Julius Grüntal

MATEMAATIKA EELKURSUS

I

Algkooli aritmeetika kursuse kokkuvõtt

(käsikiri.)

Kodukeskkooli kirjastus
Tallinn, 1934.

AR-1

K o d u k e s k k o o l

Julius Grüntal

M A T E M A A T I K A E E L K U R S U S

I

Algkooli aritmeetika kursuse kokkuvõtt.

(käsikiri)

1934.

Sissejuhatuseks.

"Juhtnöörid kõigi varjatud tõdede juure pääsemiseks, ... kõigi saladuste juure, mis peidetud asjades..."

- umbes nõnda algab vanim seni tuntud matemaatiline teos, mis on kirja pandud 4000 aastat tagasi Vanas Egiptuses.

Asjad esinevad meile ülevaatamatus mitmekesiduses. Igal asjal on kuju, suurus ja asend ruumis. Asjadest esineb meile ikka hulk neid, kas üks või rohkem. Hulgas võime ka näha suurust.

Uurida suurust, kuju ja asendit, avastada ja kirjeldada seadusi, mis valitsevad suuruste muutumist, on matemaatika ülesanne.

Matemaatika jaguneb kaheks suureks osaks - aritmeetikaks ja geomeetriaks, millised omakorda mitmeti hargnevad. Aritmeetika on õpetus arvudest ja arvutamisest; geomeetria on õpetus kehadest ("asjadest"), nende kujutamisest, nende mõõtmisest ja asendi määramisest.

Käesolev vihk tahab olla abiks algkoolis ja igapäevases elus õpitud aritmeetika kordamisel, korraldamisel ja jäädavaks kinnitamisel. Ilma selle vihu sisu kindla teadmiseta keskkooli kursuse omandamine pole võimalik.

I. Loendamine ja numeratsioon.

§ 1. Sõna üks on kõigile tuntud, samuti sõnad palju ja hulk.
Asjad esinevad meile üksikult ja hulgana. Kui tahame asjade hulka teada lähemalt, siis loendame: üks, kaks, kolm, neli jne.
Iga uue asja eraldamine asjade hulgast nõuab meilt loendamisel uut sõna. Sõnade loomine, õppimine ja meelespidamine on raske töö: ka loendamine oleks seega väga tülikas toiming. Seda ta oli ka kaua aega, kuid praegu on loendamine väga lihtne, isegi kättesaadav lastele enne kooli tulekut.

§ 2. Loendamise lihtsus saavutatakse sel teel, et loendatakse asju ühesuuruste rühmade kaupa, siis loendatakse rühmad, siis rühmade rühmad jne. Sel korral loendamisel on tarvis ainult väike hulk sõnu. Kõige rohkem levinenud on loendamise viis, mil igas rühmas on kümme asja. Siin vajame kõigepealt kümme sõna:
üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme.
Oleme loendamisel jõudnud kümneni, siis paneme selle rühma kõrvale ja hakkame uuesti loendama üks, kaks jne., kuid märgime kohe, et meil on tegemist teise rühmaga ja ütleme üks teisest kümnest, kaks teisest kümnest jne. Sõnastamise hõlbustamiseks öeldakse lühemalt üksteist, kaksteist, kolmteist jne. Kui oleme loendanud teise rühma lõpuni, siis ütleme kakskümmend. Loendamise jätkamisel lausume jälle üks, kaks, kolm jne. ja näitame kohe, et meil juba kaks loendamise rühma selja taga, selleks lisades sõnade üks, kaks, kolm jne. ette sõna

kakskümmend. Nii suudame loendada, tarvitamata uusi sõnu, kuni kümnenda rühma lõpuni. Saadud kümme rühma (kümme kümmend) võtame ühe suurema rühmana, nimetame teda sada ja jätkame loendamist nagu alguses, ainult lisades igakord ette sõna sada - sadaüks, sadakaks, sadakolm jne. Nüüd võiksime uusi sõnu tarvitamata loendada edasi kuni saja sajani, kuid tarvitame juba "kümme sada" asemel sõna tuhat. Edaspidisel loendamisel lausume ikka uuesti üks, kaks, kolm, neli jne., märkides ainult, millisest loendamisrühmast või rühmade rühmast oleme möödas; näiteks lausudes kolm tuhat kuussada viiskümmend kaheksa, teame, et meil on loendatud kolm suurt rühma - tuhat, siis kuus väiksemat rühma - sada, veel viis väiksemat rühma, milles igaühes kümme asja, ja viimases kaheksa üksikut asja. Alles siis, kui jõuame loendamisel tuhande tuhandeni, vajame uut nimetust - miljon. Tuhande miljoni möödumisel tarvitame veel uut nimetust - miljard, tuhat miljardit nimetame triljoniks, tuhat triljonit-kvadriljon: iga tuhat loendamise rühma saavad jälle uue nimetuse.
Suurte arvude nimetamises pole ühtlust; on olemas ka meie omast erinev arvude nimetamise viis, mille järgi alles iga miljon loendamisrühma saab uue nimetuse: miljon miljonit on siis biljon, miljon biljonit on triljon, miljon triljonit on kvadriljon. See viimane arvude nimetamise viis on tarvitatav teaduslikes töis.

§ 3. Loendamise saadus on arv. Tähelepanuväärne on tõsiasi:

(I) loendamise järjekord ei mõju loendamise tulemusele.

Millisest loendatava asjade hulga liikmest me ka ei algaks ja millises järjekorras me ka ei loendaks näiteks mõne ratta kodaraid, me saame ikka ühe ja sama arvu.
Juhitud tahtest vähese aja- ja vaevakuluga säilitada loendamise saadust - arvu, inimene leiutas selleks erilised märgid - numbrid ja teravmeelse võtte nende kirjutamisel.
Üheksal esimesel arvul on igaühel oma märk; lisaks neile võetakse veel märk 0.
Nende kümne, numbriteks[x]) nimetatud, märgi abil
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
saab kirja panna iga arvu, kui arvude kirjutamisel kinni pidada numbrite kohareeglist:

ritta kirjutatud kahest ühesugusest numbrist vasakpoolne tähendab kümme korda suuremat arvu kui parempoolne.

Paremal pool esimesel kohal kirjutatud number tähendab ikka kuuluvust loendamise esimesse rühma. Kirjutises 77 näiteks parempoolne number tähendab arvu seitse ja vasakpoolne number - kümme korda suuremat arvu, s.o. seitsekümmend; kirjutis 77 seega tähendab arvu seitsekümmend seitse.

§ 4. Arvu kirjakujus iga number tähendab loendamise erirühma ehk järku; igal järgul on oma nimetus. Näiteks arvus

3	8	7	4	5	2
VI	V	IV	III	II	I

---

x) Meil on sõnal number kahjuks veel teine tähendus: numbriks nimetatakse ka arvu, millega märgitakse mõne eseme koht teiste sama liiki esemete hulgas, näit. vagun N 387.

esimesel kohal
asuv number (2) tähendab I järgu ühikuid ehk
<u>ühelisi</u>
teisel kohal
asuv number (5) " II " ühikuid ehk
<u>kümnelisi</u>
kolmandal kohal
asuv number (4) " III " ühikuid ehk
<u>sajalisi</u>
neljandal kohal
asuv number (7) " IV " ühikuid ehk
<u>tuhandelisi</u>
viiendal kohal
asuv number (8) " V " ühikuid ehk
<u>kümnetuhandelisi</u>
kuuendal kohal
asuv number (3) " VI järgu ühikuid ehk
<u>sajatuhandelisi</u>

Kui arvus mõni järk puudub, siis kirjutatakse selle järgu kohale number null; näit. 109 tähendab, et loendamisel ületasime rühma "sada", edasi kümneni me ei jõudnudki, vaid lõpetasime loendamise üheksaga; terve arv loetakse <u>üks sada üheksa.</u>

Kui null esineb üksi, siis nähakse temas ka arvu, mis tähendab, et asju polegi, et loendamist ei saadudki alustada, näit. kalal on 0 jalga.

§ 5. Selge on, et
10 esimese järgu ühikut moodustavad ühe teise järgu ühiku
ehk 10 ühte moodustavad ühe kümne;
10 teise järgu ühikut moodustavad ühe kolmanda järgu ühiku
ehk 10 kümmet moodustavad ühe saja;
10 kolmanda järgu ühikut moodustavad ühe nel-

janda järgu ühiku
ehk 10 sada moodustavad ühe tuhande;
10 neljanda järgu ühikut moodustavad ühe viienda järgu ühiku
ehk 10 tuhat moodustavad ühe kümnetuhande;
10 kuuenda järgu ühikut moodustavad ühe seitsmenda järgu ühiku
ehk 10 sadatuhat moodustavad ühe miljoni.
Arvus 8504 ühelisi on neli, aga ühtesid on kaheksa tuhat viissada neli; kümnelisi polegi, aga kümmet on kaheksasada viiskümmend; sajalisi on viis, aga sadasid kaheksakümmend viis; tuhandelisi on kaheksa ja tuhandeid on kaheksa.

§ 6. Numbritega kirjutatud arvu lugemisel talitatakse lihtsa juhise järgi.

a) kui arvus on neli numbrit või vähem, siis hääldatakse, alates vasakult, järgimööda iga numbri nimetus ja tema järel järgu nimetus, kusjuures kümneliste järk hääldatakse "kümmend"; numbritest ainult null jääb ikka nimetamata ja järkudest - üheliste järk. Näiteks arv 6469 loetakse: kuus tuhat nelisada kuuskümmend üheksa, arv 7032 - seitse tuhat kolmkümmend kaks.

b) kui arvus on neljast rohkem numbreid või kohti, siis kõigepealt jagatakse arv klassideks kolme numbri kaupa igas klassis*) alates paremalt poolt; ainult viimases, s.o. vasakpoolses äärmises klassis võib olla ka kaks või koguni üks number; esimene klass sisaldab siis ühtesid, teine tuhandeid, kolmas miljoneid, neljas miljardeid, viies triljoneid,

---

*) Teise arvude nimetamise viisi puhul on igas klassis kuus numbrit.

kuues kvadriljoneid; arvu lugemisel nimetatakse siis alates vasakult, järgimööda iga klass ja lisatakse klassi nimetus juure; näiteks arvu 29316732564 lugemisel jagame ta klassideks

29 316 732 564

(klasside vahel tuleb jätta suuremad vahed!) ja loeme: 29 miljardit 316 miljonit 732 tuhat 564.

§ 7. Kuuldud arvude üleskirjutamisel juhib meid samuti lihtne reegel:

> Kirjutame arvu klasside kaupa, alates vasakult poolt, ja hoolitseme selle eest, et igas klassis oleks kolm numbrit.

Kui klassis kuuldub kolmest vähem numbreid, siis täiendame klassi nimetusele eelkäiva arvu vasakpoolel ühe või kahe nulliga; kui vahepäälse klassi nimetus üldse puudub, siis kirjutame selle klassi kohale kolm nulli. Näiteks arvu kuuskümmend neli miljonit kaheksakümmend kaks kirjutame 64 000 082; ainult viimases klassis (s.o. vasakult esimeses) võib olla kolmest vähem numbreid - null arvu eesotsas ei tähenda mitte midagi: 064 on ikka kuuskümmendneli.

§ 8. Metsinimesele nii raske loendamise toiming ja hoopis kättesaamatu arvude kirjutamine on kultuurrahvastel isegi lastele jõukohane tänu sellele, et arvud on seatud korda või süsteemi, nad on rühmitatud kümne kaupa, ja kirjutamisel on võetud tarvitusele lihtne kohareegel. Kuna arv kümme mängib siin nii tähtsat osa, siis nimetame oma loendamise viisi kümnend loendamise süsteemiks ja arvude kirjutamise viisi - kümnend numeratsiooni süsteemiks. Arv kümme on selle süsteemi alus.

§ 9. Peale kümnendsüsteemi loendamisel ja numeratsioonil on ka teisi süsteeme. Tuntuim ja meilgi tarvitatav on roomlaste numeratsioon. Vanad roomlased loendasid nagu meiegi kümnendsüsteemis, kuid arvude kirjutamiseks ei tarvitanud nad mitte meie, nõnda nimetatud araabia numbreid (0 1 2 3 4 5 6 7 8 9), vaid teisi, praegu veel rooma numbrite all tuntud, märke:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Nende abil roomlane kirjutas kõik tema elus ettetulevad arvud, näiteks:

2 - II	11 - XI
3 - III	12 - XII
4 - IIII ehk IV	20 - XX
6 - VI	30 - XXX
7 - VII	40 - XXXX ehk XL
8 - VIII	60 - LX
9 - IX	2789 - MMDCCLXXXIX

Suuremad arvud roomlane kirjutas osalt oma numbritega, osalt kirjamärkides sõnadega, näit.:

DCXII milia CMXXV tähendab 612 925.

Roomlased ei tunnud meil tarvitusel olevat kohareeglit.

§10. Loendamisel tekivad arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, jne., mille kogu moodustab n.n. loomuliku arvjada ehk täisarvude jada. Nähes nullis ka arvu, anname talle koha meie jada alguses. Isegi liivaterakesed merekaldal võivad lõppeda, aga mõttes võime loendada ikka edasi; kui meie väsime, võivad loendada edasi meie järglased. Loendamisel lõppu ei ole. Loomulik arvjada on lõputa.

Loomulikus arvjadas on kergesti eraldatavad paaritud ja paarisarvud. Naabruses seisvad arvud on järjestikkused arvud.

§11. Kaks arvu võivad olla võrdsed või võrratud, (ühesuurused või isesuurused). Üht kui teist nähet märgitakse kirjas eriliste sidetähistega - võrduse- ja võrratusemärkidega. Kirjutatakse näit.: 2+15=17, nimetades seda arvude seost võrduseks:

loetakse: 2 pluss 15 on võrdne 17-ga
või 2 " 15 võrdub 17-ga
või 2 " 15 on sama suur kui 17
või 2 " 15 on 17.

Kahe arvu mittevõrdumise märkimiseks tarvitatakse suurem-olemise tähist (>) või väiksem-olemise tähist (<), selle märgi nurga avaus on suurema arvu pool, nurga tipp on väiksema arvu pool.

5 < 8 loetakse: 5 on väiksem kui 8
8 > 5 loetakse: 8 on suurem kui 5.

Arvude seoseid nagu 5 < 8 ja 8 > 5 nimetatakse võrratusteks. Võrdusi ja võrratusi võib lugeda vasakult poolt paremale ja ka paremalt poolt vasakule.

II. Liitmine.

2. Meil tuleb igal sammul tegemist teha arvudega, selgitada kõiksugu nähteid arvude abil; meil on vajadus toimetada matemaatilisi tehteid ehk arvutada. Algelisim tehe on liitmine.
Ma leidsin neli seent ja siis veel kolm seent; kui ma nüüd tahan teada, mitu seent ma üldse leidsin, siis pean neljast edasi loendama kolm (või kolmest edasi loendama neli); sel viisil jõuan loomulikus arvjadas seitsmeni ja tean, et olen leidnud seitse seent.
Nõnda toimetab metslane, samuti talitab ka laps. Kogemuste kasvades selgub, et igakord uuesti loendamine on ülearuno vaev: loendamise tulemust võib näha ette, sest et varasemate loendamiste tulemused on jäänud meele.
Teadvustub ka tõsiasi, et loendamise arvuline tulemus on rippumata sellest, mida loendatakse: kui kolmest edasi loendada neli, siis saab ikka seitse olgu tegemist seente, õunte, sõrmede, inimeste, loomade, puude, majade, tähtede, löökide, liigutuste, mõtete või millegi muuga.
Meeleshoiduvad loendamisetulemused korralduvad tabeliks:

$$\left.\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}1\left\{\begin{matrix}2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}2\left\{\begin{matrix}4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}3\left\{\begin{matrix}6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}4\left\{\begin{matrix}8\\9\\10\\11\\12\\13\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}5\left\{\begin{matrix}10\\11\\12\\13\\14\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}6\left\{\begin{matrix}12\\13\\14\\15\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix}\right\}7\left\{\begin{matrix}14\\15\\16\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}8\\9\end{matrix}\right\}8\left\{\begin{matrix}16\\17\end{matrix}\right. \qquad 9\}9\{18$$

Niisuguses kujus on see tabel antud 1703.a. Moskvas ilmunud Magnitski "Aritmeetikas". Parem ülevaatlikkus on tabelkujus:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4	5	6	7	8	9	10	11
3			6	7	8	9	10	11	12
4				8	9	10	11	12	13
5					10	11	12	13	14
6						12	13	14	15
7							14	15	16
8								16	17
9									18

Säärase tabeli kasutamisega seotud loendamist ühes arvust edasi teise arvu poolt määratud ühikute võrra nimetatakse kahe arvu liitmiseks; ülaltoodud tabelid on liitmise tabelid. Kirja pannakse liitmine järgmiselt: 4+3=7 ja loetakse "neli pluss kolm on seitse". 4 ning 3, s.o. arvud, mida liidetakse, nimetatakse liidetavateks; 7 s.o. arv, mis liitmisel saadakse, nim. liidetavate summaks.

Liita kolm arvu tähendab kahe arvu summale liita kolmas arv.

Liita võib ükskõik mitu arvu.

Liitmine on ikka võimalik.

Kahe täisarvu liitmine annab tulemusena ikka ühe uue täisarvu.

Iga täisarvu peale ühe võib kujutada kahe väiksema täisarvu summana.

Igasugune liitmine taandub kahe ühekohalise arvu liitmisele. Liitmise oskus põhjeneb liitmise tabeli tundmisele. Kellel pole meeles liitmise tabelit, asendab kiire liitmise aegaviitva loendamisega.

§13. Kahe või rohkem arvu liitmisel juhivad meid järgmised tõed:

(II) Liidetavate järjekorra muutmine ei muuda summat:

$$3 + 4 = 7 \text{ ja } 4 + 3 = 7;$$
$$3 + 4 = 4 + 3.$$

(III) Mitme arvu liitmisel võib liidetavaid asendada nende summaga:

$$1+6+2+4 = (6+4)+(1+2) = 10+3;$$

(IV) Liidetavat võib kujutada mitme arvu summana ja asendada tema liidetavatega:

$$9+7 = 9+(1+6) = 9+1+6 = 10+6.$$

Kui peab toimetama mitu liitmist ja tahetakse teha seda kirjutisest erinevas järjekorras, siis pannakse sulgudesse ( ) need arvud, missuguseid tuleb liita esimeses järjekorras:

$$3 + (8+5) + 7 = 3 +13 + 7 = 23.$$

§14. Olgu vajadus liita 4538 ja 261. Teades, et

$$4538 = 4000 + 500 + 30 + 8 \text{ ja}$$
$$261 = 200 + 60 + 1,$$

kirjutame

$$4538+261 = \underbrace{4000+500+30+8}_{4538}+\underbrace{200+60+1}_{261} =$$
$$= 4000+\underbrace{500+200}_{700}+\underbrace{30+60}_{90}+\underbrace{8+1}_{9} =$$
$$= 4000 + 700 + 90 + 9 = 4799.$$

Hõlpsamini sünnib liitmine, kui kirjutada üks liidetav teise alla nõnda, et ühesugused järgud oleksid kohakuti:

$$\begin{array}{r} 4538 \\ +261 \\ \hline 4799; \end{array}$$

siis liidetakse paremalt alates järgimööda üksikute järkude arvud (ühelised ühelistega, kümnelised kümnelistega jne) ja saadud summa kirjutatakse vastavate järkude alla.

§15. Võib juhtuda, et mõne järgu arvude summa ületab 10; siis talitatakse järgmiselt:

$$537+488+369 = \underbrace{500+30+7}_{537}+\underbrace{400+80+8}_{488}+\underbrace{300+60+9}_{369} =$$

$$= \underbrace{500 + 400 + 300}_{\substack{12 \text{ sada}= \\ 1000\ +\ 200}} + \underbrace{30 + 80 + 60}_{\substack{17 \text{ kümmet}= \\ 100\ +\ 70}} + \underbrace{7 + 8 + 9}_{\substack{24 \text{ ühte}= \\ 20\ +\ 4}} =$$

$$= 1000 + \underbrace{200 + 100}_{300} + \underbrace{70 + 20}_{90} + 4 =$$

$$= 1000 + 300 + 90 + 4 = 1394.$$

Harilikult kirjutatakse liidetavad tulpa ja siis liidetakse:

$$\begin{array}{r} 537 \\ 488 \\ +\ 369 \\ \hline 1394 \end{array}$$

" seitse pluss kaheksa pluss üheksa on kakskümmendneli"; kirjutan neli kriipsu alla ja kaks lisan kümnelistele: "kaks pluss kolm pluss kaheksa pluss kuus on üheksateist", kirjutan 9 kriipsu alla teisele kohale ja ühe liidan sajalistele: "üks pluss viis pluss neli pluss kolm on kolmteist"; kirjutan 13 kriipsu alla.

§16. Iga tehe vajab kontrolli. Liitmist võib kontrollida, liites uuesti samad liidetavad teises järjekorras; kui summa osutub endiseks, siis on põhjust oletada, et liitmisel pole eksitud.

III. Lahutamine.

§17. Lahutamine on liitmisele vastupidine tehe: kui on teada kahe arvu summa ja üks liidetavaist, siis leitakse teine liidetav lahutamise abil. Kui 6 + teadmata arv = 9, siis teadmata arvu leidmiseks lahutame üheksast kuus. Kirjutame: 9 - 6 = 3 loeme: "üheksa miinus kuus on kolm". Arv, millest lahutatakse nimetatakse vähendatavaks, arv, mis lahutatakse, on lahutatav; lahutamise saadus on vähendatava ja lahutatava vahe:

$$\begin{array}{rl} 9 & \text{vähendatav} \\ \underline{-\ 3} & \text{lahutatav} \\ 6 & \text{vahe.} \end{array}$$

(V) Vahe ja lahutatava summa on vähendatav.

See tõsiasi võimaldab lahutamise kontrolli liitmise abil: 9-6=3, sest 3+6=9. Täisarvude lahutamine pole mitte ikka võimalik, vaid ainult siis, kui lahutatav ei ole suurem vähendatavast. Kahe võrdse arvu vahe on null. Arvude lahutamine sünnib vaid siis väledalt, kui osatakse väledalt liita: näiteks, aega viitmata ja kaotamata saadakse ainult siis öelda, et üheksa miinus kuus on kolm, kui teatakse, et kolm pluss kuus on üheksa.

§18. Suuremate arvude vahe leitakse jõu kokkuhoiu huvides kirjalikult. Siin tarvitusel olev eriline võte põhjeneb järgmistel tõdedel:

(VI) Antud arvust mitme liidetava summa lahutamiseks võib lahutada järgimööda kõik liidetavad:

$$8 - (1+2) = 8 - 1 - 2;$$

(VII) antud arvule teise arvu vahe liitmisel võib liita vähendatav ja lahutada lahutatav:

$$5 + (4-2) = 5 + 4 - 2;$$

(VIII) antud arvust kahe teise arvu vahe lahutamisel võib liita lahutatav ja lahutada vähendatav:

$$10-(5-2) = 10-5+2 = 10+2-5$$

näide: omades 10 krooni kahes viiekroonises rahas tahan tasuda kolm krooni võlga: ma võin vahetada raha ja maksta kolm krooni, järgi jääb mul 7 krooni, ma võin aga ka anda ühe viiekroonise ja nõuda tagasi kaks krooni; ka siis jääb mul järele 7 krooni -

(IX) vahe ei muutu, kui vähendatavale ja lahutatavale liita üks ja sama arv, või kui kummastki lahutada üks ja sama arv:

$$5 - 3 = (5+4) - (3+4)$$
$$9 - 7 = (9-3) - (7-3).$$

§10. Olgu vajadus 965-st lahutada 437; teades, et

$$965 = 900 + 60 + 5$$
$$437 = 400 + 30 + 7$$

võime kirjutada

$$965-437 = (900+50+10+5) - (400+30+7) =$$
$$= (900-400)+(50-30)+(10+5-7) = 500+20+8 = 528.$$

Lühidalt pannakse kõik kirja nõnda

$$\begin{array}{r} 965 \\ -\ 437 \\ \hline 528 \end{array}$$

ja lahutatakse järkude kaupa, alates ühelistest. Kui vähendatavas ühelisi on vähem kui lahutatavas, siis lisame vähendatava ühelistele 10 ja tasakaalustamiseks vähendame vähendatava kümnelisi ühe võrra; meie näites:

viiest ei saa lahutada seitse, siis lahutame viieteistkümnest ("laename" vähendatava kümnelistest ühe ja liidame kümme ühelistega); kui jõuame kümnelisteni, siis lahutame viiest neli. Soovitav on loobuda levinenud harjumusest märkida "laenamist" täpiga: see on asjata ajaviitmine.
Kirjalikul lahutamisel nagu liitmiselgi on kõige hõlpsam kirjutada arvud tulpa, peab aga ka võimeline olema liitma ja lahutama ritta või kuidagi teisiti mitte tavalises korras kirjutatud arve.

§20. Lahutamise abil võib kontrollida liitmist.

Näide 1

$$\begin{array}{r} 439 \\ +256 \\ \hline 695 \\ -439 \\ \hline \end{array}$$

siit lahutan näiteks teise liidetava, tulemuses ilmus esimene liidetav, seega liidetud summa 695 on õige.

Näide 2.

	5678
	901
	23456
	78
	987
	+ 6543
Kõigi kuue liidetava summa	37643
Viie liidetava summa	- 31965
	5678

ilmus esimene liidetav, seega leitud summa 37 643 on õige.

IV. Korrutamine.

§21. Võrdsete liidetavate summa leitakse eriliste võtete abil kiiremini kui tavalise liitmise teel.

$5+5+5+5+5+5+5 = 35$ asemele võib kirjutada $7 \cdot 5 = 35$, lugedes "seitse korda viis on 35". Säärast võrdsete liidetavate lühendatud liitmist nimetatakse korrutamiseks.

Igaüht võrdseist liidetavaist (5) nimetame korrutatavaks ja arvu, mis näitab, mitu korda esineb üks ja sama liidetav, - korrutajaks (7).

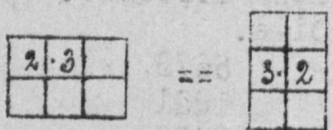
$3 \cdot = 4+4+4 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 3+3+3+3 = 4 \cdot 3$

tähendab $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, s.o.

(X) kahe arvu korrutis ei muutu, kui korrutaja ja korrutatava kohad vahetada.

Korrutaja ja korrutatava vahetegemisel pole seega praktilist tähtsust. Sellepärast nimetatakse ka mõlemaid ühise nimega teguriteks.

Kahe arvu korrutis kujutab ristküliku pindala,



mille alus on üheks teguriks, kõrgus - teiseks; aluse ja kõrguse valik on meelevaldne: aluse ja kõrguse vahetamisel pindala ei muutu.

Kolme arvu korrutise leiame, korrutades kahe arvu korrutise kolmanda arvuga:

$$3 \cdot \underbrace{4 \cdot 5}_{20} = 3 \cdot 20 = 60$$

Ka siin võime meelevaldselt muuta tegurite järjekorda, ilma et muutuks korrutis.

Peame meeles, et

(XI) korrutis ei olene tegurite järjekorrast,

ja tegelikul korrutamisel valime ikka meile kõige soodsama järjekorra.

Korrutis on iga tema teguri kordarv ehk kordne.

§22. Hea korrutamise oskuse aluseks on ühekohaliste arvude korrutiste tundmine.
Nende korrutiste tabel (nõnda nimetatud "ükskordüks"):

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	72
9								81

See peab olema nii kindlasti peas, et, nähes või kuuldes näiteks $6 \cdot 7$, võiks vahenditult öelda 42. Suuremate arvude peast ja kirjalikult korrutamine sünnib mitmesuguste eriliste võtete abil, millised põhjenevad muu seas järgmistel tõsiasjadel:

(XII) Kui üks kahest tegurist on 1, siis korrutis võrdub teise teguriga

$$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3;$$

(XIII) arvu korrutis nulliga on null:

$$4 \cdot 0 = 0 \cdot 4 = 0$$

(XIV) summa korrutamisel mingisuguse arvuga võib korrutada viimasega iga liidetav ja saadud korrutised liita:

$$8 \cdot (5+4) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 4$$

Kui on tarvis toimetada mitu liitmist, lahutamist ja korrutamist, siis maksva kokkuleppe põhjal toimetatakse enne märgitud korrutamised, siis liitmised ja lahutamised; kui on tarviline teissugune tehete järjekord, siis võetakse tarvitusele sulud; sel korral tulevad täitmisele esimeses järjekorras sulgudes märgitud tehted:

$7 \cdot 5 + 8 \cdot 4$ tähendab, et enne korrutatakse 7 ja 5 ning 8 ja 4, siis korrutamiste saadused liidetakse; $8 \cdot (5+4)$ tähendab, et enne tuleb liita 5 ja 4 ning siis alles nende summa korrutada kaheksaga.

Vahe korrutamisel mõne arvuga võib korrutada sama arvuga vähendatav ja lahutatav ning esimesest korrutisest lahutada teine:

$$4 \cdot (8-5) = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 5.$$

Mingisuguse arvu ja 10, 100, 1000 jne. korrutis on sama arv, mille paremale poole on juure kirjutatud üks, kaks, kolm jne. nülli.

$$\begin{aligned} 10 \cdot 425 &= 10 \cdot (400+20+5) = \\ &= 10 \cdot (4 \cdot 100+2 \cdot 10+5) = \\ &= 10 \cdot 4 \cdot 100+10 \cdot 2 \cdot 10+10 \cdot 5 = \\ &= 4 \cdot 1000+2 \cdot 100+50 = \\ &= 4000 + 200 + 50 = \\ &= 4250; \end{aligned}$$

samuti

$$100 \cdot 425 = 42\,500; \; 425 \cdot 1000 = 425\,000.$$

Kui teguritel igaühel on vaid üks nullidest erinev number kuna muud numbrid on nullid, siis korrutis leitakse, korrutades teine teisega ainult maksvad numbrid*) ja kirjutades saadud korrutisele paremale poole nii mitu nulli, mitu neid on kõigil teguritel kokku.

$$3 \cdot 400 = 3 \cdot 4 \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1200$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot 3000 \cdot 700 &= 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 7 \cdot 100 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 1000 \cdot 100 = \\ &= 42 \cdot 1000000 = 42\,000\,000. \end{aligned}$$

*) Väljendis "korrutada numbrid" on lühend väljendisele "korrutada arve, milliseid need numbrid tähendavad", sest numbrid korrutada ei saa: number on vaid kirjamärk.

§23. Mitmekohase arvu korrutis ühekohase arvuga (näiteks 3·2786) leitakse järgmise mõttekäigu põhjal:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2786 &= 3 \cdot (2000 + 700 + 80 + 6) = \\ &= 3 \cdot 2000 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 80 + 3 \cdot 6 = \\ &= 6000 + 2100 + 240 + 18, \end{aligned}$$

korraldame need liidetavad tulbana ja siis liidame

$$\begin{array}{r} 6\,0\,0\,0 \\ 2\,1\,0\,0 \\ 2\,4\,0 \\ 1\,8 \\ \hline 8\,3\,5\,8 \end{array}$$

Kirjalikul korrutamisel me teeme kõik, mis siin näidatud, kuid paneme kirja ainult lõppresultaadi:

$$2786 \cdot 3 = 8358 \quad \text{või} \quad \begin{array}{r} 2786 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 8358 \end{array} \quad \text{või} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \cdot 2786 \\ \hline 8358 \end{array}$$

$$\text{või} \quad 3 \cdot 2786 = 8358$$

Algan korrutamist ühelistega: "kolm korda kuus on 18..." Kirjutan korrutise ühelistena 8; "kolm korda kaheksa on 24, 24 pluss üks on 25"; kirjutan 5 korrutise kümnelistena, s.t. varem kirjutatud 8 kõrva vasakpoolele jne. Lühikest aega tuleb meeles pidada ülal ringikestega ümbritsetud arve. Kuhugi neid üles kirjutada pole vaja; kui see on saanud harjumuseks, tuleb vabaneda sellest.

§24. Kahe mitmekohalise arvu korrutamine ei nõua meilt mõtteliselt mitte midagi uut. Olgu meil vajadus 8254 korrutada 347-ga;

$$\begin{aligned} 347 \cdot 8254 &= (300+40+7) \cdot 8254 = \\ &= 300 \cdot 8254 + 40 \cdot 8254 + 7 \cdot 8254 = \\ &= 2476200 + 330160 + 5778; \end{aligned}$$

viimast rida tulbana korraldades võime kirjutada:

$$\begin{array}{r} 2476200 \\ 330160 \\ +\ 57778 \\ \hline 2864138 \end{array}$$

Ainult seda viimast panemegi harilikult kirja, jättes ära ka allakriipsutatud nullid:

tegurid $\underline{347 \cdot 8254}$

$$\text{osakorrutised}\left\{\begin{array}{rl} 24762 & \text{....(300 korda 8254, sellepärast esim. number sajaliste kohale)} \\ 33016 & \text{...(40 korda 8254, sellep. esim. number kümneliste kohale).} \\ 57778 & \text{..(7 korda 8254, sellep. esim. number üheliste kohale).} \end{array}\right.$$

korrutis 2864138

Kirjalikku korrutamist korraldatakse mõnikord ka nõnda:

$$\begin{array}{r} 347 \\ \cdot 8254 \\ \hline 24762 \\ 33016 \\ 57778 \\ \hline 2864138 \end{array} \quad \text{või} \quad \begin{array}{r} 8254 \\ \cdot 347 \\ \hline 24762 \\ 33016 \\ 57778 \\ \hline 2864138 \end{array}$$

kuid korrutada on otstarbne ikka tolle teguriga, millel vähem maksvaid numbreid. Kasulik on leida osakorrutised, alates korrutamist ühe teguriga kõrgemast järgust.

§25. Korrutamise kontrolliks on tähtis ette teada, mitu kohta ehk mitu numbrit on korrutisel. Olgu meil korrutis 347·8254. Siin esinev tegur 347 on kolmekohaline, ta on sajast suurem; 8254 korrutis sajaga, s.o. 825400 on otsitavast korrutisest kindlasti väiksem, teiste sõnadega: otsitavas korrutises ei või olla vähem kui 6 kohta; esimene tegur kolmekohalise arvuna on aga tuhandest väiksem; tähendab 8254 korrutis tuhandega, s.o. 8254000 on otsitavast korrutisest kindlasti

suurem, teiste sõnadega: otsitavas korrutises ei või olla rohkem kui 7 kohta.
Lühidalt võime siin avaldatud mõtted panna kirja nõnda: $1000 \cdot 3254 > 347 \cdot 3254 > 100 \cdot 3254$

$$3254000 > 347 \cdot 3254 > 325400$$

samuti

$$1000 \cdot 3167 > 234 \cdot 3167 > 100 \cdot 3167$$

$$3167000 > 234 \cdot 3167 > 316700$$

Kahe teguri korrutisel on nii mitu kohta, mitu neid on mõlemil teguril kokku, või ühe võrra vähem.

§26. Võrdsete tegurite korrutist kutsutakse selle teguri <u>astmeks:</u>

$5 \cdot 5 = 5^2$ "viie teine aste" ehk "viie ruut"
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ "viie kolmas aste" ehk "viie kuup"
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ "viie neljas aste"
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ "viie viies aste"
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$ "viie kuues aste" jne.

Võttes arvesse, et

$$100 = 10^2$$
$$1000 = 10^3$$
$$10000 = 10^4$$
$$100000 = 10^5$$
$$1000000 = 10^6$$
$$10000000 = 10^7$$

võib kirjutada suuri arve tavalisest vähema arvu numbritega, näit.

$$340\,000\,000 = 34 \cdot 10\,000\,000 = 34 \cdot 10^7$$

ning kujutada iga arv summana, mille liidetavateks on kümne ast-med, korrutatud ühekohaliste arvudega, näit.

$$568739 = 500\,000 + 60\,000 + 8\,000 + 700 + 30 + 9 =$$
$$= 5 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 9.$$

§27. Kümne astme tarvitamine võimaldab kiirkontrolli abil vältida korrutamisel jämedaid vigu.

Näiteks korrutise 347·3254 kontrollimisel võib talitada nõnda:

$$3000 \cdot 8000 < 3547 \cdot 8254 < 4000 \cdot 9000$$

$$24 \cdot 10^6 < 347 \cdot 8254 < 36 \cdot 10^6 .$$

Kuna 10^6 on miljon, siis näeb kohe, et otsitav korrutis peab peituma 24 ja 36 miljoni vahel.

V. Jagamine.

§28. Jagamine on korrutamisele vastupidine tehe. Jagada üks arv teisega tähendab leida uus arv, mille korrutis teise arvuga on nii suur kui esimene arv. Kirjas märgime jagamist järgmiselt

$$\left.\begin{array}{l} 12 : 3 = 4 \\ \text{või } 12 \,\underline{|\,3\,} \\ \qquad\quad 4 \\ \text{või } \frac{12}{3} = 4 \end{array}\right\}$$ loeme: "12 jagatud kolmega on neli".

Arvu, mis jagatakse, nimetame jagatavaks; arvu, millega jagatakse, nimetatakse jagajaks; jagamise saadust nimetame jagatiseks.

(XV) Arvu jagatis iseendaga on üks.

(XVI) Arvu jagatis ühega on jagatav arv ise.

(XVII) Jagaja korrutis jagatisega on võrdne jagatavaga.

siit järgneb:

(XVIII) Arvu jagamine nulliga pole võimalik.

ja (XIX) Nulli jagatis iga arvuga on null.

Lause (XVII) on aluseks jagamise kontrollimisel: jagamine 12:3=4 on õige, sest 3·4 = 12.

§29. Jagamine täisarvude vallas pole mitte ikka võimalik. Kõige pealt jagamine on võimatu siis, kui jagatav on väiksem jagajast, sest

täisarvu korrutis ükskõik millise teise täisarvuga pole iial väiksem kui kumbki tegur.

Kui on täidetud tingimus, et jagatav pole väiksem jagajast, siis jagamise võimalikkuseks on tarvis, et jagatav oleks jagaja kordarv. Näiteks jagamisel 13 : 5 - esimene tingimus on küll täidetud (13> 5), kuid jagamine pole siiski võimalik, sest et mitte ühegi arvu korrutis viiega pole 13, 13 pole viie kordarv.

§30. Kui jagatav pole väiksem jagajast, kuid jagatav pole ka jagaja kordarv, siis esineb jagamine jäägiga või puudega. Näiteks 39 jagamisel seitsmega öeldakse

"jagatis on ligikaudu 5" või "jagatis on ligikaudu 6".

39 : 7 = 5...+ jääk 4

39 : 7 = 6...- puue 3

Kui jagamine pole võimalik, siis kõneldakse ligikaudsest jagamisest, mõeldes selle all üht neist kahest jagatisest, millest üks annab jagajast väiksema jäägi, teine - jagajast väiksema puude.

Kui üks arv võrdub teisega ligikaudselt, siis tarvitatakse nende sidumiseks ligikaudse võrduse märki ($\approx$); meie juhul näiteks võiksime kirjutada 39 : 7 $\approx$ 5 ja 39 : 7 $\approx$ 6.

Sel korral lause (XVII) pole maksev, tema asemele astub üks järgmisist:

(XX) jagatav on jagaja ja ligikaudse jagatise korrutis liidetud jäägiga

39 = 5 · 7 + 4

(XXI) jagatav on jagaja ja ligikaudse jagatise korrutis, millest on lahutatud puue (puudujääk)

39 = 6 · 7 - 3.

§31. Kasulik on teada ette, mitu numbrit on jagatises. Olgu vaja 54321 jagada 678-ga.

Vaatleme lähemalt jagaja korrutised 1-ga, 10-ga, 100-ga, 1000-ga jne., võrreldes neid korrutisi jagatavaga:

$$1 \cdot 673 = 673; \quad 673 < 54321$$
$$10 \cdot 673 = 6730; \quad 6730 < 54321$$
$$100 \cdot 673 = 67300; \quad 67300 > 54321$$

Näeme: esimene ja ka teine korrutis on jagatavast väiksem, kuna kolmas korrutis on suurem temast. Võime öelda jagatise kohta, et ta on kümnest suurem, kuid sajast väiksem

$$10 < 54321 : 673 < 100$$

Tähendab antud juhul jagatis on kahekohane arv, ta kirjutatakse kahe numbriga. Jagamist toimetamata võime määrata jagatise numbrite arvu järgmise reegli põhjal:

III. Jagatise numbrite arvu leidmiseks jagajale kirjutatakse paremale poole nullid, kuni nõnda tekkinud uus arv on jagatavast suurem; juurekirjutatud nullide arv ongi jagatise numbrite arv.

Meie näites tuli kirjutada jagajale 673 kaks nulli, enne kui saime arvu, mis on jagatavast 54321 suurem arv; tähendab jagatisel on kaks numbrit:

$$54321 : 673 = 80 + \ldots \text{ jääk } 81.$$

§32. Jagamise oskus põhjeneb heal korrutamise oskusel ja järgnevate tõdede tunnistamisel:

(XXII) summa jagamisel võib jagada iga liidetav ja siis liita saadud jagatised

$$\frac{18+24}{6} = \frac{18}{6} + \frac{24}{6} = 3 + 4 = 7;$$

(XXIII) vahe jagamisel võib jagada vähendatavat ja lahutatavat ja siis esimesest jagatisest lahutada teine

$$\frac{72-32}{8} = \frac{72}{8} - \frac{32}{8} = 9 - 4 = 5;$$

(XXIV) korrutise jagamisel tuleb jagada vaid üht tegurit

$$\frac{36\cdot45\cdot63}{9} = \frac{36}{9}\cdot45\cdot63 = 36\cdot\frac{45}{9}\cdot63 = 36\cdot45\cdot\frac{63}{9}$$

§33. Olgu tarvis 7358 jagada 6-ga; otsime arvu, mille korrutis kuuega on 7858 või ligikaudselt niipalju. Võime öelda ette, et jagatises on 4 numbrit; seal on seega tuhandelisi, sajalisi, kümnelisi ja ühelisi. Jagatise tuhandeliste korrutamisel jagajaga (kuuega) peame saama 7 või vähem. Selge on, et jagajas tuhandelisi on 1, jagatis sisaldab ühe tuhande;
6 · 1000 = 6000.

7358 - 6000= 1358

meie jagatavast on jagamata veel 1358. Siin on 13 sada + 58. Jagatise sajaliste korrutamisel jagajaga (kuuega) peame saama 13 või vähem. Tundes ükskordühte näeme kohe, et jagatises sajalisi on 2, jagatis sisaldab kaks sada

6 · 200 = 1200

1358 - 1200 = 158;

meie jagatavast on jagamata veel 158. Siin on 15 kümmet + 8. Jagatise kümneliste korrutamisel jagajaga (kuuega) peame saama 15 või vähem. Jagatises võib olla vaid 2 kümnelist, jagatis sisaldab kaks kümmet.

6 · 20 = 120

158 - 120 = 38:

meie jagatavast on jagamata 38 ja leidmata on jagatise ühelised. Jagatise üheliste korrutamisel jagajaga (kuuega) peame saama 38 või vähem. Ühelisi jagatises võib olla ainult 6

6 · 6 = 36

38 - 36 = 2:

Meie jagatavast on jagamata 2. See arv on jagajast väiksem, jagamist jatkata pole võimalik, meil ilmus jagatis 1226 ja jääk 2

7358:6 = 1226 + ... jääk 2.

Terve ülalkirjeldatud mõttekäik peegeldub kirjas järgmiselt

$$7358 : 6 = 1000 + 200 + 20 + 6 + \ldots \text{jääk } 2$$

$$\begin{array}{ll}
6\cdot1000= & \underline{6000} \\
 & 1358 \\
6\cdot200= & \underline{1200} \\
 & 158 \\
6\cdot20= & \underline{120} \\
 & 38 \\
6\cdot6= & \underline{36} \\
 & 2 \text{ (jääk)}
\end{array}$$

Tavaliselt kirjutatakse nõnda:

$$\begin{array}{l|l}
7358 & 6 \\ \cline{2-2}
\underline{6} & 1226+\ldots\text{jääk } 2 \\
13 & \\
\underline{12} & \\
15 & \\
\underline{12} & \\
38 & \\
\underline{36} & \\
2 \text{ (jääk)} &
\end{array}$$

või

$$\begin{array}{l}
7358:6 = 1226+\ldots\text{jääk } 2 \\
\underline{6} \\
13 \\
\underline{12} \\
15 \\
\underline{12} \\
38 \\
\underline{36} \\
2 \text{ (jääk)}
\end{array}$$

Kiirarvutaja aga korraldab kirjapanemist lihtsamalt (tarvitades märki $\underline{|}$ või :)

$$\begin{array}{l}
7358 : 6 = 1226 + \ldots \text{ jääk } 2 \\
13 \\
15 \\
38 \\
2 \text{ (jääk).}
\end{array}$$

Jagamine toimub jagatava järkude kaupa, alates jagatava kõrgemast järgust. Jagamist toimetaja mõtleb nõnda: "7 jagatud 6-ga on 1 (kirjutab jagatise tuhandelisteks 1); 6 korda 1 on 6, seitse miinus kuus on üks (kirjutab 1 jagatava tuhandeliste alla ja tema kõrvale jagatava sajalised 3); 13 jagatud 6-ga on 2 (kirjutab jagatise sajalisteks 2); kuus korda kaks on 12,

13 miinus 12 on 1 (kirjutab allapoole jagatava sajaliste tulpa 1 ning tema kõrvale jagatava kümnelised 5); 15 jagatud 6-ga on 2 (kirjutab jagatise kümnelisteks 2); kuus korda kaks on 12, 15 miinus 12 on 3 (kirjutab allapoole, jagatava kümneliste alla 3 ja selle kõrvale jagatava ühelised 8); 38 jagatud 6-ga on 6 (kirjutab jagatise ühelisteks 6); kuus korda kuus on 36, 38 miinus 36 on 2 (kirjutab allapoole, jagatava üheliste alla 2); jäägiks on 2 (märgib seda jagatises)."
Kontroll: 6·1226 = 7356; 7356 + 2 = 7358; jagatis on õige.
Kui jääki ei ole, siis esineb tema kohal null, näiteks 7356 : 6 = 1226.

```
7356 : 6 = 1226.
13
 15
  36
   0
```

§34. Jagamine mitmekohalise arvuga ei nõua meilt mõtteliselt midagi uut. Olgu meil jagada

897654 : 321

Kui talitaksime samuti nagu eelmisel juhul, siis peaks jagamisel tekkiv kirjutis nägema välja järgmiselt

897654:321 = 002796+... jääk 138

```
0·321=   0
        89
0·321=   0
       897*
2·321= 642
      2556
7·321=2247
      3095
9·321=2889
      2064
6·321=1926
       138 (jääk)
```

Kuid kahel nullil jagatise vasakotsal pole mingit tähendust, jagamine algab õieti kohal*. Sellepärast eraldatakse jagatava vasakotsal nii mitu numbrit kui mitu neid on jagajas, või kui sellest ei piisa, ühe numbri võrra rohkem: alles nõnda eraldatud arv jagatakse jagajaga ning tarviline on vaid järgmine kirjutis:

```
897654 | 321
2556   |------
       | 2796 + ... jääk 138
 3095
 2064
  138 (jääk)
```

Jagamisel mitmekohase arvuga teeb raskust jagatise üksikute numbrite leidmine; kuid rohkete harjutuste tagajärjel ilmub siin rida oskusi, millised võimaldavad saavutada jagamisel suurt väledust.

§35. Tähtis on oskus kiiresti jõuda otsusele, kas antud arv jagub jäägita (öeldakse lühidalt jagub) teise antud arvuga. Selleks on olemas palju tunnuseid, näiteks:

2-ga jaguvad vaid paarisarvud, s.o. arvud, millised lõpevad numbritega 0, 2, 4, 6 või 8.

3-ga jaguvad vaid arvud, mille ristsumma jagub kolmega.

Arvu ristsumma on selle arvu numbrite*) summa; 3508-a ristsumma on 3+5+0+8=16.

4-ga jagub vaid arv, mille kahe viimase numbriga tähistatud arv jagub neljaga (tähendab ka iga arv, mis lõpeb 2 nulliga).

5-ga jaguvad nulli või viiega lõppevad arvud.

8-ga jagub arv, mille kolme viimase numbriga tähistatud arv jagub kaheksaga.

---

*) lühend; peaks olema: selle arvu numbritega tähistatud arvude summa.

9-ga jagub arv, mille ristsumma jagub üheksaga.
11-ga jagub arv, kui tema üle ühe võetud numbrite summa ja ülejäänud numbrite summa vahe on null või jagub üheteistkümnega.

Näiteid: 513084 jagub 11-ga, sest
(5+3+8)-(1+0+4)=11;
48785 jagub 11-ga , sest
(4+7+5)-(8+8)=0;
10539472 ei jagu 11-ga, sest
(1+5+9+7)-(0+3+4+2)=13.

25-ga jaguvad arvud, mis lõpevad 00, 25, 50, või 75-ga.
125-ga jagub arv, kui tema kolme viimase numbriga moodustatud arv jagub 125-ga (tähendab ka kõik terved tuhanded).

§36. Arv, millega jagub mõni arv, nimetatakse viimase jagajaks ehk teguriks.
Arv, mis on jagajaks mitmele arvule, nimetatakse nende ühisjagajaks ehk ühisteguriks (lühend üt).
Arvusid, millel pole muid üt kui 1, nimetatakse ühisteguritа arvudeks, näit. 8 ja 15 on ühistegurita.
Arv, millel pole muid jagaj-aid kui üks ja arv ise, on algarv.
Arv, mis on mitme arvu kordarv, nim. nende ühiskordseks (lühend ük);

§37. Sageli kasulikuks jagatavuse tunnuseks osutub veel järgmine:

Kui arv jagub kahe ühistegurita arvuga, siis jagub ta ka nende korrutisega.

Näiteid: 6-ga jagub iga arv, mis jagub 2 ja 3-ga;

12-ga jagub iga arv, mis jagub kolme
ja neljaga;
18-ga jagub iga arv, mis jagub 2 ja 9-ga
(iga paarisarv, mis jagub 9-ga);
24-ga jagub iga arv, mis jagub 3 ja 8-ga.

VI. Murrud.

§38. Väide, et mitte iga täisarv pole jagatav teisega ei ole kooskõlas meie kogemustega: kinnitame, et näiteks 13 ei jagu viiega, kuid 13-kroonise tasu mingi ühise töö eest <u>võib</u> siiski jagada viie töölise vahel nõnda, et üks tööline saaks sama palju nagu iga teine. Kui kõik need 5 töölist panevad kokku oma palgaosad, siis tekib jälle 13 krooni, s.o. sama rahahulk, mis nende vahel jagati. Kui tahame siin ühe töölise teenistust ka väljendada arvuna, siis arvuvald ei või piirduda ainult täisarvudega: tuleb täiendada meil tarvitusel olevaid arvusid veel sellistega, mis lubavad toimetada jagamist ka siis, kui jagatav on väiksem jagajast. Seda võimaldavad <u>murdarvud</u> ehk <u>murrud</u>.

Loomulikku arvjada võime kujutada sirgel, millel on märgitud täpid näiteks sentimeetrilisel kaugusel üksteisest:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Arvud kujutuvad siin täppidena lõputul sirgel. Igale täisarvule vastab üks täpp ja igale märgitud täpile vastab üks täisarv. Nende märgitud täppide vahele saab aga paigutada veel täppe. Need vahepealsed täpid kujutavad kah arvusid, kuid täisarvudest erinevaid. Mõned neist uutest arvudest nimetatakse <u>murdudeks</u>. Näiteks veerand, pool, poolteist, kolmteist viiendikku on murdarvud.

§40. Murdude kirjapanemiseks vajame erilisi sümboleid. Pannes tähele, et just jagamisel tekkis vajadus murdarvude järgi, kasutatakse murdude tähistamisel jagamismärki — rõhtkriipsu kahe arvu vahel:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{13}{5}$$

Murru tähis tuletab meile alati meele murru päritolu: näiteks kaks kolmandikku ($\frac{2}{3}$) on kahe jagamise tulemus kolmega; kolmteist viiendikku ($\frac{13}{5}$) ilmub, kui jagada kolmteist viiega; veerand ehk üks neljandik ($\frac{1}{4}$) on arv, mis saadakse ühe terve jagamisel neljaga.

Arvudel, milliste abil kirjutatakse murdu, on oma nimetused:

$$\text{murd ehk murdarv} \left\{ \frac{13 \leftarrow \text{lugeja}}{5 \leftarrow \text{nimetaja}} \right.$$

Kui lugeja on väiksem nimetajast, siis nimetame murdarvu <u>lihtmurruks</u>;
kui lugeja pole väiksem nimetajast, siis murdarvu nimetame <u>liigmurruks</u>.

Lihtmurd on ühest tervest väiksem, kuna liigmurd on suurem või samasuur kui üks terve.

Üks terve ja iga teine täisarv laseb end kujutada liigmurruna meelevaldse nimetajaga, näiteks:

$1 = \frac{1}{1}$, sest $1 \cdot 1 = 1$; $4 = \frac{4}{1}$, sest $4 \cdot 1 = 4$
$1 = \frac{2}{2}$, sest $1 \cdot 2 = 2$; $6 = \frac{12}{2}$, sest $6 \cdot 2 = 12$
$1 = \frac{3}{3}$, " $1 \cdot 3 = 3$; $5 = \frac{15}{3}$, " $5 \cdot 3 = 15$.

§41. Murdude tarvituselevõtuga osutub ühe täisarvu jagamine teisega ikka võimalikuks ja on tihenenud meie arvuvald; murrud esinevad selles täisõiguslikkude liikmetena. Nüüd, kõneldes <u>arvust</u>, mõtleme selle sõna all loomulikku ehk <u>täisarvu</u> kui ka murdu.

Kõik tehted, milliseid me senini toimetasime vaid loomulikkude arvudega, tuleb rakendada ka murdudele, teiste sõnadega ka murdudega tuleb arvutada, s.o. neid tuleb liita, lahutada, korrutada ja jagada; iga tehte tulemuseks on arv

selle sõna uues mõttes, s.o. kas murd- või täisarv.
Selle tõttu vajame arvutamiseoskuse täiendamist ja eelkõige lähemat tutvust murdude mõningate omadustega.

§42. (XXIV) Murru lugeja korrutamisel või tema nimetaja jagumisel 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga jne. suureneb murru väärtus 2, 3, 4, 5 jne. korda.

(XXV) Murru lugeja jagamisel või tema nimetaja korrutamisel 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga jne. väheneb murru väärtus 2, 3, 4, 5, jne. korda.

(XXVI) Murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat samaaegselt korrutada või jagada ühe ja sama arvuga: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}$; $\frac{4}{10}=\frac{4:2}{10:2}=\frac{2}{5}$.

murdu $\frac{1}{2}$ saab, teda laiendades, kirjutada kujul $\frac{2}{6}$ ja murdu $\frac{4}{10}$ saab, teda taandades, kirjutada kujul $\frac{2}{5}$. Sel puhul muutub, teiseneb murru sümboolne kuju ja nimetus, kuna tema suurus ehk väärtus jääb muutumatuks. Murru lugeja ja nimetaja samaaegset korrutamist mingisuguse arvuga nimetatakse murru laiendamiseks ja nende samaaegset jagamist mingisuguse arvuga - murru taandamiseks. Murdu saab teisendada laiendamise või taandamise teel.

§43. Ühesuguste nimetajatega murrud on samanimelised, kuna mitte võrdsete nimetajatega murrud kutsutakse isenimelisteks. Kasutades tõsiasja, et murru laiendamisel tema väärtus jääb endiseks, võib kaks või rohkem isenimelist murdu teisendada samanimelisteks.

Olgu meil näiteks tegemist murdudega

$$\frac{2}{3} \text{ ja } \frac{4}{5}$$

On kerge laiendada murdu $\frac{2}{3}$ sääraseks, mille nimetajaks on 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 või veel mõni teine kolme kordarv; samuti kerge on laiendada murdu $\frac{4}{5}$ murruks, mille nimetaja on

10, 15, 20, 25, 30, 35, 40

või veel mõni teine viie kordarv. Mõlemas kirjutatud arvude jadas leidub võrdseid arve, näit. 15, 30, 45. Igaüks viimasest arvest on kolme ja viie, s.o. meile antud murdude nimetajate ühiskordsed; igaüks neist kõlbab antud murdude ühisnimetajaks. Otstarbne on valida võimalikult väike ühisnimetaja, antud juhul on selline 15. Et muuta kolmandikud viieteistkümnendikeks, tuleb nimetaja kolm korrutada viiega, sest 15:3=5; murru väärtuse säilitamiseks tuleb siis ka lugeja 2 korrutada 5-ga:

$$\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15};$$

samuti

$$\frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15}$$

Arvu, millega murru laiendamisel korrutatakse lugejat ja nimetajat, nimetame murru täiendusteguriks.

§44. Murdude liitmisel ja lahutamisel võivad esineda kaks juhtu: asjaosalised murrud on kas samanimelised või isenimelised.

Samanimeliste murdude liitmisel või lahutamisel toimetatakse nõutud tehted ainult murdude lugejatega, saadus võetakse lugejaks, kuna nimetajaks jääb sama nimetaja, mis on antud murdudel.

Näiteid: 1. $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3+1+5}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

2. $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$

Tähendab: samanimeliste murdude summa on murd, mille nimetajaks on liidetavate nimetaja, ja lugejaks liidetavate lugejate summa;
samanimeliste murdude vahe on murd, mille nimetajaks on antud murdude nimetaja, ja lugejaks on vähendatava ja lahutatava lugejate vahe.

Isenimeliste murdude liitmisel ja lahutamisel teisendame eelkõige antuid murde samanimelisteks ja siis talitame ülalantud reeglite põhjal, näiteks:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

või

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$$

Täisarvu liitmist murruga paneme kirja nõnda

$$5+\frac{2}{3}=5\frac{2}{3}$$

ja nimetame säärast summat segaarvuks.
Segaarvu võib kirjutada liigmurruna ja ümberpöördult - liigmurdu võib kirjutada segaarvuna, näit.: $5\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}=\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$

või lühemalt $5\frac{2}{3}=\frac{5.3+2}{3}=\frac{17}{3}$

samuti $\frac{17}{3}=\frac{15+2}{3}=\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}=5\frac{2}{3}$.

Viimane näide juhatab meile võimaluse viia ikka lõpuni täisarvude jagamist, loobudes jäägist.
Segaarvude liitmisel ja lahutamisel toimetame need tehted enne murdosadega eraldi ja siis täisosadega eraldi, ning siis liidame saadud summad, näiteks:

$$2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}=6+\frac{2+1}{4}=6+\frac{3}{4}=6\frac{3}{4};$$

$$6\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}=\frac{10+12}{15}+8=\frac{22}{15}+8=1\frac{7}{15}+8=9\frac{7}{15}$$

$3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} + 2 - \frac{1}{6} + 2 = 2\frac{1}{6}.$

$7\frac{3}{8} - 2\frac{5}{6} = 7 + \frac{3}{8} - 2 - \frac{5}{6} = 5 + \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = 4 + 1 + \frac{9}{24} - \frac{20}{24} =$

$= 4 + \frac{24}{24} + \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = 4 + \frac{33}{24} - \frac{20}{24} = 4 + \frac{33-20}{24} = 4\frac{13}{24}.$

Vilumuse kasvades säärane arvutamine toimub palju lühemalt, näiteks nõnda:

$$\begin{array}{rl} 2\frac{1}{2} = & 2\frac{2}{4} \\ +4\frac{1}{4} = & 4\frac{1}{4} \\ \hline & 6\frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 6\frac{2}{3} = & 6\frac{10}{15} \\ +2\frac{4}{5} = & 2\frac{12}{15} \\ \hline & 8\frac{22}{15} = 9\frac{7}{15} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3\frac{1}{2} = & 3\frac{3}{6} \\ -1\frac{1}{3} = & -1\frac{2}{6} \\ \hline & 2\frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 7\frac{3}{8} = & 7\frac{9}{24} \\ -2\frac{5}{6} = & 2\frac{20}{24} \\ \hline & 4\frac{13}{24}. \end{array}$$

Arvutamise saaduse teisendame ikka nõnda, et segaarvu murdosa oleks lihtmurd.

§45. Murru korrutamine täisarvuga toimub lihtsalt, kui näeme täisarvuga korrutamises võrdsete tegurite liitmist, näiteks

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2+2+2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Kui loobume teisest ja kolmandast lülist, siis võime kirjutada $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$;

püüame loobuda veelgi keskmisest lülist, kirjutades $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

Kui korrutamise saadus on liigmurd, siis harilikult anname talle segaarvu kuju.

Korrutamist murruga nimetatakse ka <u>osa leidmiseks</u>.

§46. Kahe murru korrutamise seaduse leidmisel aidaku meid näide: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$. Korrutada kaks viiendikku kolme neljandikuga tähendab leida kolm neljandikku kahest viiendikust. Kolme neljandiku leidmiseks peame tundma üht neljandikku. Üks neljandik on neli korda väiksem tervest. Tervena esineb meil sel korral $\frac{2}{5}$, sest temast otsime osa. Ühe neljandiku leidmiseks kahest viiendikust peame $\frac{2}{5}$ vähendama neli korda; selleks peame viimase murru nimetajat suurendama neli korda ehk korrutama neljaga: üks neljandik kahest viiendikust on

$$\frac{2}{4 \cdot 5} = \frac{2}{20}$$

Kui $\frac{1}{4}$ kahest viiendikust on $\frac{2}{20}$, siis kolm neljandikku on viimasest murrust kolm korda suurem; murru $\frac{2}{20}$ suurendamiseks kolm korda peame selle murru lugejat suurendama kolm korda ehk korrutama kolmega:

$$\frac{2 \cdot 3}{20} = \frac{6}{20}.$$

Kui on võimalik taandada murd, siis tuleb seda teha

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

seega

üks neljandik kahest viiendikust on $\frac{2}{4 \cdot 5}$

kolm neljandikku " " on $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}$

ehk kokkuvõetult: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Tähendab:

murdude korrutamisel me jagame lugejate korrutise nimetajate korrutisega.

Parem on toimetada taandamist enne lugejate ja nimetajate korrutamist

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2} \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

või veel parem nõnda

$$\frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{5} = \frac{3}{10}.$$

§47. Jagamisele vaatame kui korrutamise vastupidisele tehtele. 7 : $\frac{2}{3}$ tähendab leida arv, mille korrutis kahe kolmandikuga on seitse; võiks ka öelda: leida arv, mille kaks kolmandikku on 7. Kui $\frac{2}{3}$ meile alles teadmatust jagatisest on 7, siis $\frac{1}{3}$ temast on kaks korda vähem seitsmest; terve jagatis ehk kolm kolmandikku temast on kolm korda suurem kui üks kolmandik:

2 kolmandikku jagatisest on 7
1 " " " " " $\frac{7}{2}$
3 kolmandikku " " " $\frac{7}{2}\cdot 3$

seega $7:\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\cdot 3=\frac{7\cdot 3}{2}=7\cdot\frac{3}{2}$

$$7:\frac{2}{3}=7\cdot\frac{3}{2}$$

Leidsime: jagada $\frac{2}{3}$-ga tähendab korrutada $\frac{3}{2}$-ga. Igaüks neist kahest murrust on teisele <u>pöördmurruks.</u> Võime öelda:

murruga jagada tähendab korrutada jagatav jagaja pöördmurruga.

Näiteid: $\frac{3}{5}:2=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

$\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

§48. Murrud, mille nimetajaks on 10, 100, 1000 või mõni muu kümne aste, eraldatakse erirühma.

$\frac{1}{10}$ on 10 korda suurem kui $\frac{1}{100}$
$\frac{1}{100}$ " 10 " " " $\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$ " 10 " " $\frac{1}{10000}$

Arvesse võttes seda, võib kirjutada murdu, mille nimetajaks on 10 või mõni kümne aste, real ilma murru kriipsuta, kui laiendada kümnendnumeratsiooni kohareeglit ühelistest alla poole s.o. paremale poole

Tähises 1 1 1 1
I II III IV

I üks tähendab üht tuhandet
II " " üht sada, s.o. 10 korda vähem kui tuhat
III" " üht kümmet, s.o. 10 korda vähem kui sada
IV " " üht, s.o. 10 korda vähem kui kümme .

Kui nüüd kirjutada juure veel üks 1, siis peaks ta tähendama üht kümnendikku; tuleks vaid kuidagi näidata, kus arvu tähises on ühelised. Näitamine sünnib koma abil üheliste järel.
Kirjutises

	1	1,	1	1	1
	I	II	III	IV	V

I üks tähendab üht kümmet (kümneliste järk)
II " " üht (üheliste järk)
III " " üht kümnendikku (kümnendikkude j.)
IV " " üht sajandikku (sajandikkude järk)
V " " üht tuhandendikku (tuhandendikkude järk).

Kui arvus puudub mõni järk, siis arvu tähises puuduva järgu asemele kirjutatakse null - see reegel püsib ka siin.

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$\frac{1}{1000} = 0{,}001$$
jne.

$3\frac{8}{10} = 3{,}3$ loetakse: "kolm koma kaheksa" või "kolm täit ja kaheksa kümnendikku".

$\frac{6}{10} = 0{,}6$

$\frac{103}{1000} = 0{,}103$ loetakse: "null koma üks null kolm" või "103 tuhandendikku".

Koma ees ja taga võib olla kohti mõttelt - ükskõik kui palju, tegelikult aga paremal pool koma harva esineb rohkem kui kolm-neli kohta.
Kümnendkujus antud segaarvus (näiteks 375,064) arv vasakul poolel komast on täisosa (375), kuna komast parempoolne arv on murdosa (064).
Reas, koma abil ja kümnendnumeratsiooni kohareegli arvestamisel kirjutatud murdu nimetatakse kümnendmurruks. Vahetegemiseks nimetame siis kriipsu abil kirjutatud murdu harilikuks murruks.

§49. Võrreldes näiteks arvusid 4,36 ja 43,6 veendume, et

(XXVII) koma ülekandmisel ühe koha võrra paremale poole suureneb arv 10 korda.

ja

(XXVIII) koma ülekandmisel ühe koha võrra vasakule poole väheneb arv 10 korda.

$$4{,}36 = 4 + 0{,}3 + 0{,}06$$
$$\text{ja } 43{,}6 = 40 + 3 + 0{,}6.$$

§50. Kümnendmurdude liitmine ja lahutamine toimub samuti nagu loomulikkude arvude puhul: antud kümnendmurrud kirjutatakse näiteks üksteise alla nõnda, et ühesugused järgud oleksid kohakuti, ja siis liidetakse või lahutatakse järkude kaupa.

§51. Korrutamine ja jagamine 10, 100, 1000 või mõne muu astmega kümnest toimub jagatava koma ülekandmise abil juhiste (XXVII ja XXVIII) põhjal vastavalt paremale või vasakule poole kas ühe, kahe, kolme või rohkem koha võrra.

§52. Kümnendmurdude korrutamisel korrutame neid arve justkui polekski komasid ja korrutises eraldame nii mitu kohta komaga paremalt poolt, mitu on kõigis tegurites kokku kohti nende murdosades, näiteks:

$$2{,}3 \cdot 1{,}01 = \frac{23}{10} \cdot \frac{101}{100} = \frac{23 \cdot 101}{10 \cdot 100} = 2{,}323$$

sellepärast võime kirjutada

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \cdot 1{,}01 \\ \hline 23 \\ \hline 2{,}323 \end{array}$$

§53. Kümnendmurru tarvitamisel loomulikkude arvude jagamisel võime esinevat jääki (ja puuet) teha meelevaldselt väikeseks, näiteks:

342 : 17 = 20,1176
2
2,0
0,30
0,130
0,0110
0,0008

tähendab

342 : 17 = 20 + ... jääk 2 ≈ 20
või 342 : 17 = 20,1 + ... jääk 0,3 ≈ 20,1
või 342 : 17 = 20,11 + ... jääk 0,13 ≈ 20,11
või 342 : 17 = 20,117 + ... jääk 0,011 ≈ 20,117
jne.

§54. Jagamine kümnendmurruga taandub jagamisele täisarvuga, sest näiteks

$$43 : 0,06 = 43 : \frac{6}{100} = \frac{43 \cdot 100}{6} = \frac{4300}{6}$$

sel põhjal

$$43 : 0,06 = 4300 : 6$$

Jagamisel kümnendmurruga kustutatakse jagajas koma; selle tõttu suureneb jagaja 10, 100, 1000 või rohkem korda; et jagatis jääks muutumatuks, kirjutatakse jagatavale juure nii mitu nulli, mitu kohta oli antud jagajas koma taga.

§55. Sajandikud ja tuhandendikud esinevad tegeliku elu arvutustes väga sagedasti; sellepärast on neil erinimetused - <u>protsendid</u> ja <u>promilled</u>:
0,01 nimetatakse üheks protsendiks; 0,01 = 1%
0,001 " üheks promilleks; 0,001 = 1‰
0,1% = 1‰.
Protsentidega arvutamisel võib esineda vajadus
a) leida antud arv protsente teisest antud arvust,

b) määrata, mitu protsenti on üks arv teisest, ja
c) leida arv, millest meil on teada antud arv protsente.

Näiteid:

a) Leida 15% arvust 432.
$15\% = 0,15$; leida 15% arvust 432 tähendab leida viisteist sajandikku temast; selleks peab 432 korrutama viieteistkümne sajandikuga: 15% arvust 432 on $432 \cdot 0,15 = 64,80$.

b) Mitu protsenti on 17 arvust 65?
17 : 65 0,262; jagatises näeme 26 sajandikku,
 400
  100
seega 17 on ligikaudu 26% arvust 65.

c) Leida arv, mille 24% on 60.
Peame leidma arvu, millest 24 sajandikku (0,24) on 60.
Üks sajandik otsitavast arvust on $\frac{60}{24}$;
terve otsitav arv ehk
sada sajandikku temast on $\frac{60}{24} \cdot 100 = \frac{64 \cdot 100}{24}$
Lühemalt: kui 24% otsitavast arvust on 60, siis see otsitav arv on

$$60 : 0,24 = 6000 : 24 = 250.$$

 120
  0

VII. Matemaatiline probleem. Ligikaudsed arvud.

§56. Suuruse all mõistame kõike, mis on väljendatav arvudega. Väga palju elunähteid on seotud suurustega, seega ka arvudega. Kuid igapäevases elus meile iialgi ei esine sääraseid paljad arvud nagu need, milliseid uurisime senini. Igapäevases elus arvud on seotud ikka mitmesuguste nimetustega: kroonid, sendid, meetrid, grammid, liitrid, tunnid, kraadid, voldid, kalorid ja palju teisi erilisi nimetusi ning kõigi võimalike asjade nimed saadavad elus ettetulevaid arve.

Suur hulk eluavaldusi nõuab meilt uute arvude leidmist tuntud arvude põhjal. Viimaseid kutsutakse sel korral antud arvudeks, ehk andmeteks, kuna nende põhjal leitavad on otsitavad ehk tundmatud arvud (vastused).

Mingisuguse nähtega seotud andmete loetelu ning otsitavate nimetamine ühes seose kirjeldusega, millises on andmed ja otsitavad, moodustab matemaatilise ülesande ehk probleemi; leida temas nimetatud tundmatud tähendab lahendada ülesannet. Ülesande lahendamise tähtsaks abinõuks on arvutamine. Viimast toimetame nimeta arvudega ja lisame tarvilised nimetused arvutamise saadustele.

Iga ülesande lahendamiseks on tarviline: 1)selge äratundmine, mis nimelt tuleb leida; 2)täiuslik arusaamine ülesandest; 3) kindlakstegemine, millist arvutamist ja millises järjekorras on tarvis toimetada; 4) arvutamine ja 5) vastuse kontrollimine.

§57. Ülesande lahendamisega seotud arvutamisel osu-

tub väga kasulikuks enne täpsat arvutamist toimetada ligikaudset arvutamist ja leida esialgne vastus ümmarguse arvuna.
Ümmardada antud arv, tähendab asendada viimane teise arvuga, mis on eelmisele enam või vähem lähedane, kuid ulatub ainult ettemääratud järgu ühikuteni.
Näiteks 402 on väga lähedane neljasajale, me võime 402 asendada 400-ga. Ütleme sel korral "402 on ligikaudu võrdne 400-ga" ja kirjutame $402 \approx 400$.
Arvu ümmardamisel me eksime ikka tõe vastu; aga kui me teame tehtud vea suurust, siis eksimine pole saatuslik, me võime igal ajal tõde uuesti jalule seada. Meie näites viga on kaks, s.t. sel korral ligikaudset arvu peab liitma kahega, et saada täpsat arvu. Ka veast on mõnikord küllaldane teada vaid tema ligikaudset suurust.
Iga ümmardatav arv asub kahe seatud nõudmistele vastava ümmarguse arvu vahel. Näiteks

$$500 > 402 > 400$$

Niihästi 500 kui ka 400 on ligikaudselt võrdsed 402-ga, kui ümmardamine sünnib täissadades, kuid ühel korral viga on 98, teisel korral kõigest 2.
Kui ütleme

$$402 \approx 500 \text{ (viga = - 98)},$$

siis oleme ümmardanud liiaga; märk miinus vea ees näitab, et ümmardatud arvust tuleb lahutada viga, et saada antud arv. Kui ütleme

$$402 \approx 400 \text{ (viga = 2)},$$

ümmardame puudega ja viga tuleb liita ümmardatud arvuga, et saada antud arv.
Me eelistame seda ümmardamist, mis sünnitab väiksema vea, kui erilised nõudmised ei sunni meid talitama teisiti (näit. raudtee-, posti-, tolli-tariifid).

Olgu meile antud arv 219654 (elanikkude arv Harjumaal 1922.a. rahvaloenduse and.-meil). Seda arvu võib mitmeti ümmardada

täiskümneteks	219660	(viga=-6) või
	219650	(viga=4)
täissadadeks	219700	(viga=-46) või
	219600	(viga=54)
täistuhandeteks	220000	(viga=-346) või
	219000	(viga=654)
täiskümnetuhandeteks	220000	(viga=-346) või
	210000	(viga=9654)
täissajatuhandeteks	300000	(viga=-80346) või
	200000	(viga=19654).

Igast paarist üldiselt eelistatavam on allakriipsutatud ligikaudne arv, kus ümmardamisel tehtud viga on väiksem. Selle asemel, et öelda "ümmardatud täiskümneteks, täissadadeks, täistuhandeteks jne," öeldakse ka ümmardatud täpselt kuni kümneni", "täpselt kuni sajani", "täpselt kuni tuhandeni" jne. Muidugi võib ümmardada arvusid ka täpselt kuni ühe kümnendikuni, täpselt kuni ühe sajandikuni jne.; sel korral öeldakse ka täpselt kuni esimese, teise, kolmanda jne. kohani pärast koma.
Nõudmine ümmardada arv täpselt kuni kümneni või ümmardada arv täiskümneteks rahuldub kahe ligikaudse arvuga, millest üks on liiaga, teine puudega.
Kui tahetakse vältida kahe õige vastuse võimalikkust, siis seatakse ümmardamise nõudmine teisiti ja öeldakse
"ümmardada veaga mitte üle viie" mitte üle 50, mitte üle 500, mitte üle 5000, mitte üle 0,5, mitte üle 0,05 jne.
Muidugi võib ka nõuda arvude ümmardamist veaga mitte üle kahe või mõne muu arvu.
Tegelikult arvude ümmardamine toimub väga kiires-

ti. Olgu näiteks vaja ümmardada arv 732,5643 veaga mitte üle 0,005 s.t. ümmardatud ehk ligikaudses arvus viimane number pärast koma peab olema sajandikkude järgust. Sellepärast kustutatakse kõik numbrid, mis seisavad kaugemal sajandikest ja saadakse

$$732,5643 \approx 732,56 \ (\text{viga} = 0,0043)$$

Kui esimene kustutamisele tulev number on viis või viiest suurem, siis suurendatakse viimane allesjäänud number ühe võrra, et oleks täidetud nõudmine vea lubatava suuruse kohta; näiteks eelmise arvu ümmardamisel veaga mitte üle 0,05 saadakse

$$732,5643 \approx 732,6 \ (\text{viga} = -0,0357).$$

Üal Harjumaa elanikkude arvu ümmardamisel ei kustutatud numbreid allapoole ümmardamise piirist (nõnda võib talitada ainult arvu murdosa ümmardamisel), vaid asendati nad nullidega. Tähtis on pidada meeles, et ligikaudses arvus viimane maksev number ei vääri meie usaldust: tegelikult võib ta mõnikord olla ühe võrra vähem, kui ümmardamine sündis reeglipäraselt.

§58. Nagu parimal laskuril mitte kõik kuulid ei taba märki, nii ka iga arvutaja eksib. Juba säärane algeline toiming nagu loendamine on seotud vigadega, kui loendatavate esemete arv on suur. Keegi ei saa vanduda, et näiteks ülalnimetatud Harjumaa elanikkude arv on täppis. Tegelikkuses ligikaudsed arvud esinevad sagedamini täpsatest arvudest. Vigade olemasoluga tuleb leppida. Kuid mitte iga veaga ei või leppida. Arvutuselise toimingu paratamatu vea lubatavuse üle saab otsustada alles siis, kui on teada, mitu korda arv ise on suurem temas peituvast veast. Enamikul juhtudest lepitakse sellega, kui arv ise on vähemalt 100 korda suurem tehtud veast. Kui arvu 1934 asemel võetakse arv 1950 (viga=-16), siis eksitakse 16 võrra; 1934 on umbes 121 korda suurem tehtud veast ja viga on vastuvõetav. Viga 16 nimetatakse <u>absoluutseks veaks</u>, kuna arv $\frac{16}{1934}$ ehk umbes $\frac{1}{121}$, mis näitab, mitu korda absoluutne viga on väiksem arvust enesest, nimetatakse <u>relatiivseks veaks</u>. Relatiivne viga määratakse harilikult protsentides; meie näites relatiivne viga on ligikaudu 0,8%.

Ka tehteid võib toimetada ligikaudselt soovitava täpsusega. Olgu näiteks toimetada ligikaudselt järgm. liitmist ja lahutamist absoluutse veaga mitte üle 0,05:

$$\begin{array}{r} 1,893723 \\ 5,144460 \\ +\ 2,114000 \\ \hline 9,152183 \approx 9,2; \\ 9,151 \approx 9,2; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15,2337641 \\ -8,3704250 \\ \hline 6,8633391 \approx 6,9; \\ 6,863 \approx 6,9: \end{array}$$

Me algame sel korral liitmist või lahutamist mitte antud arvude kõige alamast järgust, vaid ainult kahe koha võrra paremale poole lõplikult nõuetavast ja ümmardame seaduse (näidatud alumises reas). Võime olla kindlad, et absoluutne viga sel korral ei ületa 0,05.

Korrutamist ja jagamist on samuti võimalik kindlate juhiste järgi toimetada ligikaudselt ette määratud vea ülemmääraga. Neid juhiseid teadmata võib leppida sellega, et tarbekorral korrutada ja jagada väga umbkaudselt, teadmata millise veaga see sünnib. Näiteks,

$61 \cdot 1194 \approx 72000$, sest $61 \cdot 1194 \approx 60 \cdot 1200$;
$78,0087 : 3,27 \approx 10$, sest $78,0087 : 3,27 \approx 30 : 3$;
$9\frac{1}{5} \cdot 6\frac{3}{4} \approx 63$, sest $9\frac{1}{5} \cdot 6\frac{3}{4} \approx 9 \cdot 7$
9% arvust 7324 on 730, sest $9\% \approx 0,1$.

§59. Sagedasti matemaatilise probleemi andmed ise on ligikaudsed arvud. Sel korral lahendused on paratamatult ka ainult ligikaudsed arvud, vead on vältimatud ja ette määratud andmete vigadega. Seepärast on ekslik ja mõttetu püüda taotella lahenduses suuremat täpsust, s.o. väiksemat viga kui andmete eneste oma.

§60. Heaks jõudu ja aega kokkuhoidvaks võtteks matemaatilise probleemi lahendamisel on otsitavate ja mõningate andmete tähistamine kirjatähtede abil ning sidumine tehte- ja muude märkide abil enne lõpulikku arvutamist. Selle võtte üksikasjaline käsitlus kuulub algebra valda.

--------------- 0 ---------------

Kirjatööde paljundusbüroo "Velox",
Tartu, Gustav-Adolfi t.18-5.