TALLINNA TEHNIKUM.

Analüütilise geomeetria ülesanded.

KOKKUSEADNUD V. PASS.

TALLINNAS 1927 A.

RM.-,50

TALLINNA TEHNIKUM.

Analüütilise geomeetria ülesanded.

KOKKUSEADNUD V. PÄSS.

TALLINNAS 1927 A.

EESSÕNA.

Käesolev analüütiline geomeetria ülesannete kogu on kokkuseatud selleks, et pakkuda üliõpilastele harjutusmaterjaali, mis võimaldaks neile kursuses läbivõetud ainesse süveneda, lihtsate küsimuste lahendamisega. Just analüütilise geomeetria alal tundub harjutusmaterjaali puudus ja seda ka võõrakeelses kirjanduses, mis meie üliõpilastele tarvitamiseks kätte saadav.

Kogu on korraldatud nõnda, et igas paragrahvis ette tulevate ülesannete lahendamiseks vajaminevad valemid on üles-loetud sama paragrahvi algul.

V. Päss.

T A S A P I N N A L I N E   G E O M E E T R I A.

§ 1. Punktid tasapinnal.

Valemid: 1) Kahe punkti A (x_1, y_1) ja B (x_2, y_2) kaugus $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2) Jagaja punkti koordinaadid $x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$, $y = \frac{m.y_1 + n.y_2}{m+n}$, kui kahe punkti A (x_1, y_1) ja B (x_2, y_2) kaugus on jagatud kaheks osaka punkti C läbi nõnda et $\overline{AC} : \overline{CB} = \frac{n}{m}$

3) Kolmnurga pind, kui antud on kolmnurga tipud A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ja C (x_3, y_3) :

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Leida punktide A ja B kaugus, kui antud on:

1) A (8,7), B (5,3); 2) A (17,11), B (-7,4); 3) A (13,-6), B (1,- 1); 4) A (-7,-8), B (-1,0); 5) A $(1\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$, B $(\frac{7}{10}, -\frac{5}{6})$; 6) A (1,1; 3,8), B (-0,5; 1,4); 7) A (-3,0), B (0,7); 8) A (5,-8), B (0,0).

2. Kui suured on punkt C koordinaadid, mis jagab antud suhtes $\frac{n}{m}$ joonlõigu AB kaheks:

1) A (3,2), B (8,7) ja $\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$; 2) A (5,-3), B (-3,9) ja $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$; 3) A $(1\frac{3}{4}, \frac{2}{5})$, B $(\frac{2}{3}, - 7)$ ja $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$; 4) A (1,7;-3,6), B (0;2,8) ja $\frac{n}{m} = 1$?

3. Leida kolmnurga ABC külgede pikkused, kui on antud:

1) A(8,9), B(3,-3) ja C(-4,4); 2) A(13,8), B(2,-6) ja C(9,15); 3) A(-9,-10), B(8,-6) ja C(-4,-16).

4) Kui suured on kolmnurga ABC küljepoolitajad (mediaanid), kui on antud:

1) A(3,8), B(11,2) ja C(-5,-6); 2) A(-3,6), B(3,9) ja C(-5,-8) 3) A(5,-9), B(-12,8) ja C(-3,-5); 4) A(0,0), B(-5,5) ja C(-9;13) ?

5. Määrata kolmnurga ABC raskuskeskpunkti koordinaadid, kui on antud:

1) A(2,3), B(8,7) ja C(4,-5); 2) A(3,4), B(-9,6) ja C(-1,8); 3) A(0,3), B(0,0) ja C(7,-8).

6. Arvutada kolmnurga ABC pind, kui on antud:

1) A(-1,-10), B(8,3) ja C(10,13); 2) A(8,5), B(2,-3) ja C(-3,7); 3) A(-8,9), B(3,5) ja C(-3,4).

7. Määrata punkti koordinaadid tingimusega, et see punkt ühekaugusel asuks kolmest antud punktist A,B ja C, kui on antud:

1) A(0,0), B(-5,6) ja C(-3,7); 2) A(16,-15), B(-1,2) ja C(3,-6); 3) A(5,-9), B(-12,8) ja C(-3,-5).

§ 2. Ülesanded sirgjoone kohta.

Valemid: 1) Üldine sirgjoone võrrand: Ax + By = C.

2) Sirgjoone võrrand, kui sirgjoon on määratud telglõikude a ja b kaudu: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3) Sirgjoone võrrand, kui sirgjoon on määratud tõusunurga tangensi m ja y-telje lõigu n kaudu: $y = mx + n$.

4) Sirgjoone võrrand, kui sirgjoon on määratud kahe punkti $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ kaudu: $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\cdot(x - x_1)$ ehk

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

5) Sirgjoone võrrand, kui sirgjoon on määratud punkti $A(x_1, y_1)$ ja tõusunurga tangensi m kaudu: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

6) Sirgjoone võrrand, kui sirgjoon on määratud alguspunktist sirgjoonele kujutatud normaaljoone pikkuse p ja tema tõusunurga α kaudu: $x.\cos\alpha + y.\sin\alpha = p$.

Et igasugusele sirgjoone võrrandile anda normaal kuju, selleks peab tema kõiki liikmeid jagama ruutjuurega x ja y koeffisientide ruutude summast, näit. võrrandile: $Ax + By - C = 0$ vastav normaal kuju oleks :

$$\frac{Ax + By - C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0, \text{ s.t.}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha \text{ ja}$$

$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = p$. Punkti $P(x_1, y_1)$ kaugus sirgjoonest $Ax + By = C$ on $d = \frac{Ax_1+By_1-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

7) Sirgjoone seisukoha erijuhused ja neile vastavad võrrandid:

a) Läbi alguspunkti mineva sirgjoone võrrandis peab puuduma vabaliige, näit. üldisel juhusel: $Ax + By = 0$.

b) x - teljega paralleelse sirgjoone võrrand: $y = b$.

c) y - teljega paralleelse sirgjoone võrrand: $x = a$.

d) x ja y - telje võrrandid on vastavalt: $y = 0$ ja $x = 0$.

8) Et kahe sirgjoone lõikpunkti koordinaate määrata selleks on vaja nende võrrandid kui süsteemi ühiselt lahendada. Lahendusest leitud võrrandite ühised juured x_1 ja y_1 ongi lõikpunkti koordinaatideks.

9) Kahe sirgjoone läbi sünnitatud nurga φ tangensi valem, kui antud sirgjoonte tõusunurga tangensid on vasatvalt m ja m_1: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m+m_1}{1+m\cdot m_1}$.

Sellest valemist järgneb: 1) kui sirgjooned on paralleelsed, siis peab nende vaheline nurk φ ja selle tangens võrduma nulliga ehk $m = m_1$; 2) kui sirgjooned on perpendikulaarsed, nõnda et $\varphi = 90^0$, siis peab $1 + m.m_1 = 0$, ehk $m = -\frac{1}{m_1}$.

8.[x] Määrata telglõigud, kui antud on sirgjoone võrrand: 1) $9x + 7y = 25$; 2) $4x - 5y = 20$; 3) $6x - 11y = -14$; 4) $2,5x + 3,6y = 4,8$; 5) $7,2y - 8,5x = 10,6$.

9. Leida sirgjoone võrrand antud telglõikude põhjal (a on x - telje lõik ja b on y - telje lõik):
1) $a = 2$, $b = 3$; 2) $a = -5$, $b = 7$; 3) $a = 8$, $b = -4$; 4) $a = -1,2$; $b = -0,9$.

10. Leida sirgjoone võrrand, kui on antud sirgjoone tõusunurga tangens m ja y - telje lõik n:
1) $m = 2$, $n = 3$; 2) $m = -3$, $n = 1$; 3) $m = \frac{2}{3}$, $n = -5$; 4) $m = -0,5$; $n = -2,5$.

11. Leida sirgjoone võrrand, kui on antud tõusunurk α ja y - telje lõik n:
1) $\alpha = 0^0$, $n = 2$; 2) $\alpha = 30^0$, $n = -3$; 3) $\alpha = 45^0$, $n = -2,5$; 4) $\alpha = 135^0$, $n = \frac{3}{4}$; 5) $\alpha = 120^0$, $n = -3,5$.

12. Leida läbi kahe antud punkti kujutatud sirgjoone võrrand:
1) A(3,4), B(2,7); 2) A(2,-3), B(6,-4); 3) A(-3,5;0), B(2,7;3); 4) A($2\frac{1}{2}$,-3), B(0,$\frac{3}{4}$); 5) A(0,-2,5), B(-5,2;4).

---

[x] On soovitav peale analüütilise ülesannete lahenduse teha ülesande nõuetele vastavalt graafiline konstruktsioon.

13. Leida sirgjoone võrrand, kui on antud sirgjoone tõusunurga tangens m ja üks punkt, mille läbi läheb sirgjoon:

1) $m = -1$, $A(2,2)$; 2) $m = 0$, $A(-3,5)$; 3) $m = \frac{2}{3}$, $A(-5,0)$; 4) $m = \frac{4}{3}$, $A(2,5;0)$; 5) $m = -1\frac{1}{2}$, $A(3,-4\frac{1}{2})$.

14. Leida sirgjoone võrrand, kui on teada tema tõusunurk ja üks punkt, mille läbi läheb sirgjoon:

1) $\alpha = 60°$, $A(1,-5)$; 2) $\alpha = 150°$, $A(-0,5;2)$.

15. Kirjutada sirgjoone võrrand algpunktist sirgjoonele kujutatud normaali pikkuse p ja normaali tõusunurga α kaudu:

1) $p = 3$, $\alpha = 30°$; 2) $p = -2$, $\alpha = 45°$; 3) $p = 3,5$; $\alpha = 120°$; 4) $p = 2,7$; $\alpha = 150°$.

16. Leida sirgjoone kaugus algpunktist, kui antud on sirge võrrand:

1) $3x - 4y = 7$; 2) $3y - 5x = 1$; 3) $y = -x + 2$;
4) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$; 5) $\frac{2}{3}y - \frac{x}{2} = 1$.

17. Määrata sirgjoone kaugus punktist, kui on antud:

1) $3x - 7y = 5$, $A(2,-3)$; 2) $y = -2x + 3$, $A(-5,7)$;
3) $2,4x + 3,1y = 0,1$; $A(-1,3)$.

18. Leida antud sirgel niisugune punkt, mis kahest antud punktist ühekaugusel asuks:

1) $y = 2x + 3$, $A(-1,2)$, $B(3,0)$; 2) $2x + 5y = 3$, $A(2,-3)$, $B(0,5;1)$.

19. Kirjutada sirgjoone võrrand tingimusel, et sirg-

joon läbi antud punkti ja algpunkti läheks:

1) $A(3,-6)$; 2) $A(-2;3,5)$; 3) $A(2\frac{1}{3},0)$.

20. Kirjutada sirgjoone võrrand, kui sirgjoon oleks paralleelne x - teljega ja läheks läbi punkti, mille ordinaat on antud:

1) $y_1 = 2$; 2) $y_1 = -2$; 3) $y_1 = -3$; 4) $y_1 = 0$.

21. Kirjutada sirgjoone võrrand, kui sirgjoon oleks paralleelne y - teljega ja läheks läbi punkti, mille abstsiss on antud:

1) $x_1 = 3$; 2) $x_1 = -1$; 3) $x_1 = 0$.

22. Määrata kahe sirgjoone lõikpunkti koordinaadid, kui on antud sirgjoonte võrrandid:

1) $3x - 2y = 5$, $2x + 5y = 3$; 2) $9x - 13y = 1$, $7x - 2y = 3$; 3) $2,4x - 1,7y = 0,1$; $2,3y - 3,2x = 0,1$; 4) $2\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}y = 2$; $5x - 1\frac{2}{3}y = 6$.

23. Eelmises ülesandes antud andmete põhjal määrata kahe sirgjoone läbi, sünnitatud nurk.

24. Missuguse nurga sünnitavad kaks sirgjoont, mis läbi punkti $A(3,8)$ lähevad ja y - teljelt lõikavad lõigud, mille pikkus on vastavalt 10 ja 5?

25. Läbi antud punkti kujutada antud sirgele paralleeljoon ja leida selle võrrand:

1) $A(5,3)$, $2x - 3y = 12$; 2) $A(7,-4)$, $9x + 7y = 25$; 3) $A(-3,8)$, $11y - 6x = 14$.

26. Läbi antud punkti kujutada perpendikulaar-joon

antud sirgele:

1) $A(4,-5)$, $9x - 4y = 7$; 2) $A(-4,5)$, $5x + 8y = 25$;

3) $A(-4,-5)$, $3x + 11y = 37$.

27. Kujutada antud sirgele antud kaugusel paralleeljoon ja leida viimase võrrand:

1) $3x - 4y = 2$, $d = 4$; 2) $15x + 8y = 23$, $d = 2,5$;

3) $3x + 7y = 11$, $d = \sqrt{58}$.

28. Kui kolmnurga külgedeks on sirgjooned $9x - 8y = -6$, $14x + 5y = 200$ ja $5x + 13y = 49$, kui suur on siis selle kolmnurga pind, kui pikad on kolmnurga kõrgused ja mediaanid ja kui suured on kolmnurga nurgad?

29. Kolmnurga tipud on antud: $A(2,3)$, $B(3,-5)$ ja $C(8,7)$. Leida selle kolmnurga kõrguste ja mediaanide võrrandid.

30. Leida sirgjoone võrrand, mis antud sirgjoonega antud nurga sünnitab ja läbi antud punkti läheb:

1) $2x - 5y = 3$, $\alpha = 30^\circ$ ja $A(-1,2)$; 2) $7y - 2x = 3$, $\alpha = 150^\circ$ ja $A(0,-2)$; 3) $5x - 2y = 1$, $\alpha = 135^\circ$ ja $A(0,0)$.

31. Sirgjoonel $2x - y = 16$ määrata niisugune punkt, mis punktist $A(2,-2)$ ja sirgjoonest $12x + 5y = 10$ ühekaugusel asuks.

32. Leida kahe sirgjoone läbi sünnitatud nurgapoolitaja võrrand:

1) $3x - 5y = 7$, $x - y = 1$; 2) $8x + 3y = 1$, $2x - 9y = 2$;

3) $x - 2y = 5,\ 3y - x = 0.$

§ 3. Ringjoone, ellipsi, hüperboli ja paraaboli võrrandid.

Valemid:

1) Ringjoone võrrand, kui ringi senter asub algpunktis: $x^2 + y^2 = r^2$.
2) Ringjoone üldine võrrand: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, mille juures α ja β on sentri koordinaadid, ehk $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
3) Ellipsi võrrand, kui ellipsi senter asub algpunktis ja tema fookused asuvad x - teljel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ehk $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
4) Ellipsi fookuse kaugus algpunktist: $e = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.
5) Ellipsi võrrand, kui ellipsi senter asub punktis A (α, β) ja tema teljed on paralleelsed koordinaatide telgedega:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

6) Hüperboli võrrand, kui hüperboli senter asub algpunktis ja tema fookused asuvad x - teljel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ehk $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

7) Hüperboli fookuse kaugus algpunktist

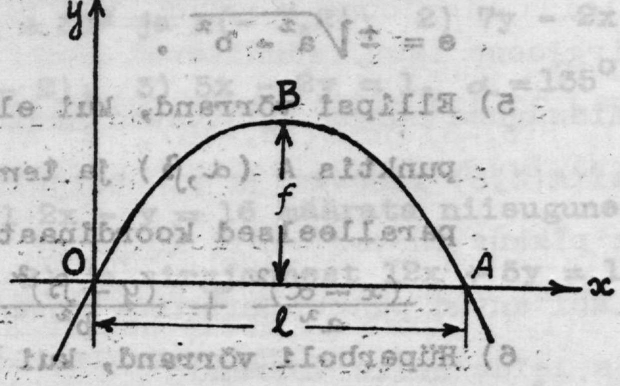
$e = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

8) Hüperboli võrrand, kui hüperboli senter asub punktis A (α, β) aga teljed on paralleelsed koordinaatide telgedega: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

9) Paraaboli võrrand, kui paraaboli lagipunkt on algpunktis, aga fookus asub x teljel: $y^2 = 2p.x$, kus fookuse kaugus algpunktist on $\frac{p}{2}$.

10) Paraaboli võrrand, mille lagipunkt asub punktis A (α, β), aga telg on paralleelne x - teljega: $(y - \beta)^2 = 2p\,(x - \alpha)$, ehk $x = ay^2 + by + c$.

11. Paraaboli võrrand, kui paraabol läheb



läbi algpunkti ja lagipunkti koordinaatideks on f ja $\frac{\ell}{2}$: $y = \frac{4fx(\ell - x)}{\ell}$

(vaata joonis).

R I N G J O O N.

33. Leida ringjoone võrrand, mille raadius ja senter on antud:

1) $r = 3$, $A(0,0)$; 2) $r = 4$, $A(3,0)$; 3) $r = 2{,}5$; $A(0,-2)$; 4) $r = 1{,}5$; $A(3,-5)$; 5) $r = 7$, $A(-2{,}1;-3{,}5)$.

34. Määrata ringi raadius ja senter, kui antud on ringjoone võrrand:

1) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 14x + 18y + 9 = 0$; 4) $3x^2 + 3y^2 - 9x - 8y - 90 = 0$; 5) $20x^2 + 20y^2 - 64x + 100y + 41 = 0$.

35. Leida antud ringjoonte $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 1 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 22 = 0$ sentrid ühendaja sirge võrrand.

36) leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läheb läbi antud kolme punkti:

1) $A(-1,2)$, $B(3,-6)$ ja $C(16,-15)$; 2) $A(8,-12)$, $B(-5,-3)$ ja $C(-9,5)$.

37. Missugune on ringjoone võrrand, mis läbi punkti $A(3,4)$ ja $B(1,6)$ läheb ja mille senter asub sirgel $3x + 2y = 51$?

38. Määrata antud ringjoone ja sirgjoone lõikpunktid:

1) $x^2 + y^2 = 25$, $x - y + 1 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0$, $3x - 5y + 11 = 0$; 3) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 12y - 27 = 0$, $3x + 8y - 11 = 0$.

39. Missugustes punktides lõikab ringjoont $x^2 + y^2 = 109$ sirgjoon, mis läbi punkti $A(4,-3)$ on tõmmatud paralleelselt sirgega $3x + 7y = 3$?

40. Kus kohal lõikab ringjoont $x^2 + y^2 = 52$ sirgjoon, mis läbi punkti $A(2,3)$ on tõmmatud perpendikulaarselt sirgega $2x - 9y + 15 = 0$?

41. Leida sirgjoone võrrand, mis ringjoont $x^2 + y^2 + 10x - 12y - 164 = 0$ lõikab punktides, mille abstsissid on vastavalt 4 ja 7 ja ordinaadid on positiivsed.

42. Kui pikk on antud ringi sidejoon, mille ringi sees antud punkt poolitab:

1) $x^2 + y^2 = 100$, $A(1,-1)$; 2) $x^2 + y^2 = 625$, $A(11,2)$.

E L L I P S.

43. Leida ellipsi võrrand, mille senter asub algpunktis, aga fookused x - teljel, kui on antud:

1) pooledteljed $a = 4$ ja $b = 3$; 2) pooltelge $a = 17$ ja fookuse kaugus algpunktist $e = 8$; 3) $b = 12$ ja $e = 5$.

44. Leida ellipsi võrrand, mille senter ja pooledteljed on antud ja mille teljed on paralleelsed koordinaatide telgedega:

1) $A(3,5)$, $a = 7$ ja $b = 4$; 2) $A(-5,2)$, $a = 10$ ja $b = 8$.

45. Leida ellipsi võrrand, mille teljed on paralleelsed koordinaatide telgedega, mille senter asub punktis A(- 7,2) ja mis läheb läbi punkti $B(1,6\frac{1}{5})$ ja $C(-1, -3\frac{3}{5})$.

46. Määrata ellipsi pooltelјed ja sentri koordinaadid, kui on antud ellipsi võrrand:
1) $49x^2 + 100y^2 - 600y - 4000 = 0$; 2) $25x^2 + 36y^2 - 250x - 275 = 0$; 3) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 100y - 236 = 0$.

47. Leida ellipsi $64x^2 + 100y^2 = 6400$ fookuskiirte võrrandid, kiirte läbi sünnitatud nurk ja nende pikkused, kui nad lähevad läbi allipsi punkti, mille abstsiss on 8 aga ordinaat on positiivne.

48. Määrata ellipsi ja sirgjoone lõikpunkti koordinaadid, kui on antud:
1) $25x^2 + 36y^2 = 900$ ja $5x + 6y = 30$; 2) $81(x + 5)^2 + 121(y + 2)^2 = 9801$ ja $9x + 11y = 32$.

49. Missuguses punktis lõikab antud ellipsit sirgjoon, mis läheb läbi positiivse fookuse ja sünnitab x - teljega antud nurga α:
1) $64x^2 + 100y^2 = 6400$, $\alpha = 30^0$; 2) $9x^2 + 25y^2 = 225$, $\alpha = 120^0$?

50. Missuguses punktis lõikab antud ellipsit sirgjoon, mis mõlemad positiivsed pooltelјed poolitab, kui ellipsi võrrandiks on $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$?

HÜPERBOL.

51. Määrata hüperboli võrrand, kui on antud:

1) reaalne pooltelje $a = 4$ ja imaginaarne $b = 3$;

2) imaginaarne pooltelje $b = 5$ ja fookuse kaugus algpunktist $e = 8$, kui hüperboli senter asub algpunktis ja fookused asuvad x - teljel.

52. Leida hüperboli võrrand, kui hüperboli senter asub algpunktis ja fookused x - teljel, aga kõverjoon ise läheb läbi punktide $A(10, 4\frac{1}{2})$ ja $B(-17, 11\frac{1}{4})$.

53. Leida hüperboli võrrand, mille senter asub punktis A ja mille poolteljed a ja b on paralleelsed koordinaatide telgedega, kui on antud:

1) $A(5,4)$, $a = 8$ ja $b = 5$; 2) $A(2,-5)$, $a = 4$ ja $b = 7$.

54. Leida hüperboli võrrand, mille teljed on paralleelsed koordinaatide telgedega, mille senter asub punktis A ja mis läheb läbi punktide B ja C, kui on antud:

1) $A(7,-3)$, $B(-3, 1\frac{1}{2})$ ja $C(22, 8\frac{1}{4})$; 2) $A(-5,4)$, $B(5,7)$ ja $C(12, 11\frac{1}{2})$.

55. Määrata hüperboli sentri koordinaadid ja poolteljed, kui on antud hüperboli võrrand:

1) $x^2 - 4y^2 - 8x + 24y - 24 = 0$. 2) $4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y - 29 = 0$, 3) $x^2 - y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

56. Leida hüperboli fookuskiirte võrrandid, kui

on antud hüperboli punkti abstsiss, mille läbi need kiired tulevad kujutada:

1) $5x^2 - 4y^2 = 20$, $x_1 = 7$; 2) $56x^2 - 25y^2 = 1400$, $x_1 = 9$.

57. Määrata eelmises ülesandes leitud fookuskiirte läbi sünnitatud nurk.

58. Missugustes punktides lõikab antud hüperbolit antud sirgjoon:

1) $25x^2 - 9y^2 = 225$ ja $4x - 3y = 0$; 2) $25x^2 - 16y^2 = 400$ ja $15x + 28y = 180$; 3) $y^2 = 12x + 18x^2$ ja $y = 3x - 6$; 4) $\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ ja $20x - 21y = 162$?

59. Missugustes punktides lõikab hüperbolit $9x^2 - 16y^2 = 144$ sirgjoon, mis läbi positiivse fookuse läheb ja 1) x - teljega nurga $\alpha = 60^\circ$ sünnitab,

2) poositiivse imaginaarse pooltelje poolitab ?

60. Kui pikk on hüperboli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sidejoon, mis läbi positiivse fookuse läheb ja x - teljega 135° nurga sünnitab.

PARAABOL.

61. Määrata paraaboli võrrand, mille lagipunkt ja pool parameetrit on antud ja mille telg on paralleelne x - teljega:

1) A(5,4) ja p = 3; 2) A(- 2,3) ja p = 5; 3) A(3,4) ja p = - $2\frac{1}{2}$.

62. Määrata paraaboli võrrand, mille lagipunkt ja pool parameetrit on antud ja mille telg on paralleelne y teljega:

1) $A(2,-1)$ ja $p = -2$; 2) $A(6,5)$ ja $p = 3$; 3) $A(-1,3)$ ja $p = -1,5$.

63. Määrata paraaboli lõikpunktid koordinaatide telgedega, lagipunkt ja fookus, kui on antud paraaboli võrrand:

1) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$, 2) $y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$,
3) $x^2 - 5x - 4y + 12 = 0$, 4) $2x^2 + 5x + 4y - 11 = 0$,
5) $3x^2 - 7x + 5y - 3 = 0$.

64. Määrata paraaboli võrrand, mis läbi antud punktide A, B ja C läheb ja mille telg on paralleelne x - - teljega:

1) $A(3,4)$ $B(9,10)$ ja $C(9,-2)$; 2) $A(2,4)$. $B(-3,1)$ ja $C(-6,-2)$.

65. Määrata paraaboli võrrand, mis läbi antud punktide A, B ja C läheb ja mille telg on paralleelne y - - teljega:

1) $A(3,1)$, $B(-3.-2)$ ja $C(9,10)$; 2) $A(1,-1)$, $B(-2,4)$ ja $C(16,4)$.

66. Määrata paraaboli võrrand, mis läbi algpunkti läheb ja mille telg on paralleelne y - teljega, kui on antud lagipunkti ordinaat f ja x - telje lõik ℓ :

1) $f = 2$ ja $\ell = 3$, 2) $f = -3$ ja $\ell = 4$, 3) $f = 1\frac{1}{2}$ ja $\ell = -3\frac{1}{3}$, 4) $f = -5$ ja $\ell = -4$.

67. Missugustes punktides lõikab antud paraabolit antud sirgjoon ja kui pikk on lõikjoone sisemine osa:
1) $y^2 = 8x$ ja $8x - 5y = 6$; 2) $y^2 = -5x$ ja $3x + 10y = 10$; 3) $x^2 = 6y$ ja $4x - 3y = 6$; 4) $(y - 5)^2 = 6(x - 3)$ ja $3x - 2y = 5$; 5) $(x + 3)^2 = -9(y - 5)$ ja $2x + 3y = 9$?

68. Kui pikk on paraaboli $y^2 = 10x$ sidejoon, mis läbi fookuse läheb ja x - teljega 30^o nurga sünnitab?

69. Leida sirgjoone võrrand, mis antud paraabolit lõikab punktides, mille abstsissid või ordinaadid on antud:
1) $y^2 = 9x$, $x_1 = 4$ ja $x_2 = 25$; 2) $y^2 = 6x$, $y_1 = 3$ ja $y_2 = -12$.

§4. ÜLDINE TEISE ASTME VÕRRAND JA TEISE ASTME KÕVERATE PUUTE- JA POLAARJOON.

Valemid: 1) ülemineku valemid ühe koordinaadistiku juurest teise juure, pöörates telgi ümber algpunkti nurga α võrra:

$$x = x'.\cos\alpha - y'.\sin\alpha,$$
$$y = x'.\sin\alpha + y'.\cos\alpha;$$

2) ülemineku valemid ühe koordinaadistiku juurest teise juure nihutades telgi paralleelselt oma endisele seisukohale nii võrra, et uue algpunkti koordinaatideks oleksid suu-

rused α ja β :

$$x = x' + \alpha,$$
$$y = y' + \beta;$$

3) Teise astme võrrandi tunnus (diskriminant on $C^2 - 4AB$, kus C on liikme koeffitsient, milles ette tuleb koordinaatide korrutis, A on x^2 koeffitsient ja B on y^2 koeffitsient:

a) kui $C^2 - 4AB > 0$, siis määrab võrrand hüperbolit,

b) kui $C^2 - 4AB = 0$, siis määrab võrrand paraabolit ja

c) kui $C^2 - 4AB < 0$, siis määrab võrrand ellipsit.

4. Üldise ruutvõrrandi $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ läbi määratud kõverjoone puute- ja polaarjoone võrrandiks on

$Ax_1.x + By_1.y + \frac{C}{2}(x_1.y + y_1.x) + \frac{D}{2}(x_1 + x) + \frac{E}{2}(y_1 + y) + F = 0$, kus x_1 ja y_1 tähendavad puutepunkti või pooluse koordinaate. Kui kõverjoone võrrand on lihtsam, siis saab vastavalt lihtsam ka puute- või polaarjoone võrrand, näiteks:

a) ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ puutejoone võrrandiks on

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2,$$

b) ringjoone $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

puutejoone võrrandiks on

$$(x_1 - \alpha)(x - \alpha) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = r^2$$

c) ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ puutejoone võrrandiks on

$$b^2 \cdot x_1 \cdot x + a^2 y_1 \cdot y = a^2 \cdot b^2,$$

d) paraaboli $y^2 = 2px$ puutejoone võrrandiks on

$$y_1 \cdot y = p\,(x_1 + x) \text{ jne.}$$

<u>Teise järgu kõverate puutejoonte omadused</u>.

<u>Ellips</u>.

1) Kui mitmesuguste ellipsite senter ja suurem telg on ühine ja nende võrrand on $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, siis lõikavad nende ellipsite puutejooned, mille puutepunkti abstsiss on üka ja sama suurus x_1, x - telge ühises punktis. Lõikpunkti kaugus algpunktist võrdub $\frac{a^2}{x_1}$.

2) Ellipsi puutejoon poolitab nurga, mis on sünnitatud läbi puutepunkti tõmmatud ühe fookuskiire ja teise pikendusega.

3) Ellipsi puutejoonele fookusest tõmmatud perpendikulaarjoon lõikab viimast punk-

tis, mis asub suuremal ringil, s.t. tema kaugus sentrist on a.

Hüperbol:

1. Hüperboli puutejoon jagab pooleks nurga, mis on sünnitatud läbi puutepunkti tõmmatud fookuskiirtega.

2) Hüperboli puutejoonele fookusest tõmmatud perpendikulaarjoon lõikab viimast punktis, mis asub reaalsel ringil, s.t. tema kaugus sentrist on reaalne pooltelg a.

Paraabol.

1. Kui paraaboli võrrand on $y^2 = 2px$, siis lõikab tema puutejoon x - telge pahemal pool algpunkti kaugusel, mis on absoluutselt võrdne puutepunkti abstsissiga, aga y - telge lõikab punktis, mille kaugus algpunktist on võrdne poole puutepunkti ordinaadiga.

2) Paraaboli puutejoon poolitab nurga, mis on sünnitatud läbi puutepunkti mineva paralleeljoonega paraaboli teljele ja fookuskiirega.

3) Paraaboli $y^2 = 2px$ fookusest kujutatud

perpendikulaarjoon puutejoonele lõikab viimast y - teljel.

Seletused.

1) Kõverjoone normaaljooneks nimet. perpendikulaarjoont, mis kujutatud puutejoonele puutepunktis.

2) Puutejoone pikkuseks nimet. tema lõiku puutepunktist kuni x - teljeni.

3) Normaaljoone pikkus on tema lõik kõverjoone punktist kuni x - teljeni.

4) Subtangent on puutejoone pikkuse projektsioon x - teljele.

5) Subnormaal on normaaljoone pikkuse projektsioon x - teljele.

6) Kõverjoone asümptoodiks nimet. puutejoont, mis kõverat lõpmata kauges punktis puudutab, kuid lõpulikul kaugusel nähtavale ilmub. Hüperbolil on kaks asümptooti, mis paigutud sümmeetriliselt x - teljega ja lähevad läbi algpunkti, kui hüperboli võrrand on $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Hüperboli asümptootide võrranditeks on $y = \frac{b}{a}x$ ja $y = -\frac{b}{a}x$.

7) $xy = a$ on hüperboli võrrand, kui koordinaatide telgedeks on valitud asümptoodid.

---

70. Selgitada, missugust kõverjoont tähendab iga järgmine võrrand ja kui suured on selle kõverjoone määrajad elemendid, s.t. ellipsi või hüperboli pooltelјed ja paraaboli paraameter:

1) $14x^2 + 11y^2 + 4xy - 140x - 50y + 170 = 0$;

2) $33x^2 - 7y^2 + 96xy + 624x + 754y - 52 = 0$;

3) $24x^2 - 24y^2 - 36xy - 60x + 420y - 1710 = 0$;

4) $9x^2 + y^2 + 6xy - 115x - 25y + 450 = 0$;

5) $8x^2 + 2y^2 + 8xy - 50x - 40y + 200 = 0$;

6) $16x^2 + y^2 + 8xy - 170x - 170y + 2023 = 0$;

7) $9x^2 + 4y^2 + 12xy + 80x + 55y + 167 = 0$;

8) $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 14x - 21y + 6 = 0$.

ELLIPS.

71. Missugune on ellipsi puutejoone võrrand, kui on antud ellipsi võrrand ja puutepunkti koordinaadid:

1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{121} = 1$, $x_1 = 5$ ja $y_1 > 0$;

2) $25x^2 + 36y^2 = 3600$, $x_1 > 0$ ja $y_1 = 6$;

3) $16(x + 3)^2 + 25(y - 5)^2 = 1600$, $x_1 = 5$ ja $y_1 > 0$?

72. Leida normaaljoone võrrand, kui on antud ellipsi võrrand ja ellipsi punkti koordinaadid:

1) $49x^2 + 100y^2 = 4900$, $x_1 = 6$ ja $y_1 > 0$;

2) $25(x - 4)^2 + 36(y + 2)^2 = 900$, $x_1 > 0$ ja $y_1 = -6$.

73. Määrata:

ellipsi $9x^2 + 16y^2 = 576$ punktile $(4, y_1 > 0)$ vastav puutejoone pikkus

-"- $16x^2 + 25y^2 = 1600$ -"- $(8, y_1 > 0)$ -"- normaaljoone -"-

-"- $25x^2 + 36y^2 = 3600$ -"- $(6, y_1 < 0)$ -"- subtangenti -"-

-"- $25x^2 + 64y^2 = 1600$ -"- $(4, y_1 > 0)$ -"- subnormaali -"-

74. Missuguses punktis puudutab ellipsit puutejoon, mille tõusunurga tangens on antud:

1) $16x^2 + 25y^2 = 1600$, $m = 0{,}8$; 2) $25x^2 + 36y^2 = 3600$, $m = -1{,}2$.

75. Leida ellipsi $64x^2 + 81y^2 = 5184$ puutejoone võrrand tingimusel, et puutejoon oleks paralleelne sirgega $3x - 5y = 4$.

76. Leida ellipsi $49x^2 + 64y^2 = 3136$ puutejoone võrrand tingimusel, et puutejoon oleks perpendikulaarne sirgega $4x + 5y = 6$.

77. Leida ellipsi $25x^2 + 36y^2 = 900$ puutejoone võrrand tingimusel, et puutejoon sünnitaks sirgega $y - 3x = 2$ nurga $\varphi = 30^o$.

78. Määrata ellipsi võrrand, mille puutejooneks punktis A $(4, 2\frac{1}{2})$ oleks sirge $x + 4y = 14$ ja mille teljed asuksid koordinaatide telgedel.

79. Ellipsile, mille pooltelgedeks on $a = 8$ ja $b = 6$, vaja ümberjoonestada ruut, mille tipud asuksid ellipsi telgedel. Kui pikk saab selle ruudu külg ja mis-

sugusteks osadeks jagab ruudu külje puutepunkt?

80. Missuguses punktis ja kui suure nurga all lõikuvad ellipsi puutejooned, kui ellipsi võrrandiks on $16x^2 + 25y^2 = 1600$ ja puutepunktideks on A (8; - 4,8) ning B (- 6; 6,4) ?

81. Missuguses punktis lõikuvad ellipsi $49x^2 + 81y^2 = 3969$ puutejooned, mis ellipsit puudutavad läbi positiivse fookuse mineva ja x - teljega 45°-lise nurga sünnitaja sidejoone lõpupunktides ?

82. Määrata pooluse koordinaadid, kui ellipsi $25x^2 + 36y^2 = 900$ polaarjooneks on sirge $3x + 7y = 13$.

83. Määrata ellipsi $25x^2 + 64y^2 = 1600$ polaarjoontele $5x + 4y = 20$ ja $25x + 96y + 200 = 0$ vastavate pooluste kaugus.

84. Leida ellipsi $9x^2 + 25y^2 = 225$ puutejoonte võrrandid, kui puutejooned lähevad läbi punkti A (5,8).

HÜPERBOL.

85. Missugune on hüperboli puutejoone ja normaaljoone võrrand, kui on antud hüperboli võrrand ja puutepunkti koordinaadid:

1) $4x^2 - 9y^2 = 36$, $x_1 = 5$ ja $y_1 > 0$;

2) $25x^2 - 16y^2 = 400$, $x_1 = 8$ ja $y_1 < 0$.

86. Määrata hüperboli $16x^2 - 25y^2 = 400$ puutejoone võrrand, kui puutejoon on paralleelne sirgega $y - 2x = 3$.

87. Määrata hüperboli võrrand, mille teljed asuvad koordinaatide telgedel ja mille puutejooneks punktis $A(5, 2\frac{1}{4})$ on sirge $5x - 4y = 16$.

88. Määrata hüperboli võrrand, mille teljed asuvad koordinaatide telgedel, kui hüperboli punktile $A(8, y_1 > 0)$ vastav subtangent võrdub $3\frac{1}{2}$ ja subnormaal on 2.

89. Missuguses punktis ja kui suure nurga all lõikuvad hüperboli $x^2 - 4y^2 = 144$ puutejooned, kui puutepunktideks on $A(13, y_1 > 0)$ ja $B(-13, y_2 > 0)$?

90. Missuguses punktis lõikuvad hüperboli $9x^2 - 25y^2 = 225$ puutejooned, mis hüperbolit puudutavad läbi positiivse fookuse mineva ja x - teljega 45^o-lise nurga sünnitaja sidejoone lõpupunktides ?

91. Määrata pooluse koordinaadid, kui hüperboli $36x^2 - 25y^2 = 900$ polaarjooneks on sirge $4y - 3x = 12$.

92. Määrata hüperboli $15x^2 - 9y^2 = 135$ polaarjoontele $x - 4y = 12$ ja $4x + 9y = 18$ vastavate pooluste kaugus.

93. Leida hüperboli $9x^2 - 15y^2 = 135$ puutejoonte võrrandid, kui puutejooned lähevad läbi punkti $A(6, -5)$.

94. Missuguse nurga all lõikuvad hüperboli $16x^2 - 25y^2 = 400$ assümptoodid ?

95. Kui suure lõigu lõikavad hüperboli $24x^2 - 25y^2 = 600$ assümptoodid puutujalt joonelt, mille puutepunkti abstsiss on 10 ja ordinaat on positiivne ?

96. Määrata hüperboli võrrand, võttes telgedeks assümptoodid vastavalt võrrandile;

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$ ja 2) $25x^2 - 144y^2 = 3600$.

Paraabol.

97. Missugune on paraaboli puutejoone võrrand, kui antud on paraaboli võrrand ja puutepunkti koordinaadid:

1) $y^2 = 8x$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$ ja $y_1 = 6$;

2) $x^2 = -9y$, $x_1 = 6$ ja $y_1 = -4$;

3) $(y - 5)^2 = 7(x + 2)$, $x_1 = 5$ ja $y_1 = -2$;

4) $(x + 2)^2 = -3(y - 4)$, $x_1 = 4$ ja $y_1 = -8$.

98. Määrata paraaboli normaaljoone võrrand, kui on antud:

1) paraabol $y^2 = 6x$ ja tema punkt $A(1\frac{1}{2}, -3)$;

2) " $(y + 3)^2 = 5(x - 4)$ ja $A(9, -8)$.

99. Leida paraaboli puutejoone võrrand tingimusega, et puutejoon sünnitaks antud sirgega antud nurga α, kui antud on:

1) $y^2 = 9x$, $5x - 3y = 2$, $\alpha = 0$; 2) $y^2 = 8x$, $4x - 7y = 3$, $\alpha = 90°$ 3) $x^2 = 6y$, $5x - 4y = 1$, $\alpha = 30°$.

100. Kui pikk on

1) punktile A(3,6) vastav paraaboli $y^2 = 12x$ puutejoon

2) " A(24,-12) " " $y^2 = -6x$ "

3) " A($2\frac{1}{2}$,-5) " " $y^2 = 10x$ normaaljoon

4) " A(-4; 6) " " $x^2 = 9y$ subtangent ?

101. Leida puutepunkti koordinaadid, kui on antud paraaboli ja tema puutejoone võrrand:

1) $y^2 = 4x$, $x + 3y + 9 = 0$; 2) $y^2 = 8,4x$, $x - y + 2,1 = 0$.

102. Missuguses punktis puudutab paraabolit $y^2 = 5x$ sirgjoon, mis x-teljega sünnitab nurga 30^o.

103. Määrata paraaboli võrrand, mille lagipunkt asub algpunktis ja fookus x-teljel, kui paraabolit puudutab sirgjoon

1) $2y - 3x = 8$, 2) $5y - 4x = 10$.

104. Tõendada, et paraaboli $y^2 = 2px$ subnormaal ikka võrdub poolparameetriga p.

105. Missuguses punktis ja kui suure nurga all lõikuvad paraaboli puutejooned, kui paraaboli võrrand on $y^2 = 18y$ ja puutepunktid on A(2,$y_1 > 0$) ja B(8,$y_2 > 0$).

106. Määrata pooluste kaugus, kui paraaboli $y^2 = 5x$ polaarjoonteks on sirged $10x + 3y = 6$ ja $2x - 3y = 6$.

107. Leida paraaboli $y^2 = 8x$ puutejoonte võrrandid, kui puutejooned lähevad läbi punkti A(- 8,- 6).

§ 5. Teise järgu kõverate diameetrid.

Definitsioonid: 1) Kõverjoone diameetriks nimet. paralleelsete sidejoonte keskpunktide geomeetrilist kohta.

2) Paralleelseid sidejooni, mis diameetri määravad, nimet. selle diameetri suhtes kaassidejoonteks.

3) Kahte niisugust diameetrit, milledest vastamisi üks poolitab teise kaassidejooned, nimet. kaasdiameetriteks.

4) Perpendikulaarsed kaasdiameetrid nimet. kõverjoone peatelgedeks.

5. Punkt, milles lõikuvad ühe kõverjoone diameetrid, nimet. kõverjoone sentriks.

Valemid: 1) Ellipsi diameetri võrrand on $-\frac{b^2x}{a^2y}=tg\alpha$ kus α on kaassidejoonte tõusnurk.

2) Kaasdiameetrite tõusnurkade tangensid on seotud järgmiselt: $tg\alpha . tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$

3) Hüperboli diameetri võrrand on $\frac{b^2x}{a^2y}=tg\alpha$, kus α on kaassidejoonte tõusnurk.

4) Hüperboli kaasdiameetrite tõusnurgad

on seotud järgmiselt: $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{b^2}{a^2}$

5. Paraaboli diameetri võrrand on $y = \frac{4p}{tg\alpha}$, kus α on samuti kaassidejoonte tõusnurk. Sellest järgneb, et paraaboli diameetrid on ikka paralleelsed peateljega.

108. Kui pikad on ellipsi $16x^2 + 25y^2 = 1600$ kaasdiameetrid, milledest üks läheb läbi ellipsi punkti $A(8, y_1 > 0)$?

109. Kui suure nurga sünnitab ellipsi $9x^2 + 16y^2 = 576$ diameeter oma kaasdiameetriga, kui üks nendest läheb läbi ellipsi punkti $A(4, y_1 > 0)$?

110. Kui pikk on ellipsi $81x^2 + 100y^2 = 8100$ diameeter, mis poolitab sidejoone $20y - 9x = 15$?

111. Leida ellipsi $16x^2 + 25y^2 = 1600$ niisuguse sidejoone võrrand, mis läheb läbi ellipsi punkti $A(8, y_1 > 0)$ ja mille diameeter $y = -\frac{5}{4}x$ poolitab.

112. Leida ellipsi $2x^2 + 5y^2 = 108$ niisuguste kaasdiameetrite võrrandid, mis omavahel 60° nurga sünnitavad.

113. Kui pikad on ja missuguse nurga sünnitavad hüperboli $25x^2 - 36y^2 = 900$ kaasdiameetrid, milledest üks läheb läbi hüperboli punkti $A(10, y_1 > 0)$?

114. Missugune on läbi punkti $A(5, y_1 > 0)$ mineva

hüperboli $9x^2 - 4y^2 = 144$ sidejoone võrrand, mis diameetri $y = \frac{2}{3}x$ läbi pooleks jaguneb ?

115. Määrata hüperboli $25x^2 - 16y^2 = 400$ sidejoone võrrand, kui sidejoon läheb läbi punkti A(6,2) ja selles punktis pooleks jaguneb.

116. Leida paraaboli diameetri võrrand, kui on antud paraaboli võrrand ja kaassidejoone võrrand:
1) $y^2 = 9x$, $7x - 3y = 30$; 2) $y^2 = 8x$, $4x + y = 12$;
3) $x^2 = -5y$, $7x + 3y = 10$.

117. Leida paraaboli $y^2 = 10x$ diameetri $y = -1$ kaassidejoone võrrand, kui kaassidejoon läheb läbi punkti A(7, - 8).

118. Kui pikk on sidejoon ja missugune on tema võrrand, kui teda poolitab paraaboli $y^2 = 4x$ sisemine punkt A(3,1)?

Konstruktsioon ülesanded.

119. Antud ellipsi puutejoon, fookus ja senter. Konstruida ellips.

120. Antud x-telg, tema peal ellipsi fookus ja lagipunkt ning puutejoon. Ehitada ellips.

121. Antud ellipsi puutejoon puutepunktiga, fookuse seisukoht ja suurema pooltelje pikkus. Ehitada ellips.

122. Antud kaks ellipsi puutejoont ühes puutepunktidega ja üks fookusest. Ehitada ellips.

123. Konstruida ellipsi puutejooned, mis oleksid paralleelsed antud sirgega.

124. Antud hüperboli puutejoon, fookus ja senter. Konstruida hüperbol.

125. Antud reaalne telg suuruse ja seisukoha mõttes ning puutejoon. Konstruida hüperbol.

126. Antud puutejoon puutepunktiga, fookuse seisukoht ja suurema pooltelje pikkus. Ehitada hüperbol.

127. Antud kaks hüperboli puutejoont ühes puutepunktidega ja üks fookusest. Ehitada hüperbol.

128. Konstruida hüperboli puutejooned, mis antud nurga sünnitaksid antud sirgega.

129. Ehitada paraabol, kui on antud paraaboli juhtjoon, telg ja üks paraaboli punkt.

130 Ehitada paraabol, mille fookus ja puutejoon ühes puutepunktiga on antud.

131. Ehitada paraabol, mille kaks puutejoont ja fookus on antud.

132. Ehitada paraabol, mille üks punktidest, puutejoon ja fookus on antud.

133. Ehitada paraabol, mille kaks puutejoont ühes puutepunktidega on antud.

134. Ehitada paraaboli normaaljoon, mis oleks paralleelne antud sirgega.

§ 6. Teise astme kõverate lagipunktvõrrandid, poolparameeter, juhtjoon, numbriline ekssentrissiteet ja võrrand polaarkoordinaatides.

Valemid: 1) Ellipsi lagipunktvõrrand on $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, kus $p = \frac{b^2}{a}$ ja nimetatakse poolparameetriks.

2) Hüperboli lagipunktvõrrand on $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$, kus $p = \frac{b^2}{a}$ ja nimetatakse samuti poolparameetriks.

Märkus. Paraaboli jaoks on lagipunktvõrrand juba varem teada.

3) Teise järgu kõverate võrrand polaarkoordinaatides, kui poolus asub fookuses ja polaarteljeks on kõverjoone telg, on $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$, kus p on poolparameetrit, r ja φ on polaarkoordinaadid, ε aga nimetakse numbriliseks ekssentrissiteediks ja selle suurus määrabki kõverjoone, nimelt, kui $\varepsilon < 1$, siis tähendab võrrand ellipsit (kui eraldi $\varepsilon = 0$, siis kujutab võrrand ringjoont), kui $\varepsilon = 1$, siis saame paraaboli ja lõpuks, kui $\varepsilon > 1$, siis tähendab võrrand hüperbolit.

Definitsioonid: 1) Kõverjoone poolparameetriks nimetakse fookusele kui x-telje punktile vastavat ordinaati väärtust.

2) Kõverjoone juhtjooneks nimet. fookuse kui pooluse polaarjoont.

3) Kõverjoone numbriliseks ekssentrissiteediks nimet. suhte väärtust, mille esimeseks liikmeks on kõverjoone punkti kaugus fookusest ja teiseks liikmeks on sama punkti kaugus juhtjoonest. Seda suurust märgitakse tähega ε ja tema võrdub ellipsi juures $\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$, hüperboli juures $\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$ ning paraaboli juures $\varepsilon=1$.

135. Määrata ellipsi lagipunktvõrrand ja pooltaljed, kui ellipsi joon läheb läbi punktide A ja B ning tema suurem telg asub x-teljel, järgmiste andmete põhjal:

1) A (5,3) B $(2 - 2\frac{1}{3})$; 2) A (4;- 6,4) ja B (2;- 4,8).

136. Leida ellipsi võrrand, mille senter asub algpunktis, fookused x-teljel, kui kõverjoon ise läheb läbi punkti A (6,4) ja tema juhtjoone kaugus algpunktist on $\frac{20}{3}\cdot\sqrt{3}$.

137. Määrata ellipsi lagipunktvõrrand ja võrrand polaarkoordinaatides, kui on antud:

1) $a = 17$, $e = 8$; 2) $b = 12$, $e = 5$; 3) $a = 9$, $p = 4$;

4) $b = 10$, $p = 8$.

138. Muundada ellipsi võrrandid

1) $25x^2 - 250x + 36y^2 - 275 = 0$ ja 2) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 100y - 236 = 0$ lagipunktvõrranditeks ja võrranditeks polaarkoordinaatides.

139. Määrata ellipsi pooltteljed, kui on antud ellipsi võrrand polaarkoordinaatides:

1) $r = \frac{16}{5 - 3.\cos\varphi}$, 2) $r = \frac{9}{5 - 4.\cos\varphi}$.

140. Määrata hüperboli lagipunktvõrrand ja pooltteljed, kui hüperbol läheb läbi punktide A $(8, 10\sqrt{2})$ ja B $(4, -5\sqrt{3})$ ja kui tema reaalne pooltelg asub x-teljel.

141. Leida hüperboli lagipunktvõrrand, kui hüperbol läheb läbi punkti A $(2, 4\frac{1}{2})$ ja tema parameeter $2p = 9$ ning fookused asuvad x-teljel.

142. Määrata hüperboli pooltteljed, kui hüperboli lagipunktvõrrand on $9y^2 = 72x + 4x^2$.

143. Määrata hüperboli lagipunktvõrrand ja võrrand polaarkoordinaatides, kui on antud:

1) $b = 5$, $e = 8$; 2) $a = 9$, $p = 4$; 3) $e = 15$, $p = 16$.

144. Muundada hüperboli võrrandid:

1) $5x^2 - 4y^2 = 20$, 2) $x^2 - y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

3) $4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y - 29 = 0$, lagipunktvõrranditeks ja võrranditeks polaarkoordinaatides.

145. Määrata hüperboli pooltteljed, kui on antud hüperboli võrrand polaarkoordinaatides:

1) $r = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$. 2) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

146. Muundada paraaboli võrrandid:

1) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$, 2) $x^2 - 5x - 4y + 12 = 0$,

3) $2x^2 + 5x + 4y - 11 = 0$ võrranditeks polaarkoordinaatides.

147. Määrata paraaboli $r = \frac{5}{\cos\varphi - 2}$ ja sirgjoone $3x + 10y = 10$ lõikpunktide koordinaadid.

---

§ 7. Mõned kõrgema järgu kõverad, sükloidid ja spiraalid.

1. Lemniskaat.

Definatsioon. Lemniskaadiks nimetatakse niisugust punktide geomeetrilist kohta, mille iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jäädava korrutise, võrdse a^2, kus a on kindlate punktide pool omavahelist kaugust.

148. Väljaarendada eelmise definatsiooni põhjal lemniskaadi võrrand: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, valides koordinaatide teljed nõnda, et x-telg läheb läbi kindlate punktide ja et algpunkt asuks nende vahel keskpaigas.

149. Analüüsides lemniskaadi võrrandit, näidata et lemniskaat, kui kõverjoon, on sümmeetriline koordinaatide telgede suhtes, lõikab x-telge neli korda: punktides, mille abs -

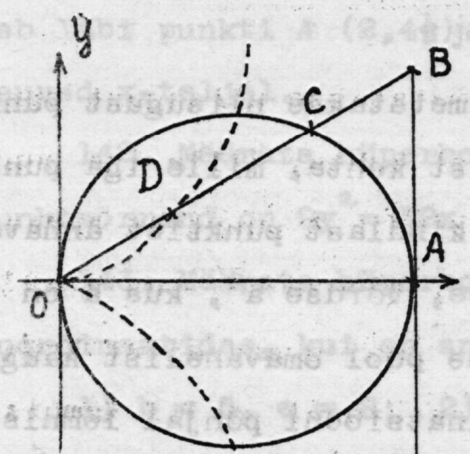
tsissid on võrdsed $+ a\sqrt{2}$, $- a\sqrt{2}$ ja kaks korda algpunktis, ja et lemniskaat on kõverjoon, mille kõik punktid asuvad lõpulikul kaugusel.

150. Määrata lemniskaadi lõigud sirgega, mis läheb läbi koordinaadistiku algpunkti ja sünnitab x-teljega nurga $\alpha = 30^o$.

151. Muundada lemniskaadi võrrand võrrandiks polaarkoordinaatides, võttes x-telje polaarteljeks ja endise koordinaadistiku algpunkti pooluseks.

2. <u>Tsissoid</u>.

Seletus. Kui kujutame ringjoone, tema diameetri OA (Joonis 2) ja puutejoone AB, tõmbame lõikjoone OB, mõõdame sellel lõigu OD võrdse lõiguga CB ja teeme seda iga lõikjoone juures, mis läbi punkti O on võimalik tõmmata, siis saame kogu punkte D, millede geomeetrilist kohta, kui kõverjoont, nimetatakse <u>tsissoidiks</u>.

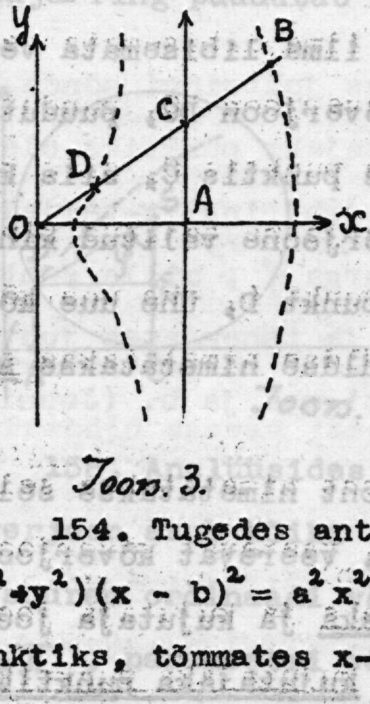


Joon. 2.

152. Tugedes eelmisele seletusele, leida tsissoidi võrrand $x^3 = y^2(2a - x)$, võttes diameetri OA x-teljeks, punkt O koordinaadistiku algpunktiks ja märkides ringjoone raadiuse tähega a.

153. Analüüsides tsissoidi võrrandit, näidata et tsissoid, kui kõverjoon, on sümmeetriline ainult x-telje suhtes, et tema reaalsed punktid asuvad kõik abstsissi vahemikus $0 \leq x \leq 2a$ ja et sirgjoon $x = 2a$ on tsissoidi assümptoodiks.

3. <u>Konhoid</u>.



Joon. 3.

Seletus. Kui kujutame sirgjoone AC ja väljaspool seda punkti O, tõmbame kiire OC ja mõlemale poole lõikpunkti C mööda sellele kiirele võrdsed lõigud CD = CB ja teeme samuti iga kiirega, mis punktist O tõmmatud ja sirgjoont AC lõikab, siis saame kogu punkte B ja D millede geomeetrilist kohta, kui kõverjoont nimetatakse <u>konhoidiks</u>.

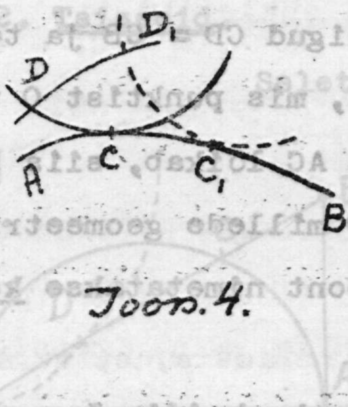
154. Tugedes antud seletusele, leida konhoidi võrrand $(x^2+y^2)(x-b)^2 = a^2x^2$, võttes punkti O koordinaadistiku alg-punktiks, tõmmates x-telje perpendikulaarselt sirgega AC ja märkides joonlõigu DC = CB pikkust tähega a ja punkti O kaugust sirgjoonest AC tähega b (OA = b).

155. Analüüsides konhoidi võrrandit, näidata et konhoid, kui kõverjoon, on sümmeetriline x-telje suhtes ja lõikab viimast kahes punktis, millede kaugused algpunktist on vastavalt b - a ja b + a (b > a), et konhoidi kõik reaalsed punktid asu-

vad abstsissi vahemikus $(b - a) \leq x \leq (b + a)$ ja et sirgjoon AC on konhoidi assümptoodiks.

156. Kasutades tuletisfunktsiooni mõistet, näidata, et x-teljel asuvates punktides kujtatud puutejooned konhoidile, on perpendikulaarsed x-teljega.

4. Harilik sükloid.



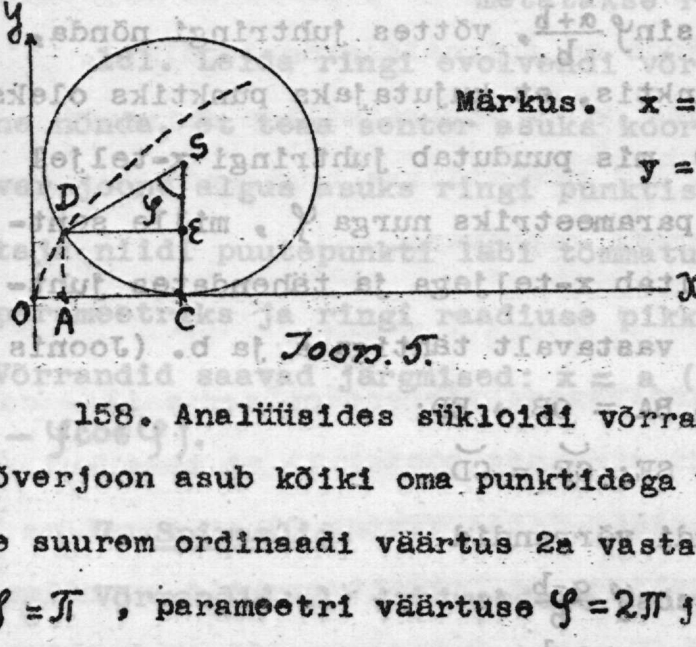
Joon. 4.

Seletus. Kui kujutame ühe kindla kõverjoone AB, mida mööda ilma libisemata veereb üks teine kõverjoon DC, puudutades esimest muutuvas punktis C, siis kujutab veereva kõverjoone valitud kindel punkt, näiteks punkt D, ühe uue kõverjoone DD_1, mida üldse nimetatakse sükloidiks.

Kindlat kõverjoont nimetatakse sel puhul juhtjooneks, veerevat kõverjoont kujutajaks jooneks ja kujutaja joone kindla punkti D kujutajaks punktiks.

Sükloidi võrrandid avaldatakse lihtsuse otstarbel ikka parameetri kaudu, milleks valitakse kohane muutuv nurk. Kui juhtjooneks valida sirgjoon ja kujutajaks jooneks ringjoon, siis sünnib nõnda nimetatud harilik sükloid.

157. Leida harilikusükloidi võrrandid $x = a(\varphi - \sin\varphi)$ ja $y = a(1 - \cos\varphi)$, tugedes eelmisele seletusele, võttes juhtjooneks x-telje, tähendates kujutaja ringi raadiuse pikkust tähega a, võttes kujutajaks punktiks kujutaja ringi selle punkti, mis x-tege puudutab algpunktis ja valides parameetris nurga φ, mille sünnitab kujutaja punktist tõmmatud kujutaja ringi raadius raadiusega, mis tõmmatud punktist, kus kujutaja ring puudutab x-telge (Joonis 5).



Joon. 5.

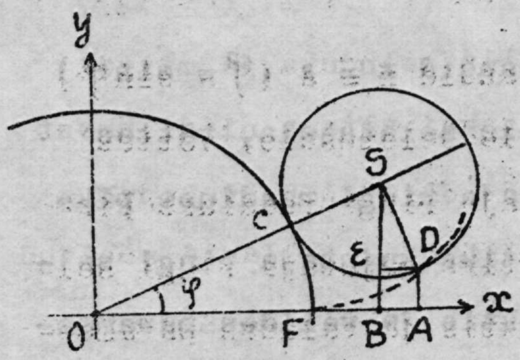
Märkus. $x = \overline{OA} = \overline{OC} - OA = \overset{\frown}{CD} - \overline{OA}$.

$y = DA = EC = SC - SE$.

158. Analüüsides sükloidi võrrandeid, näidata, et sükloid kui kõverjoon asub kõiki oma punktidega ühel pool x-telge, et kõige suurem ordinaadi väärtus 2a vastab parameetri väärtusele $\varphi = \pi$, parameetri väärtuse $\varphi = 2\pi$ juures on ordinaat 0 jne.

5 <u>Episükloid ja hüposükloid</u>.

Seletus. 1. Kui juhtjooneks võtta ringjoon ja kujutajaks jooneks ka ringjoon, mis juhtringi mööda



Joon. 6.

veereb, puudutades seda välimiselt, siis saame nõnda nimetatud __episükloidi__:

2. Kui kujutaja ring veereb juhtringi mööda puudutades teda seesmiselt, siis saame nõnda nimetatud hüposükloidi.

159. Leida episükloidi võrrandid

$x = (a + b)\cos\varphi - b\cos\varphi\frac{a+b}{b}$ ja

$y = (a + b)\sin\varphi - b\sin\varphi\frac{a+b}{b}$, võttes juhtringi nõnda, et teme senter asuks algpunktis, et kujutajaks punktiks oleks kujutaja ringi see punkt D, mis puudutab juhtringi x-teljel asuvas punktis F, valides parameetriks nurga φ, mille sentrid ühendaja sirge OS sünnitab x-teljega ja tähendates juht- ja kujutaja ringi raadiusi vastavalt tähtiga a ja b. (Joonis 6)

Märkus. $x = OA = OB + BA = OB + ED$;

$y = DA = SB - SE$; $\breve{CF} = \breve{CD}$.

160. Leida __hüposükloidi__ võrrandid

$x = (a - b)\cos\varphi + b\cos\varphi\frac{a-b}{b}$ ja

$y = (a - b)\sin\varphi - b\sin\varphi\frac{a-b}{b}$, samadel tingimistel kui eelmises ülesandes nõutud.

6. __Ringi evolvent.__

Seletus. Kujutame kindla ringjoone ümber mähituna ideaalselt painduva ja mitte veniva niidi, kui võtame niidi ühest punktist kinni ja mähime tema ringjoonelt lahti nõnda, et lahti mähitud niidi osa ikka pinevuli sirgjoone sünnitaks, siis joonistab selle ettekujutuse põhjal niidi üksik valitud kujutaja punktt kõverjoone, mida nimetatakse ringi evolvendiks.

161. Leida ringi evolvendi võrrandid paigutates ringjoone nõnda, et tema senter asuks koordinaatide algpunktis, kõver joone algus asuks ringi punktis, mis asub x-teljel, kujutaja niidi puutepunkti läbi tõmmatud raadiuse tõusnurk φ oleks parameetriks ja ringi raadiuse pikkuse tähendades tähega a. Võrrandid saavad järgmised: $x = a\,(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$; $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

7. Spiraalid.

Võrrandid: 1) Arhimeedese spiraali võrrand on $r = a\varphi$;

2) Hüperboolse spiraali võrrand on $r = \dfrac{a}{\varphi}$;

3) Logaritmilise spiraali võrrand on $r = a^{\varphi}$.

163. Näidata võrrandi põhjal, et polaarkoordinaadistiku algpunkt (poolus) on arhimeedese spiraali üheks punktiks ja et selle spiraali juures spiraali iga tiirule s.t., teiste sõna-

dega, argumendi kasvule 2π vastavalt, kasvab raadius-vektor r $2\pi a$ võrra, s.o. ringi pikkuse võrra, mille raadiuseks on a.

164. Näidata, et hüperboolse spiraali punktid argumendi piiramata kasvamise juures liginevad poolusele kui piirile (mille tõttu poolust võib nimetada asümptootiliseks) ja et teiselt poolt argumendi väärtuste piiramata kahanemise juures ja vastavate raadius-vektorite piiramata kasvamise juures spiraali punktid liginevad sirgjoonele, mis kaugusel a on kujutatud paraleelselt polaar-teljega (viimasest asjaolust järgneb et nimetatud sirgjoon on spiraali asümptoodiks).

165. Näidata, et poolus on ka logaritmilise spiraali asümptoodiliseks punktiks, kui neegatiivse argumendi absoluutse väärtuse kujutame piiramata kasvavana.

8. Kardioid.

Selle polaar-kõvera võrrand on $r = a\,(1 - \cos\varphi)$

167. Näidata kardioidi võrrandi põhjal 1) et tema, kui kõverjoon, on sümmeetriline polaar-telje suhtes 2) et temal on kaks ühist punkti polaar-teljega ja, nimelt punktid koordinaatidega ($\varphi = 0$, $r = 0$) ja ($\varphi = \pi$, $r = 2a$) ja samuti on temal kaks ühist punkti sirgjoonega, mis läbi pooluse kujutatud perpendikulaarselt polaar-teljega, sümmeetriliselt poolusega kaugusel a viimasest.

RUUMI GEOMEETRIA.

§ 8. Punktid ruumis.

Valemid. 1) Antud punkti A (x_1, y_1, z_1) kaugus koordinaadistiku algpunktist on raadius-vektor

$$\overline{OA} = r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

2) Selle raadius-vektori ja x-, y- ning z- teljega sünnitatud nurkade koosinused on vastavalt:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

ja $\cos\gamma = \frac{z_1}{r} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, mille põhjal

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3) Kahe raadius-vektori läbi sünnitatud nurga φ koosinus, kui raadius-vektorid r_1 ja r_2 on vastavalt määratud punktidega A (x_1, y_1, z_1) ja B (x_2, y_2, z_2), on

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1 r_2} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

kui nurgad $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ja $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ on vastavalt raadius vektorite r_1 ja r_2 ning koordinaatide telgede läbi sünnitatud.

4. Kahe antud punkti A (x_1, y_1, z_1) ja B $(x_2,$

y_2, z_2) kaugus

$$\overline{AB} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5) Selle kauguse, kui joonlõigu, ja x-, y- ning z-teljega sünnitatud nurkade koosinused on vastavalt: $\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}$, $\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}$, ja $\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$.

163. Määrata punkti kaugus koordinaadistiku algpunktist ja selle kauguse, kui joonlõigu, ja koordinaatide telgede läbi sünnitatud nurgad, kui on antud punkti koordinaadid: 1) (3,0,4); 2) (1,2,3); 3)(2,- 4,5; 4)(1,- 3, -2); 5) (-3, -2,-1).

164. Määrata punkti A koordinaat z_1, kui antud on $OA = r = 5$, $x_1 = 2$ ja $y_1 = -3$. Missuguses oktantis punkt A võib asuda?

165. Määrata raadius-vektori ja kolmanda koordinaatide telje läbi sünnitatud nurk γ, kui on antud α ja β: 1) $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$; 2) $\alpha = 60^o$, $\beta = 30^o$;

166. Määrata kahe raadius-vektori läbi sünnitatud nurk φ, kui raadius vektorid ise on määratud vastavalt punktidega A ja B: 1) A (1,-3,5), B (2,4,-1); 2) A (5,- 2,3), B (1,0,2).

167. Määrata kahe punkti A ja B kaugus kui on antud 1) A (2,0,-3) ja B (3,-1,4); 2) A (5,4,-2) ja B (7,1,-1); 3) A (4,1,-2) ja B (-3,5,-1).

168. Eelmises ülesandes antud andmete põhjal määrata joonlõigu AB ja koordinaatide telgede läbi sünnitatud nurgad ja kontrollida, kas leitud nurkade koosinuste ruutude summa saab võrdne ühega.

§ Sirgjoon ruumis.

Valemid: 1) Sirgjoone määramiseks ruumis tarvitatakse harilikult tema projektsioonide võrrendeid kahele koordinaatide tasapinnale, näiteks, üldisel puhul:

$$x = m_1 z + n_1$$

$$\text{ja} \quad y = m_2 z + n_2,$$

kus esimene võrrand on ruumis asuva sirgjoone projektsiooni võrrand xz koordinaatide tasapinnale ja teine yz tasapinnale, m_1 ja m_2 tähendavad nende projektsioonide tõusu nurkade tangenseid z-telje suhtes ja n_1 ja n_2 on vastavalt x- ja y- telje lõigud, mille projektsioonid neilt telgedelt lõikavad. Sellepärast saame erijuhustena sirgjoone võrrandid, kui sirgjoon läheb läbi algpunkti:

$$x = m_1 z$$

$$\text{ja} \quad y = m_2 z;$$

kui sirgjoon on paralleelne z-teljega

$$x = n_1$$

$$\text{ja} \quad y = n_2 ;$$

kui sirgjoon ühtib z-teljega

$$x = 0$$

$$\text{ja} \quad y = 0;$$

samuti, näiteks, x-telje võrrandid

$$y = 0$$

$$\text{ja} \quad z = 0 \quad \text{j.n.e.}$$

2) Sirgjoone võrrandid, kui sirgjoon on määratud kahe punktiga A (x_1, y_1, z_1) ja B (x_2, y_2, z_2)

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \cdot (z - z_1)$$

$$\text{ja} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \cdot (z - z_1)$$

3) Sirgjoone parameetraalsed võrrandid, kui sirgjoon on määratud kahe punktiga:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

kus parameetriks on muutuv suurus λ.

4) Sirgjoone ja koordinaatide telgede läbi sünnitatud nurkade koosinused:

$$\cos\alpha = \frac{m_1}{\sqrt{1 + m_1^2 + m_2^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m_2}{\sqrt{1 + m_1^2 + m_2^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2 + m_2^2}},$$

kus m_1 ja m_2 tähendavad sama suurusi, kui punktis 1).

5) Kahe sirgjoone läbi sünnitatud nurga φ koo-

-sinus, kui sirgjoonte võrranditeks on

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= m_1 z + n_1 \\ y &= m_2 z + n_2 \end{aligned}\right\} \text{ ja } \ 2)\ \left.\begin{aligned} x &= M_1 z + N_1 \\ y &= M_2 z + N_2 \end{aligned}\right\},$$

$$\cos\varphi = \frac{1 + m_1 M_1 + m_2 M_2}{\sqrt{1+m_1^2+m_2^2}\cdot\sqrt{1+M_1^2+M_2^2}}.$$

Siit järgneb tingimine selleks, et sirgjooned vastamisi perpendikulaarsed oleks, nimelt:

$1 + m_1 M_1 + m_2 M_2 = 0.$

169. Antud sirgjoonte projektsioonide võrrandid: 1) $x = 2x + 3$ ja $y = -3z$; 2) $x = -7z + 2$ ja $y = 5$. Mida võib ütelda nende sirgjoonte asetuse kohta koordinaatide telgede suhtes ja missugused on nende xy - tasapinnale kujutatud projektsiooni võrrandid?

170. Leida telglõigud, mille lõikab ära sirgjoone $x = z - 4$, $y = 2z + 1$ xy-tasapinnale kujutatud projektsioon seda tasapinda määrajatelt koordinaatide telgedelt.

171. Määrata sirgjoone projektsioonide võrrandid, teades et sirgjoon lõikab xy-tasapinda punktis A (3,- 5) ja xz-tasapinda punktis B (-1,2).

172. Leida sirgjoone projektsioonide võrrandid kui sirgjoon läheb läbi antud kahe punkti; 1) A (1, - 3,2) ja B (3,5,- 1); 2) A (0,2;1,5;-2) ja B (4;2,4;3,1).

173. Eelmise ülesande andmete põhjal leida sirgjoone parametraalsed võrrandid ja nende abil määrata sirgjoone lõik-

punktid koordinaatide tasapindadega.

174. Antud sirgjoone parameetraalsed võrrandid

$x=\frac{3-2\lambda}{1+\lambda}$, $y=\frac{1+3\lambda}{1+\lambda}$, $z=\frac{5\lambda}{1+\lambda}$. Määrata selle sirgjoone niisuguse punkti koordinaadid x ja z, mille koordinaat y on antud ja nimelt $y = 2$.

175. Antud sirgjoone parameetraalsed võrrandid

$x=\frac{1+3\lambda}{1+\lambda}$, $y=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, $z=\frac{2\lambda-5}{1+\lambda}$. Määrata selle sirgjoone projektsioonide võrrandid.

176. Selgitada, kas kaks antud sirgjoont üksteist lõikavad ja juhtumisel, kui lõikavad, määrata nende lõikpunkti koordinaadid. Antud on sirgjoonte projektsioonide võrrandid järgmiselt:

1) $\left.\begin{array}{l} x = 7z + 5 \\ y = 5z - 9 \end{array}\right\}$ ja $\left.\begin{array}{l} x = 3z + 12 \\ y = -3z + 5 \end{array}\right\}$; 2) $\left.\begin{array}{l} x = 5z - 3,8 \\ y = 1,1z + 2 \end{array}\right\}$ ja

$\left.\begin{array}{l} x = 2,7z + 1,5 \\ y = -1,2z + 7,3 \end{array}\right\}$; 3) $\left.\begin{array}{l} x = 2z - 1,5 \\ y = -z + 5 \end{array}\right\}$ ja $\left.\begin{array}{l} x = 5z + 1 \\ y = 2,5z - 2 \end{array}\right\}$.

177. Määrata eelmises ülesandes antud kahe sirgjoone läbi sünnitatud nurk.

---

§ 10. Tasapind.

Valemid: 1) Tasapinda määrajaks võrrandiks on üldisel juhusel esimese astme võrrand kolme muutuva suuruse suhtes:

$$Ax + By + Cz = D.$$

2) Jagades selle võrrandi mõlemaid pooli vaba

liikmega D ja märkides selle läbi saadud muutujate suuruste uusi koeffitsienta uute tähtiga, saame tasapinna võrrandile ande järgmise kuju:

$$Lx + My + Nz = 1.$$

3) Kui edasi märgime koeffitsientidele L M ja N vastavaid ümberpöörduid suurusi vastavalt a, b ja c läbi, siis omab tasapinna võrrand järgmise kuju:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Selles võrrandis tähendavad jäädavad suurused a, b ja c neid lõikusi, mille tasapind ära lõikab vastavalt x-, y- ja z-teljelt.

4) Avaldades lõpuks tasapinna võrrandist ühe muutuva suuruse, näiteks z, kahe teise muutuva läbi, võime tasapinna võrrandile anda järgmise kuju:

$$z = \ell x + my + n.$$

Selles võrrandis tähendab vaba liige geomeetriliselt seda lõiku, mille tasapind ära lõikab z-teljelt, aga koeffitsiendid ℓ ja m tähendavad nende nurkade tangenseid, mille tasapinna lõikjooned (jälgjooned) zx-ja zy-koordinaatide tasapindadel sünnitavad vastavalt x- ja y-telje poositiivse sihiga.

5) Erijuhused. a) Kui tasapinna võrrandis puudub vaba liige, näiteks $Ax + By + Cz = 0$, siis tähendab võrrand tasapinda, mis läbi koordinaadistiku algpunkti läheb.

b) Kui tasapinna võrrandis puudub liige ühe muutuva suurusega, näiteks $Ax + By = C$, siis tähendab see võrrand tasapinda, mis on paralleelne z-teljega, ehk on perpendikulaarne xy-tasapinnaga. See võrrand on ühtlasi ka tasapinna jälje võrrandiks xy-tasapinnal.

c) Kui tasapinna võrrandis puuduvad kaks liiget muutvate suurustega, nagu näiteks võrrandis $Ax = D$, siis tähendab see võrrand tasapinda, mis on asetatud paralleelselt yz-tasapinnaga, kusjuures tema iga punkti kaugus sellest tasapinnast on võrdne $\frac{D}{A}$.

d) Kui lõpuks ka veel vabaliige puudub, nõnda et võrrand omab järgmise kuju: $X = 0$, siis tähendab võrrand yz tasapinda ennast. Samuti tähendavad võrrandid $y = o$ ja $z = o$ vastavalt xz- ja xy-tasapinda.

e) Kui tasapind on määratud koordinaadistiku algpunktist tasapinnale kujutatud perpendikulaarjoone pikkuse p ja selle perpendikulaari ja koordinaatide telgede läbi sünnitatud nurkade α, β ja γ kaudu, siis saab nõnda nimetatud normaalne tasapinna võrrand: $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$. Igat tasapinna võrrandit võib muundada normaalseks, jagades selle võrrandi kõiki liikmeid ruutjuurega võrrandi muutuvate liigete koeffitsientide ruutude summast. Näiteks, võrrandile $Ax + By + Cz = D$ vastav normaalne võrrand oleks $\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$, kus vaba liige $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ tähendab tasapinna kaugust algpunktist, aga muutuvate liigete koeffitsiendid $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ja $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ on vastavalt võrdsed nurkade α, β ja γ koosinustega. Tasapinna normaalse võrrandi abil on kerge määrata antud punkti kaugust tasapinnast. Selleks tulevad võrrandisse asetada antud punkti koordinaadid jooksvate koordinaatide asemele ja arvutades määrata siis võrrandi polünoomi väärtus. See polünoomi väärtus ongi punkti kauguseks tasapinnast.

7) a) Kahe tasapinna $Ax + By + Cz = D$ ja $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ läbi sünnitatud nurga φ koosinus $\cos\varphi = \dfrac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$

b) Kui kaks tasapinda on omavahel perpendikulaarsed, siis peab olema $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

c) Kui kaks tasapinda on omavahel paralleelsed siis peab olema $A:B:C = A_1:B_1:C_1$.

8) Kui tasapind $Ax + By + Cz = D$ on perpendikulaarne sirgjoonega, mis on määratud võrranditega $x = mz + n$ ja $y = m_1z + n_1$, siis peab olema

$$m = \frac{A}{C} \text{ ja } m_1 = \frac{B}{C}.$$

178. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind on määratud kolme antud punkti läbi: A (1,- 5,0), B (3,2,- 1) ja C (0,5,3) ja määrata tema järlgjooned koordinaatide tasapindadel.

179. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind on määratud sirgjoonega $x = 3z + 2$; $y = -z + 3$ ja punktiga A (3,0,- 1) ja määrata selle tasapinna kaugus algpunktist.

180. Kas punkt A (2,1,- 5) asub tasapinnal, mis koordinaatide telgedelt ära lõikab lõigud $l = 3$, $m = -7$ ja $n = -2$?

181. Leida niisuguse võrrand, mis x- ja y-teljelt ära lõikab lõigud $l = 5$ ja $m = -6$ ja z-teljega paralleelne on.

182. Anda järgmistele tasapinna võrranditele normaalkuju: $2z - 5x + 3y = 7$; $5z - x = 0$; $y + x = 0$; $x + y + z = \sqrt{3}$.

183. Määrata punktide $(1,5,-3)$; $(2,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$; $(0,-1,0)$; $(0,5,-3)$; $(1,1,1)$ kaugused tasapinnast $7x - 25y + z - 3 = 0$.

184. Määrata kahe tasapinna läbi sünnitatud nurk, kui antud on 1) $5x - 7y + 2z - 4 = 0$ ja $6z = 21y - 15x + 1$, 2) $5x - y + 2z - 1 = 0$ ja $z = 3x + 7y - 5$.

185. Määrata kolme antud tasapinna lõikpunkti koordinaadid, kui antud tasapindadeks on: $2x + 3y + 5z - 1 = 0$, $x - 5y + 4z - 3 = 0$ ja $7x + y - 3z + 5 = 0$.

186. Määrata antud tasapindade $5x - 7y + 2z - 1 = 0$ ja $7x + 3y - 4z + 6 = 0$ lõikjoone võrrandid.

187. Määrata tasapinna $7x - 2y + 8z - 3 = 0$ ja sirgjoonte $x = 5z - 1$, $y = 2z + 3$; $x = 4z + 1$, $y = 18z + 2$; $x = 5z$, $y = -z$ lõikpunkti koordinaadid.

188. Määrata tasapinna võrrand, mis läbi punkti A $(2,5,-3)$ läheb paralleelselt sirgega, mis ühendab punktid B $(1,4,-3)$ ja C $(2,6,7)$ ja perpendikulaarselt tasapinnaga $5x - 2y + 3z - 8 = 0$.

189. Antud tasapinnale läbi antud punkti kujutada perpendikulaarjoon: 1) $5x - 7y + 2z - 1 = 0$, $(-1,3,-2)$; 2) $3x + 2y - 5z - 2 = 0$, $(0,0,0)$; 3) $2x - 3z - 1 = 0$, $(2,0,1)$.

190. Läbi antud punkti vaja antud sirgele kujutada perpendikulaarne tasapind:

1) $(0,0,0)$, $x = z - 3$, $y = 2z + 1$; 2) $(1,-3,2)$, $x = -5z + 3$, $y = 7z - 4$.

191. Määrata nurgad, mille sünnitavad koordinaatide tasapinnad antud tasapinnaga: 1) $3x - y + 7z = 5$; 2) $5x + 2y - 3z - 1 = 0$; 3) $x + y - 2z = 4$; 4) $x - 3z = 6$.

192. Määrata nurk, mille sünnitavad kaks antud tasapinda: 1) $4x - 3y + z = 2$ ja $2x + y - 3z = 5$; 2) $x + 3y - z = 1$ ja $2x - 3y + 5z = 6$.

§ 11. Kõverad pinnad, vindi joon ja vindi pind.

Valemid: 1) Üldine pöördpinna võrrand, kui see on saadud kujutajajoone pöördumisel ümber z-telje, on järgmine:

$$x^2 + y^2 = \left[f(z)\right]^2,$$

mille juures kujutaja joone võrrandiks xz-tasapinnal on $x = f(z)$ ehk yz-tasapinnal $y = f(z)$.

2) Kui kujutajajooneks võtta ringjoon, siis saame kera pinna, mille võrrandiks on sel puhul $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

3) Kui kujutaja-jooneks xz tasapinnal on paraabol $x^2 = 2pz$, siis saame pinna, mida nimetakse pöörd-paraaboloidiks ja mille võrrand on $x^2 + y^2 = 2pz$.

4) Kui kujutaja-jooneks on ellips, mille senter asub koordinaatide algpunktis, aga suurem telg on paigutatud z-teljele, siis saame, pinna, mida nimetatakse pikerguseks pöörd--ellipsoidiks ja mille võrrandiks on

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

5) Kui kujutaja ellipsi lühem telg on paigutatud z-teljele nõnda, et senter tuleb algpunkti, siis saame n.n. laberiku pöörd-ellipsoidi, mille võrrand on

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

6) Kui kujutaja-jooneks on hüperbol, mille senter asub koordinaatide algpunktis ja tema reaalne telg asub z-teljel, siis saame pinna, mida nimetatakse kahekestseks pöörd-hüperboloidiks ja mille võrrandiks on

$$-\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

7. Kui kujutajaks jooneks on hüperbol, mille senter asub koordinaatide algpunktis, aga imaginaarne telg on paigutatud z-teljele, siis saame pinna, mida nimetatakse ühekestseks pöörd-hüperboloidiks ja selle võrrand

on

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

8) Pinda, mille võrrand on $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, nimetatakse elliptiliseks paraboloidiks (Võrdle punkt 3ga).

9) Pinda, mille võrrandiks on $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, nimetatakse hüperboolseks paraboloidiks.

10) Pinda, mille võrrandiks on $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ nimetatakse kolmeteljeliseks ellipsoidiks.

11) Pindasi, mille võrranditeks on $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ja $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, nimetatakse vastavalt ühekestseks ja kahekestseks elliptiliseks hüperboloidiks.

12) Kui vindi joone teljeks on z-telg, raadiuseks on a ja nurk mille raadius sünnitab xz-tasapinnaga on φ, siis on vindi joone võrranditeks $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ ja $z=\frac{h\varphi}{2\pi}$, kus nurk φ on võetud parameetriks aga suurus h on n.n. vindi joone samm.

13) Vindi pinna võrrandiks on $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{2\pi z}{h}$.

193. Leida koonuse pinna võrrand, kui koonuse teljeks on z-telg, tema tipu kaugus algpunktist on h ja xy-tasapinnaga lõikes saadud ringi raadius on r:

1) $h = 10$ ja $r = 5$; 2) $h = 7$ ja $r = 6$; 3) $h = -3$ ja $r = 3$.

194. Leida pöörd-paraboloidi võrrand, kui kujutaja paraaboli fookuse kaugus algpunktist on antud ja võrdub 3 ja näidata et, lõigates seda pinda teljega paralleelse tasapinnaga, saame lõikes paraaboild aga lõigates tasapinnaga, mis perpendikulaarne teljega, saame lõikes ringjooned.

195. Lõigata pöörd-ellipsoidisi ja -hüperboloidisi mitmesuguste koordinaatide tasapindadega paralleelsete tasapindadega, mis asuvad mitmesugusel kaugusel koordinaatide algpunktist, ja selgitada missugune saab igal üksikul korral lõikjoon.

196. Näidata, et lõigates kolmeteljelist ellipsoidi tasapindadega, mis on paralleelsed koordinaatide tasapindadega, saame lõikes igal juhul ellipsid.

197. Näidata, et lõigates vastavate tasapindadega ühekestset pöörd- ehk elliptilist-hüperboloidi ja hüperboolset-paraboloidi võime lõikes saada sirgjooned.

198. Näidata, et lõigates vindi-pinda tasapindadega, mis on perpendikulaarsed vindi-pinna teljega saame lõikes sirgjooned.

S I S U K O R D.