem *ühetaoliste kordumine* kui mingi telje ümber *peegelduv paarilisus*. Selles ühetaoliste kordumises on ühetaoliste omavaheline ümbervahetuvus pigem *suviline* kui *transitiivne*. Permutatsioonitehnikas on viimane ilmselt möödapääsmatu. Herman Weyli “Die Symmetrie” kunagist lehitsemist meenutades tundub, et ka seal taandus kogu sümmeetriakäsitus automorfismirühmadele. Kuid, nagu otsustustes 24 väitsime, langevad automorfismirühmade orbiidid kokku struktuursete sümmeetriaklassidega. Ühtsapid kosmonautikas ja teist otsapidi kombinatoorikas kasutatavat *orbiiti* sobiks struktuurset aspektist tõepoolest vaid *sümmeetriaklassiks* nimetada. Nii me kokkuvõttes toimimegi.

Veelkord “figuursusest”. Graafi on võimalik välja joonistada ka nii, et selle struktuuri (+)-sümmeetria “figuurselt” silma paistab. Kuid silmapaistmatuks jäävad ikkagi sümmeetria(-)klassid ehk “mitteservade” klassid, sest neil ei saagi olla mingit “figuuri”, kuigi need tunnusmaatriksis ilmekalt nähtavale ilmuvad. Selline “nähtava” ja “nähtamatu” koosesitamine tunnusmaatriksis tarvilik naaberülemstruktuuride (def. 6, otsustused 14 ja 15) fikseerimiseks. Pealegi käsitleme graafi ja selle täiendit tervikuna.

Sümmeetriatribuudid on omavahel rangelt seotud. Binaar- (def. 1) ja/või jääkgraafide (def. 18) isomorfismiklass indutseerib sümmeetriaklassi. Sümmeetria *mõõt* sõltub sümmeetriaklasside võimsusest ja arvust. Kõige “sümmeetrilisem” on *täissümmeetria* (def. 11), sellele järgneb *duaalsümmeetria* (def. 12), siis (+)-, (-)- ja *polüsümmeetria* (def. 13 ja 14). Neile järgneb *lokaalsümmeetriate* (def. 15) lai haare ja lõpuks *täisasümmeetria* (def. 16), mille sümmeetriaväärtus on null. **Kaasgraaf** (def. 17) on sümmeetriaklassi loomulik produkt. Binaar-, jääk- ja kaasgraafid annavad olulist teavet graafi struktuuri ja sümmeetria kohta. Selle teave “turuväärtust” siin hindama ei hakka.

Kaasgraafid tõstatavad ka terve rea seni vastamata küsimusi:

- Miks järgivad mõned kaasgraafid graafi sümmeetriat, mõned aga mitte?
- Miks taastavad mõned kõrgemat järku kaasgraafid graafi enda?
- Miks kattub kaasgraaf mõnel juhul kõrgemat järku binaargaafi ja jääkgraafiga?
- Miks viib ka “robustsete” kaasgraafide kasutamine sümmeetriaklasside tuvastamisele?
- Miks Mathoni graafide “robustsed” kaasgraafid ei vii otseselt sümmeetriaklasside tuvastamisele?
- Mis ühist on (+)sümmeetrilistel kooskõlastamata kahealustelistel graafidel duaalsümmeetriliste Peterseni graafidega, et need kaasgraafidena esile kerkivad?
- Mis ühist on (+)sümmeetrilisel Heawood’i graafil duaalsümmeetrilise kaht 7-klikilist komponenti kujutava graafiga, et see ühe kaasgraafina esile kerkib?

Jne.

Teavikus on esitatud näidete, kommentaaride ja otsustustega püütud näidata seda, **m i d a** on võimalik struktuursete vahenditega tuvastada ja **k u i d a s** seda teha. Selleks on eelkõige vaja vaid osata tunnusmaatriksit lugeda.

Kirjanduse loetelu

- Folkman, J.** Regular line-symmetric graphs – *J.Comp.Theory.* **3** (1967), N3, 215-232.
- Harary, F.** Graph Theory. *Addison-Wesley*, 1969.
- Mathon, R.** Sample graphs for isomorphism testing. – *Proc. 9th S-E. Conf. Combombinatorics, Graph Theory and Computing*, 1980, 499-517.
- Netšepurenko, M., jt.** Нечепуренко, М., и др. Алгоритмы и программы решение задач для графов и сетей. Новосибирск, 1990.
- Tevet, J.-T.** (1999b) Appendix to Structure's Semiotics: A System of Graphs, their Characteristics and Changes. *S.E.R.R., Tallinn*, 1999, 95 pp.
- (2002) Isomorphism and Reconstructions of the Graphs. A Constructive Approach and Development. *S.E.R.R., Tallinn*, 2002, 78 pp.
- (2004d) Struktuurisemiootika '04. *S.E.R.R., Tallinn*, 2004, 40 lk.
- Titov, V. Turov, B.** О симметрии в графах. *Вопросы кибернетики*, **15**, N2, 1975, 76-109.
- Weisfeiler, B.** On Construction and Identification of Graphs. – *Springer Lect. Notes Math.*, 558, 1976.
- Weyl, H.** Die Symmetrie. (?)