Ueber die

Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten.

Von

Piers Bohl.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1893.

Ueber die

Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten.

Verfasst und behufs Erlangung des Grades eines

Magisters der Mathematik

mit Genehmigung

Einer Hochverordneten physiko-mathematischen Facultät der Kaiserl. Universität

zu Dorpat

zur öffentlichen Vertheidigung bestimmt

von

Piers Bohl.

Ordentliche Opponenten:

Mag. **G. von Grofe.** — Prof. Dr. **A. von Oettingen.** — Prof. Dr. **A. Kneser.**

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1893.

Gedruckt mit Genehmigung der physiko-mathematischen Facultät.

Dorpat, den 28. December 1892.

Nr. 235. Prodecan: Dr. **Arthur von Oettingen.**

Die Bedeutung der trigonometrischen Reihen mit Argumenten, welche einer reellen Variablen proportional sind, beruht hauptsächlich darauf, dass sie auch für Gebiete, die nicht zwischen endlichen Grenzen liegen, gleichmässig convergiren können. Der Nutzen der letzteren Eigenschaft bei numerischen Rechnungen ist bekannt. Es ist daher namentlich in der Astronomie und Mechanik wichtig festzustellen, ob ein Problem durch derartige gleichmässig convergente trigonometrische Reihen gelöst werden kann. In Fällen von grösserer Allgemeinheit und Bedeutung ist dieses jedoch bisher fast nur für die Reihen mit einem Argument erreicht worden. Was die Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten anlangt, so ist ihr Gebrauch nur bei Problemen specielleren Charakters ein legitimer, gerade in den wichtigsten Fällen aber ein bloss formaler.

Ueberschaut man den Weg, der beim Auftreten nur eines Arguments im allgemeinen zum Ziele führt, so scheint es, als ob der Erfolg hier an eine indirekte Methode geknüpft ist, welche beim Gebrauch von mehr Argumenten kein entsprechendes Gegenstück findet. Anstatt nämlich z. B. direkt eine trigonometrische Reihe aufzustellen, die formal den Bedingungen der Aufgabe genügt, und darauf durch Untersuchung der Coefficienten das ganze Verfahren zu rechtfertigen, ist es meist leichter, mit dem Nachweis der Periodicität einer Lösung zu beginnen. Dann ist es grösstentheils möglich zu zeigen, dass die Bedingungen der Entwickelbarkeit in eine gleichmässig convergente trigonometrische Reihe erfüllt sind; ebenso macht dann häufig die Bestimmung der Coefficienten keine erheblichen Schwierlgkeiten mehr.

Auf Grund dieser Erwägungen habe ich mir die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob nicht den gleichmässig convergenten trigonometrischen Reihen mit mehreren Argumenten eine Eigenschaft zukommt, die für sie ebenso charakteristisch ist, wie die Periodicitätseigenschaft für die trigonometrischen Reihen mit einem Argument. Oder mit anderen

Worten: Ich erhebe die Frage nach den Bedingungen der Entwickelbarkeit einer Function einer Variablen in eine gleichmässig convergente trigonometrische Reihe mit mehreren Argumenten.

In der folgenden Abhandlung wird diese Frage beantwortet, indem nothwendige und hinreichende Bedingungen für das genannte Verhalten gegeben werden. Damit ist die Aussicht eröffnet, die trigonometrischen Reihen mit mehreren Argumenten ähnlich wie die mit einem Argument einzuführen.

Von der Anwendbarkeit der hier gegebenen Sätze auf mechanische Probleme sowie auf gewisse functionentheoretische Fragen habe ich mich überzeugt.

1.

$a_1, a_2 \ldots a_m$ seien m von Null verschiedene Grössen [1]). Mit t werde eine Variable bezeichnet und mit u_ν ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) ganze rationale Functionen der

$$\sin \frac{2\pi}{a_\mu} t \qquad \cos \frac{2\pi}{a_\rho} t \qquad \mu, \rho = 1, 2 \ldots m$$

Die trigonometrische Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu + \ldots$$

sei für eine irgend wie definirte Werthmenge T der Variablen t gleichmässig convergent. Für jede Grösse $\varepsilon > 0$ soll nämlich eine positive ganze Zahl n so bestimmt werden können, dass Σu_ν ($\nu = m, m + 1 \ldots m + \sigma - 1$) für jedes der Werthmenge angehörende t absolut kleiner als ε wird, sobald die ganze Zahl $m > n$ und die ganze Zahl $\sigma > 0$ ist [2]). Die Reihe definirt dann für die Werthmenge T eine Function $\phi(t)$, der offenbar folgende Eigenschaft zukommt. Für jede Grösse $e > 0$ kann man eine andere $\eta > 0$ so bestimmen, dass $\phi(t + \tau) - \phi(t)$ absolut kleiner als e wird, sobald die Grössen t und τ den folgenden Bedingungen genügen:

1) t und $t + \tau$ gehören der Werthmenge T an.

2) Die Grössen $\frac{\tau}{a_\mu}$ ($\mu = 1 \ldots m$) unterscheiden sich von ganzen Zahlen um weniger als η.

---

1) Da in dieser Abhandlung nur reelle endliche Grössen auftreten, ist der Zusatz „reell und endlich" — mit Ausnahme einiger Stellen, wo ein Missverständniss zu befürchten war — consequent fortgelassen worden.

2) Um Missverständnisse zu vermeiden, mache ich auf diese Fassung des Begriffs „gleichmässig convergente trigonometrische Reihe" ausdrücklich aufmerksam.

Die eben erwähnte Eigenschaft, welche ich als bekannt oder wenigstens auf der Hand liegend nur kurz anzuführen brauchte, muss demnach eine Function $\psi(t)$ nothwendig besitzen, wenn sie in eine trigonometrische Reihe der genannten Art entwickelbar sein soll. Meine Abhandlung bringt den Nachweis, dass die in Rede stehende Eigenschaft aber auch hinreichend ist, um die Entwickelbarkeit der Function $\psi(t)$ zu gewährleisten.

Ueber den Gang meiner Untersuchungen sei hier bemerkt, dass ich zunächst einen Specialfall erledige, welcher eine eingehendere Untersuchung verdient. Hieran sind dann die Verallgemeinerungen angeschlossen.

Die erste Beschränkung in dem genannten Fall besteht in der Voraussetzung, dass zwischen den Grössen $\frac{1}{\alpha_1} \dots \frac{1}{\alpha_m}$ keine homogenen linearen Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. Dass diese Annahme keine erhebliche Einbusse an Allgemeinheit zur Folge hat, erhellt aus der folgenden Bemerkung. Kommt einer Function $\psi(t)$ die von uns als charakteristisch hingestellte Eigenschaft für ein System von Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_m$ zu, und bestehen zwischen den $\frac{1}{\alpha_1} \dots \frac{1}{\alpha_m}$ Gleichungen der genannten Art, so kann man immer eine geringere Anzahl von Grössen $A_1\, A_2 \dots$ angeben, für welche der Function die Eigenschaft ebenfalls zukommt und zwischen denen keine derartigen Gleichungen bestehen. Der Beweis dieser Bemerkung ist einfach, kann aber hier übergangen werden, da er sich auch aus unseren späteren Untersuchungen von selbst ergiebt, sobald man berücksichtigt, dass die trigonometrische Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ auch als Reihe mit weniger als m Argumenten geschrieben werden kann, wenn zwischen den $\frac{1}{\alpha_1} \dots \frac{1}{\alpha_m}$ Gleichungen der genannten Art bestehen.

Die zweite Voraussetzung unseres Specialfalles besteht darin, dass die Werthmenge T das ganze reelle Gebiet ausmacht.

2.

Es seien $\beta_1\, \alpha_1\, \beta_2\, \alpha_2 \dots \beta_m\, \alpha_m$ von Null verschiedene Grössen, von denen kein Paar $\alpha_\mu\, \beta_\mu$ eine Gleichung $\nu\beta_\mu + \nu'\alpha_\mu = 0$ ($\nu\nu'$ von Null verschiedene ganze Zahlen) genügt. Dann kann man bekanntlich [1]) stets ganze von Null verschiedene Zahlen $n\, n_1\, n_2 \dots n_m$ so bestimmen, dass die Grössen $s_1 = n\beta_1 + n_1\,\alpha_1$, $s_2 = n\beta_2 + n_2\,\alpha_2$, $\dots$, $s_m = n\beta_m + n_m\,\alpha_m$ dem absoluten Werth nach kleiner werden als eine Grösse δ, die grösser als Null, sonst aber beliebig gewählt ist. Ohne die Allgemeinheit zu beein-

1) Für m = 2 ist dieser Satz — in etwas allgemeinerer Fassung — von Jacobi gegeben. S. Jacobi, De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis etc. Journal f. Math. XIII. Eine Erweiterung desselben für $m > 2$ findet sich bei Clebsch und Gordan, Theorie der Abelschen Functionen pag. 130 ff. Ich gebe hier einen Beweis des Satzes, da mir die Begründung desselben a. a. O. nicht vollständig scheint.

trächtigen, kann $\delta < |\alpha_\mu|$ und $\delta < |\beta_\mu|$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ vorausgesetzt werden, was im Folgenden geschehen soll.

Ich beweise diesen Satz, indem ich zunächst zeige, dass er für die m Grössen $s_1 \ldots s_m$ giltig ist, wenn er für $m-1$ Grössen $s_1 \ldots s_{m-1}$ bewiesen ist.

Nehmen wir letzteres an, so kann man $n\, n_1 \ldots n_{m-1}$ so wählen, dass $s_1 \ldots s_{m-1}$ absolut kleiner als $\frac{\delta}{2}$ aber von Null verschieden sind, und darauf n_m so bestimmen, dass s_m einen Werth zwischen o und α_m, diese Grenzen ausgeschlossen, annimmt. Wird dann ebenso eine zweite Wahl $n'\, n_1' \ldots n'_{m-1}$ getroffen, welche einem $\frac{\delta'}{2}$ entspricht, das kleiner als der kleinste Werth unter den $|s_1| \ldots |s_{m-1}|$ ist, so muss n' von n verschieden sein. Die Werthe der s-Grössen seien jetzt $s_1' \ldots s'_{m-1}$. Durch geeignete Wahl von n'_m erhält s'_m einen Werth zwischen o und α_m. Da n' von n verschieden ist und zwischen β_m und α_m keine Beziehungen der oben angeführten Art bestehen sollen, muss auch s'_m von s_m verschieden sein. Indem man so fortfährt, bestimmt man die Grössen $s_m\, s'_m\, s''_m \ldots$, welche alle zwischen o und α_m liegen und — wie leicht ersichtlich — alle von einander verschieden sind. Hieraus folgt, dass es stets Grössenpaare $s_m^{(\mu)}\, s_m^{(\nu)}$ $(\mu \lesseqgtr \nu)$ geben muss, für welche $o < |s_m^{(\mu)} - s_m^{(\nu)}| < \delta$ ist. Dann lösen die ganzen von Null verschiedenen Zahlen

$$n = n^{(\mu)} - n^{(\nu)}, \quad n_1 = n_1^{(\mu)} - n_1^{(\nu)}, \quad \ldots\ldots \quad n_m = n_m^{(\mu)} - n_m^{(\nu)}$$

die Aufgabe, von der unser Satz handelt.

Nun ist aber für $m = 1$ die Richtigkeit unserer Behauptung evident. Dasselbe gilt daher auch für $m > 1$ q. e. d.

Auf Grund der vorstehenden Bemerkungen werde ich nun, um spätere Unterbrechungen zu vermeiden, einen Satz [1]) beweisen, der im Folgenden angewendet werden wird. Es ist der folgende:

$\beta\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ seien von Null verschiedene Grössen, zwischen deren reciproken Werthen keine linearen homogenen ganzzahligen Gleichungen bestehen, wofern nicht alle ganzzahligen Coefficienten gleich Null sind. Ferner bezeichne ich ähnlich wie vorhin

$$n\beta + n_1\, \alpha_1 = s_1 \quad n\beta + n_2\, \alpha_2 = s_2 \ldots n\beta + n_m\, \alpha_m = s_m$$

Man kann dann die ganzen Zahlen $n\, n_1 \ldots n_m$ so wählen, dass $s_1 \ldots s_m$ sich von beliebig gegebenen Grössen $k_1 \ldots k_m$ um weniger als eine gegebene Grösse $\delta > o$ unterscheiden.

---

1) Ob derselbe neu ist, weiss ich nicht. Bei Clebsch und Gordan, Abelsche Functionen, findet sich a. a. O. etwas ähnliches. Sollte damit — die Ausdrucksweise ist daselbst uncorrekt — dasselbe wie hier gemeint sein, so fehlt jedenfalls ein zureichender Beweis. Auch ist dann die dortige Behauptung ohne beschränkende Bedingungen unrichtig.

Beim Beweise kann man $\delta < |\beta|$ und $< |\alpha_\mu|$ $(\mu = 1 \ldots m)$ voraussetzen. Denn andernfalls beweise man den Satz für ein δ', welches diesen Ungleichungen genügt; dann gilt er auch für jedes $\delta > \delta'$.

Unser Satz ist bewiesen, sobald man zeigen kann, dass m^2 s-Grössen

$$s_1' = n'\beta + n_1'\alpha_1 \qquad s_2' = n'\beta + n_2'\alpha_2 \qquad \ldots\ldots s_m' = n'\beta + n_m'\alpha_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_1^{(m)} = n^{(m)}\beta + n_1^{(m)}\alpha_1 \qquad s_2^{(m)} = n^{(m)}\beta + n_2^{(m)}\alpha_2 \qquad \ldots\ldots s_m^{(m)} = n^{(m)}\beta + n_m^{(m)}\alpha_m$$

so gewählt werden können, dass sie sämmtlich absolut kleiner als eine beliebig gegebene Grösse $e > o$, aber von Null verschieden sind; dass ferner die Determinante

$$\left| s_\mu' \; s_\mu'' \ldots s_\mu^{(m)} \right| \qquad \mu = 1, 2 \ldots m$$

nicht verschwindet.

Denn dann wähle man $e < \frac{2\delta}{m}$ und bestimme m Grössen p_μ durch die Gleichungen

$$p_1 s_\mu' + p_2 s_\mu'' + \ldots + p_m s_\mu^{(m)} = k_\mu \qquad \mu = 1\ 2 \ldots m$$

Schreibt man dann anstatt der p ganze Zahlen, die sich von den p nicht mehr als um $\frac{1}{2}$ unterscheiden, so ist der Unterschied zwischen den linken Seiten und den k geringer als δ. Erinnert man sich nun an die Bedeutung der s-Grössen $s_\mu^{(\nu)} = n^{(\nu)}\beta + n_\mu^{(\nu)}\alpha_\mu$ $(\nu = 1\ 2 \ldots m)$, so ist die Lösung der Aufgabe unseres Satzes evident.

Um nun die Möglichkeit einer solchen Wahl von $s_\mu^{(\nu)}$ zu zeigen, beweisen wir zunächst folgendes:

Wir nehmen an, es sei gezeigt, dass man $s_1'\ s_1'' \ldots s_1^{(\nu-1)}\ s_2'\ s_2'' \ldots s_2^{(\nu-1)} \ldots s_m' \ldots s_m^{(\nu-1)}$ (ν eine bestimmte ganze Zahl $\leqq m$) so wählen kann, dass folgende Bedingungen erfüllt sind

1^a) Alle genannten s sind absolut kleiner als δ aber von Null verschieden.

2^a) Die Determinante $D_{\nu-1} = \left| n^{(\mu)}\ n_1^{(\mu)} \ldots n_{\nu-2}^{(\mu)} \right|$ $\mu = 1\ 2 \ldots \nu-1$ ist von Null verschieden.

3^a) Die Determinante $E_{\nu-1} = \left| s_\mu' \ldots s_\mu^{(\nu-1)} \right|$ $\mu = 1 \ldots \nu-1$ ist von 0 verschieden.

Dann können noch die s-Grössen $s_1^{(\nu)} \ldots s_m^{(\nu)}$ so bestimmt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Alle s sind absolut kleiner als δ aber von 0 verschieden.

2) Die Determinante $D_\nu = \left| n^{(\mu)} \dots n^{(\mu)}_{\nu-1} \right| \; \mu = 1 \,.\,.\, \nu$ ist von 0 verschieden.

3) Die Determinante $E_\nu = \left| s'_\mu \dots s^{(\nu)}_\mu \right| \; \mu = 1 \,.\,.\,.\, \nu$ ist von 0 verschieden.

Zum Beweise wählen wir eine Zahl ε, welche der Ungleichung $o < \varepsilon < \delta$ genügt, sonst aber zunächst beliebig ist. Ferner bestimmen wir $s^{(\nu)}_1 \dots s^{(\nu)}_m$ so, dass diese Grössen absolut kleiner sind als ε, aber von Null verschieden ausfallen. Dann ist 1) erfüllt. Es werde angenommen 2) sei nicht erfüllt, es sei also $D_\nu = 0$. Da aber $D_{\nu-1} \gtrless 0$ ist, kann man dann immer $\nu-1$ Grössen b finden, die nicht alle Null sind und den ν Gleichungen genügen

$$n^{(\nu)} = b_1 n' + b_1 n'' + \dots + b_{\nu-1} n^{(\nu-1)}$$

$$n^{(\nu)}_1 = b_1 n'_1 + b_2 n''_1 + \dots + b_{\nu-1} n^{(\nu-1)}_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n^{(\nu)}_{\nu-1} = b_1 n'_{\nu-1} + b_2 n''_{\nu-1} + \dots + b_{\nu-1} n^{(\nu-1)}_{\nu-1}$$

Aus den $\nu-1$ ersten Gleichungen folgt, dass man setzen kann $D_{\nu-1} \,.\, b_\mu = g_\mu$, wo die g_μ ganze Zahlen sind. Indem man nun die Gleichungen resp. mit $\beta\ \alpha_1\ \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_{\nu-1}$ multiplicirt, der Reihe nach die zweite bis ν^{te} zur ersten addirt und endlich alles mit $D_{\nu-1}$ multiplicirt, erhält man die Gleichungen

$$D_{\nu-1} s^{(\nu)}_1 = g_1 s'_1 + g_2 s''_1 + \,.\,.\, + g_{\nu-1} s^{(\nu-1)}_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D_{\nu-1} s^{(\nu)}_{\nu-1} = g_1 s'_{\nu-1} + g_2 s''_{\nu-1} + \,.\,.\, + g_{\nu-1} s^{(\nu-1)}_{\nu-1}.$$

Da $E_{\nu-1} \gtrless 0$ vorausgesetzt wurde, kann man diese Gleichungen nach den g auflösen. Es ergeben sich diese als homogene lineare Functionen von $s^{(\nu)}_1 \dots s^{(\nu)}_{\nu-1}$, deren Coefficienten nur von $D_{\nu-1}$ und den $s^{(\lambda)}_\mu$ ($\lambda = 1 \dots \nu - 1$, $\mu = 1 \dots \nu - 1$) abhängen, also von der Wahl von ε unabhängig sind. Erinnert man sich nun daran, dass die $s^{(\nu)}_1 \dots s^{(\nu)}_{\nu-1}$ absolut kleiner als ε waren, so sieht man, dass ε von vornherein so klein genommen werden konnte, dass, wie auch sonst die $s^{(\nu)}_1 \dots s^{(\nu)}_m$ gewählt sein mögen, alle g absolut kleiner als 1 sich ergeben. Dann müssten alle g verschwinden, was aber unmöglich ist, da $D_{\nu-1}$ wie auch $s^{(\nu)}_1 \dots s^{(\nu)}_{\nu-1}$ von Null verschieden sind. Es folgt hieraus, dass, sobald ε klein genug gewählt ist, D_ν nicht verschwinden kann.

Sind nun demgemäss die $s_1' \dots s_1^{(\nu)} \dots s_m' \dots s_m^{(\nu)}$ den Bedingungen 1) und 2) entsprechend gewählt, so müssen sie auch der Bedingung 3) genügen. Um dieses zu zeigen, nehmen wir an, es sei $E_\nu = 0$ also

$$\begin{vmatrix} s_1' & \dots\dots & s_1^{(\nu)} \\ & \dots\dots & \\ s_\nu' & \dots\dots & s_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

Durch Rändern dieser Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ n'\beta & s_1' & \dots\dots & s_\nu' \\ & & \dots\dots & \\ n^{(\nu)}\beta & s_1^{(\nu)} & \dots\dots & s_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

Subtrahiren wir hier die erste Colonne von den übrigen und dividiren dann durch $\beta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ so kommt

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\alpha_1} & \dots\dots & -\frac{1}{\alpha_\nu} \\ n' & n_1' & \dots\dots & n_\nu' \\ & & \dots\dots & \\ n^{(\nu)} & n_1^{(\nu)} & \dots\dots & n_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

Da zwischen $\frac{1}{\beta} \dots \frac{1}{\alpha_\nu}$ keine linearen homogenen ganzzahligen Relationen stattfinden sollen, so ist dies nur möglich, wenn die Determinanten der Matrix $\left| n^{(\mu)}\, n_1^{(\mu)} \dots n_\nu^{(\mu)} \right| \mu = 1 \dots \nu$ und insbesondere die Determinante $D_\nu = \left| n^{(\mu)}\, n_1^{(\mu)} \dots n_{\nu-1}^{(\mu)} \right| \mu = 1 \dots \nu$ verschwinden. Nach 2) war aber $D_\nu \gtrless 0$. Mithin kann auch E_ν nicht verschwinden. q. e. d.

Hat man ein System $s_1' \,.\,.\, s_m'$ so bestimmt, dass alle s absolut kleiner als δ aber von Null verschieden sind, so ist $D_1 = n'$ von Null verschieden. Denn δ war kleiner als $|\beta|$ und $|\alpha_\mu|$ $(\mu = 1 \,.\,.\, m)$, sodass kein n gleich Null sein kann. Auch E_1 ist von Null verschieden. Für $\nu = 2$ sind daher die Voraussetzungen unseres eben bewiesenen Satzes erfüllt, und man kann daher ein zweites System $s_1'' \dots s_m''$ so wählen, dass alle s absolut kleiner als δ aber von Null verschieden sind und D_2 sowie E_2 nicht verschwinden. So fortfahrend erhält man schliesslich ein System von s-Grössen $s_1' \ldots s_m' \ldots s_1^{(m)} \ldots s_m^{(m)}$, das allen Anforderungen genügt. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Ich bemerke, dass man auch sagen kann: Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ von Null verschiedene Grössen, zwischen deren reciprokon Werthen keine Beziehungen des genannten Art bestehen, so kann man immer Grössen τ so bestimmen, dass $\frac{\tau}{\alpha_1} - k_1, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m} - k_m$ sich von ganzen Zahlen um weniger als eine gegebene Grösse $e > 0$ unterscheiden. Denn man kann dann stets eine solche Grösse β finden, dass die Bedingungen unseres obigen Satzes für $\beta\,\alpha_1 \ldots \alpha_m$ erfüllt sind. Es kann nämlich ein geeignetes β aus jedem Continuum ausgewählt werden, da die Grössen $\frac{r_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{r_m}{\alpha_m}$ (r rationale Zahlen) eine abzählbare Menge bilden, während ein Continuum bekanntlich nicht abzählbar ist. Ist β gewählt, so kann τ als ganzes Vielfaches von β so bestimmt werden, dass es die Aufgabe löst.

Man kann auch sagen: Genügen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ den genannten Bedingungen, so kann man immer τ so bestimmen, dass $\frac{\tau}{\alpha_2} - k_2, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m} - k_m$ sich von ganzen Zahlen um weniger als $e > 0$ unterscheiden, während $\frac{\tau}{\alpha_1} - k_1$ eine ganze Zahl ist. Zu diesem Zweck braucht man nur ein T so zu bestimmen, dass die $\frac{T}{\alpha_\mu} - k_\mu$ ($\mu = 1 \ldots m$) sich von ganzen Zahlen (etwa $n_1 \ldots n_m$) um weniger als ε unterscheiden, wobei $\varepsilon > 0$ aber $<$ als die kleinste der Grössen $\left|\frac{\alpha_\mu}{\alpha_1} \cdot \frac{e}{2}\right|$ ist ($\mu = 1 \ldots m$). Dann löst $\tau = \alpha_1 (k_1 + n_1)$ die Aufgabe.

3.

Nachdem ich im Vorstehenden einige Vorfragen erledigt habe, gehe ich nun zu dem eigentlichen Gegenstande meiner Arbeit über. Ich beginne, wie schon in 1) erwähnt, mit dem besonderen Fall, wo die zu untersuchende Function für alle Werthe t gegeben ist und die reciproken Werthe der dort mit $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ bezeichneten Grössen keinen linearen homogenen ganzzahligen Relationen genügen. In dieser Nummer wird folgender Satz bewiesen.

Es sei eine Function $\phi(t)$ für alle Werthe von t gegeben, sowie m von Null verschiedene const. Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$, zwischen deren reciproken Werthen keine linearen homogenen ganzzahligen Gleichungen bestehen. Der Function ϕ komme die folgende Eigenschaft zu: Ist eine Grösse $e > 0$ gegeben, so kann eine zweite[1]) $\eta > 0$ so gewählt werden, dass $\phi(t + \tau) - \phi(t)$ bei allen Werthen von t absolut kleiner als e wird, falls die Grössen $\frac{\tau}{\alpha_1} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden. —

1) Eine solche Grösse soll „e correspondirend" genannt werden.

Es giebt dann eine Function $\Psi(x_1\, x_2 \,..\, x_m)$, welche für alle $x_1 \,..\, x_m$ einen bestimmten Werth hat, ferner gleichmässig stetig und in $x_1\, x_2 \,..\, x_m$ periodisch mit den Perioden 1 ist, endlich die Eigenschaft hat, dass für alle Werthe von t

$$\Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}\,\frac{t}{\alpha_2}\,..\,\frac{t}{\alpha_m}\right) = \phi(t)$$

wird.

Ich bemerke zunächst, dass dieser Satz für $m = 1$, wo ϕ einfach periodisch sein muss, evident ist. Es werde daher $m > 1$ vorausgesetzt.

Ich schreibe $a \equiv b$ und sage, a ist b congruent, wenn die beiden Grössen a und b sich um ganze Zahlen unterscheiden. Ich schreibe $|a_1\, a_2 \,...\, a_m| \equiv |b_1\, b_2 \,...\, b_m|$ und sage, das Symbol $|a_1\, a_2 \,..\, a_m|$ ist dem Symbol $|b_1\, b_2 \,..\, b_m|$ congruent, wenn $a_1 \equiv b_1$ $a_2 \equiv b_2 \,...\, a_m \equiv b_m$ ist. Alle einander congruenten Symbole rechne ich zu einer Classe. Eine Classe und alle Symbole derselben heissen einem Werthe t zugeordnet, wenn ein (dasselbe gilt dann von allen) Symbol der Classe dem Symbol $\left|\frac{t}{\alpha_1} \,...\, \frac{t}{\alpha_m}\right|$ congruent ist. In diesem Falle heisse auch t der Classe zugeordnet und $\phi(t)$ der Classe und ihren Symbolen entsprechend. Jedes Symbol und jede Classe heissen, wenn sie in dieser Weise irgend einem Werthe von t zugeordnet werden können, erster Categorie, andernfalls zweiter Categorie. Es gelten nun folgende Sätze:

1) Jedem Werthe t ist eine und nur eine Classe zugeordnet; einer Classe höchstens ein Werth von t.

Ersteres ist ohne weiteres klar, letzteres zeigt man wie folgt. Angenommen es wäre

$$|a_1 \,...\, a_m| \equiv \left|\frac{t_1}{\alpha_1} \,...\, \frac{t_1}{\alpha_m}\right| \quad |b_1 \,...\, b_m| \equiv \left|\frac{t_2}{\alpha_1} \,...\, \frac{t_2}{\alpha_m}\right| \quad |a_1 \,..\, a_m| \equiv |b_1 \,..\, b_m|$$

und $t_1 \gtrless t_2$, so würde daraus folgen

$$\left|\frac{t_1}{\alpha_1} \,....\, \frac{t_1}{\alpha_m}\right| \equiv \left|\frac{t_2}{\alpha_1} \,....\, \frac{t_2}{\alpha_m}\right|$$

und weiter $t_1 - t_2 = N_1 \alpha_1 = N_2 \alpha_2 = \ldots = N_m \alpha_m$ (N von 0 verschiedene ganze Zahlen). Da $m > 1$ vorausgesetzt wurde, ist dieses nicht möglich, da sonst zwischen $\frac{1}{\alpha_1}$ und $\frac{1}{\alpha_2}$ Beziehungen stattfinden würden, welche vorhin als nicht existirend vorausgesetzt wurden.

2) Wie auch die Grösse $\varepsilon > o$ und das System $k_1 \,...\, k_m$ gewählt sein mögen, immer giebt es Symbole erster Categorie, deren Elemente sich von $k_1 \,...\, k_m$ um weniger als ε unterscheiden

Man wähle nämlich t so, dass die Grössen $\frac{t}{a_1} - k_1 \ldots \frac{t}{a_m} - k_m$ sich von ganzen Zahlen $n_1 \ldots n_m$ um weniger als ε unterscheiden, was nach Nr. 2 stets möglich ist; dann ist $\left| \frac{t}{a_1} - n_1, \ldots, \frac{t}{a_m} - n_m \right|$ ein Symbol der verlangten Art.

Ebenso kann man — auf die Schlussbemerkungen von Nr. 2 gestützt — stets ein Symbol finden, dessen erstes Element k_1 ist, während sich die übrigen von k_2 etc. um weniger als eine gegebene Grösse unterscheiden.

3) Es sei eine Grösse $e > 0$ gegeben. Ist dann $\eta > 0$ eine e correspondirende Grösse, so weichen zwei Werthe von ϕ, welche Symbolen erster Kategorie entsprechen, deren Elemente sich um weniger als η unterscheiden, um weniger als e von einander ab.

Um dieses zu zeigen, seien $|a_1 \ldots a_m|$ und $|b_1 \ldots b_m|$ zwei Symbole erster Kategorie, deren Elemente sich um weniger als η unterscheiden. Es giebt dann Grössen t_1 und t_2, welche den Congruenzen genügen

$$\frac{t_1}{a_1} \equiv a_1 \ldots . \frac{t_1}{a_m} \equiv a_m \qquad \frac{t_2}{a_1} \equiv b_1 \ldots \frac{t_2}{a_m} \equiv b_m$$

Mithin haben wir dann

$$\frac{t_2 - t_1}{a_1} \equiv b_1 - a_1 \ldots .. \frac{t_2 - t_1}{a_m} \equiv b_m - a_m$$

Da die rechten Seiten hier absolut kleiner als η sind, so folgt, dass

$$\phi\,(t_1 + t_2 - t_1) - \phi\,(t_1) = \phi\,(t_2) - \phi\,(t_1)$$

absolut kleiner als e ist. q. e. d.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zur Construction der Function Ψ schreiten.

Ist $|x_1 \ldots . x_m|$ ein Symbol erster Kategorie, so ertheilen wir der Function Ψ an der Stelle $x_1 \ldots x_m$ (die wir ebenfalls erster Kategorie nennen wollen) den Werth von $\phi\,(t)$, der diesem Symbol entspricht. Ist aber $|x_1 \ldots x_m|$ ein Symbol 2. Kategorie, so verfahren wir wie folgt.

$e_1\, e_2\, e_3 \ldots .$ sei eine Reihe von Grössen > 0, welche gegen Null convergiren. $\eta_1\, \eta_2\, \eta_3 \ldots$ seien Grössen > 0, welche resp. $e_1\, e_2 \ldots .$ correspondiren. Nun wähle man ein Symbol erster Kategorie [1] aus, dessen Elemente sich von $x_1 \ldots x_m$ um weniger als $\frac{\eta_1}{2}$ unterscheiden. Dies ist nach Nr. 3,2 möglich. Der entsprechende Werth von ϕ sei ϕ_1. Dann wähle man ein Symbol erster Kategorie [2] aus, dessen Elemente sich von $x_1 \ldots x_m$ um weniger als $\frac{\eta_2}{2}$ unterscheiden. Der entsprechende Werth von ϕ sei ϕ_2. Dann wähle man ein Symbol [3] und einen Werth ϕ_3 u. s. w. Die Elemente der Reihe $\phi_1\, \phi_2\, \phi_3 \ldots$ convergiren dann — wie ich gleich zeigen werde — nach einem bestimmten Werth.

Denn die Elemente von $[\nu]$ können sich von den Elementen von $[\mu]$ nur um weniger als $\frac{\eta_\nu + \eta_\mu}{2}$ unterscheiden. Da nun $\frac{\eta_\mu + \eta_\nu}{2}$ nicht grösser ist als die eine der Grössen η_μ und η_ν, so ist der Unterschied von ϕ_μ und ϕ_ν absolut kleiner als die eine der Grössen e_ν und e_μ. Da ferner die Elemente der Reihe $e_1\, e_2 \ldots$ nach Null convergiren, so kann man für jede Grösse $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl N so angeben, dass für $n > N$ $e_n < \varepsilon$ wird. Dann wird aber auch für jedes $\mu > N$ und $\nu > N$ $|\phi_\mu - \phi_\nu| < \varepsilon$. Hiermit ist die Convergenz bewiesen. Wie aber auch die $e_1\, e_2 \ldots$ und die ihnen correspondirenden $\eta_1\, \eta_2 \ldots$ den Bedingungen gemäss gewählt sein mögen, die in Rede stehende Reihe convergirt stets nach demselben Werth. Sei, um dies zu zeigen, $e_1'\, e_2' \ldots \eta_1'\, \eta_2' \ldots \phi_1'\, \phi_2' \ldots$ eine andere Wahl, so kann man für jedes $\varepsilon > 0$ ein n so angeben, dass, wenn $\nu > n$, sowohl e_ν als e_ν' kleiner als ε sind. Die Elemente von $[\nu]'$ unterscheiden sich von den Elementen von $[\nu]$ um weniger als $\frac{\eta_\nu + \eta_\nu'}{2}$. Also ist auch $|\phi_\nu' - \phi_\nu| < \varepsilon$ sobald $\nu > n$ ist. Deshalb convergiren die Grössen der Reihe $|\phi_1' - \phi_1|\ |\phi_2' - \phi_2| \ldots$ nach Null, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Den Werth, nach dem die $\phi_1\, \phi_2\, \phi_3 \ldots$ convergiren, schreiben wir der Function Ψ an der Stelle $x_1 \ldots x_m$ zu. Dadurch erhalten wir eine Function Ψ, die für jedes $x_1 \ldots x_m$ einen bestimmten endlichen Werth hat.

Nun werde ich zeigen, dass das so gewonnene Ψ gleichmässig stetig ist.

Es sei eine Grösse $e > 0$ gegeben. Hierzu bestimme man eine correspondirende $\eta > 0$ und fasse die $x_1 \ldots x_m$ ins Auge, die zwischen den resp. Grenzen $a_1\; a_1 + \eta$, $a_2\; a_2 + \eta, \ldots, a_m\; a_m + \eta$, diese Grenzen ausgeschlossen, liegen ($a_1\, a_2 \ldots a_m$ beliebig). Die Werthe, die Ψ an zwei Stellen erster Kategorie des genannten Gebiets annimmt, unterscheiden sich offenbar um weniger als e.

Sind aber $|x_1' \ldots x_m'|$ und $|x_1'' \ldots x_m''|$ Symbole, von denen eines oder beide zweiter Kategorie sind und deren Elemente zwischen den genannten Grenzen liegen, so kann man nach 2) immer zwei andere Symbole erster Kategorie $|X_1' \ldots X_m'|$ und $|X_1'' \ldots X_m''|$ angeben, deren Elemente ebenfalls zwischen den Grenzen liegen und sich von den Elementen der vorigen um weniger als eine gegebene Grösse $\varepsilon > 0$ unterscheiden. Sind $\Psi_1\, \Psi_2$ die Werthe von Ψ für resp. $x_1' \ldots x_m'$ und $x_1'' \ldots x_m''$, $\Psi_1'\, \Psi_2'$ für $X_1' \ldots X_m'$ und $X_1'' \ldots X_m''$, so kann durch die Wahl eines genügend kleinen ε $\Psi_1' - \Psi_2'$ dem Werthe von $\Psi_1 - \Psi_2$ beliebig nahe gebracht werden. Wäre nun $|\Psi_1 - \Psi_2| > e$ also etwa gleich $e + E$ $(E > 0)$, so könnte man ε so klein wählen, dass auch $|\Psi_1' - \Psi_2'| > e$ wäre, was unmöglich ist, da Ψ_1' und Ψ_2' Symbolen erster Kategorie entsprechen, deren Elemente zwischen den gegebenen Grenzen liegen. Also könnte $|\Psi_1 - \Psi_2|$ höchstens gleich e sein. Damit ist die gleichmässige Stetigkeit von Ψ bewiesen.

Dass Ψ in $x_1 \ldots x_m$ periodisch mit den Perioden 1 ist, folgt unmittelbar aus der Thatsache, dass allen Symbolen erster Kategorie von einer Classe ein gleicher Werth von ψ entspricht; und dass daher auch für die Symbole einer Classe zweiter Kategorie die convergenten Processe, welche den Werth des entsprechenden Ψ definiren, in identischer Weise ausgeführt werden können.

Aus dem Umstande dass die Function Ψ für jede Stelle einen bestimmten endlichen Werth hat, dass sie für alle x periodisch mit den Perioden 1 und überall gleichmässig stetig ist, folgt, dass sie zwischen endlichen Grenzen bleibt [1]). Wir haben damit den Satz unserer Nummer erledigt.

Ich will nun noch eine abgeänderte Form dieses Satzes hier mittheilen. Es lässt sich nämlich ganz dasselbe behaupten, wenn $\psi(t)$ den Bedingungen wie vorhin genügt, aber mit der Abänderung, dass das dort genannte Verhalten eintritt, wenn $\frac{\tau}{a_1}$ eine ganze Zahl ist, während von $\frac{\tau}{a_2}$ etc. dasselbe wie vorhin gilt. Ausserdem werde in diesem Falle $\psi(t)$ als gleichmässig stetig für alle t vorausgesetzt, was bei der bisherigen Fassung sich von selbst ergab. Dann sind nämlich auch die Bedingungen unseres Satzes (in dieser Nr.) erfüllt, wie ich gleich zeigen werde.

Es sei e eine Grösse > 0. $\eta > 0$ sei so gewählt, dass $\psi(t+T) - \psi(t)$ absolut kleiner als $\frac{e}{2}$ wird, sobald $\frac{T}{a_1}$ eine ganze Zahl ist und $\frac{T}{a_2}$ etc. sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden. Endlich sei $\lambda > 0$ eine Zahl, die so gewählt ist, dass $|\psi(t+\sigma) - \psi(t)| < \frac{e}{2}$ wird, sobald $|\sigma| < \lambda$ ist. Alles dies ist nach den gegebenen Voraussetzungen möglich. Ferner werde eine Grösse $\varepsilon > 0$ angenommen, die kleiner ist als $\left|\frac{\lambda}{a_1}\right|$ und auch kleiner als die kleinste der Grössen $\left|\frac{a_\mu}{a_1}\right| \cdot \frac{\eta}{2}$ $(\mu = 1 \ldots m)$.

Es sei nun τ irgend eine Grösse, die der Bedingung genügt, dass die $\frac{\tau}{a_\mu}$ $(\mu = 1 \ldots m)$ sich von ganzen Zahlen (etwa $n_1 \ldots n_m$) um weniger als ε unterscheiden. Setzen wir dann

$$\frac{\tau}{a_\mu} - n_\mu = \varepsilon_\mu \qquad \mu = 1 \ldots m$$

so sind alle ε_μ absolut kleiner als ε. Wir können dann auch schreiben

$$\frac{\tau - a_1 \varepsilon_1}{a_1} - n_1 = 0 \qquad \frac{\tau - a_1 \varepsilon_1}{a_\mu} - n_\mu = \varepsilon_\mu - \frac{a_1}{a_\mu} \varepsilon_1 \qquad \mu = 2\ 3 \ldots m$$

Nun ist $|\varepsilon_\mu|$ stets kleiner als ε und also kleiner als $\left|\frac{a_1}{a_1}\right| \cdot \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$; ferner ist

$$\left|\frac{a_1}{a_\mu} \varepsilon_1\right| < \left|\frac{a_1}{a_\mu}\right| \cdot \left|\frac{a_\mu}{a_1}\right| \cdot \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$$

1) Dasselbe muss daher auch für $\psi(t)$ gelten, wenn diese Function die Bedingungen unseres Satzes erfüllt.

Daher ist auch

$$\left| \varepsilon_\mu - \frac{\alpha_1}{\alpha_\mu} \varepsilon_1 \right| < \eta$$

Folglich genügt $\tau - \alpha_1 \varepsilon_1$ den Bedingungen, welche erforderlich sind, damit $|\phi(t + \tau - \alpha_1 \varepsilon_1) - \phi(t)| < \frac{e}{2}$ ist. Da ferner $|\varepsilon_1| < \varepsilon < \left|\frac{\lambda}{\alpha_1}\right|$ ist, so wird $|\alpha_1 \varepsilon_1| < \lambda$ und mithin $|\phi(t + \tau - \alpha_1 \varepsilon_1) - \phi(t + \tau)|$ kleiner als $\frac{e}{2}$. Aus diesen Ungleichungen folgt die neue $|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < e$ d. h. man erhält schliesslich Folgendes:

Zu jedem $e > 0$ kann ein $\varepsilon > 0$ derart bestimmt werden, dass $|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < e$ wird, sobald die $\frac{\tau}{\alpha_\mu}$ $(\mu = 1 \ldots m)$ sich von ganzen Zahlen um weniger als ε unterscheiden. Das sind aber die Bedingungen unseres Satzes zu Anfang dieser Nummer.

Falls man die Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit von ϕ in unserem abgeänderten Satz fallen lässt, so kann man auf Grund von Betrachtungen, welche den bisherigen ähnlich sind, nur behaupten: Es giebt eine Function $\Psi(x_1 \ldots x_m)$, die an jeder Stelle $x_1 \ldots x_m$ einen bestimmten endlichen Werth hat, die periodisch mit den Perioden 1 ist, die bei constantem x_1 gleichmässig stetig ist und immer der Gleichung

$$\Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} \cdot \cdot \frac{t}{\alpha_m}\right) = \phi(t)$$

genügt. Beim Beweise kommt die Bemerkung zu Nr. 3,2 zur Geltung. Ich verzichte auf die Vorführung dieses Beweises, da derselbe dem bisherigen analog ist, die vorstehende Bemerkung aber zunächst keine besondere Wichtigkeit hat, auch von uns im Folgenden nicht etwa vorausgesetzt wird.

4.

In dieser Nr. will ich den Beweis unseres nach Nr. 1 etwas specialisirten Satzes zum Abschluss bringen. Es geschieht dies durch den Nachweis, dass jede überall einwerthig bestimmte, stetige, mit den Perioden 1 periodische[1]) Function $\Psi(x_1 \ldots x_m)$ durch eine für alle $x_1 \ldots x_m$ gleichmässig convergente Reihe $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ dargestellt werden kann; wobei die U_ν ganze rationale Functionen der $\cos 2\pi x_\mu$ und $\sin 2\pi x_\mu$ $(\mu = 1 \ldots m)$ sind. Denn dann ist auch $\phi(t)$ in eine trigonometrische Reihe von der in Nr. 1 charakterisirten Art entwickelbar.

Zunächst will ich hier eine Bemerkung vorausschicken, welche naheliegend und

---

1) So wollen wir kurz eine Function bezeichnen, die in Bezug auf jede der Variabeln periodisch ist.

möglicherweise schon bekannt ist. Dieselbe ist übrigens nicht nur beim Beweise unseres Satzes, sondern auch bei den Anwendungen desselben von Nutzen.

$\Phi\ (x_1 \,.\,.\, x_m)$ sei eine Function, die folgenden Bedingungen genügt:

1) Φ hat an jeder Stelle $x_1 \,.\,.\,.\, x_m$ einen bestimmten Werth, ist überall stetig und in $x_1 \,.\,.\, x_m$ mit den Perioden 2π periodisch.

2) Die Ableitungen

$$\frac{d^{n_1 + n_2 + \,.\,. + n_m}}{dx_1^{n_1}\, dx_2^{n_2} \,.\,.\, dx_m^{n_m}} \,.\, \Phi$$

existiren, wenn $n_1 \leqq M_1\ n_2 \leqq M_2 \,.\,.\,.\, n_m \leqq M_m$. (Die M sind gegebene ganze Zahlen $\geqq 0$). Auch sind sie dann endlich, einwerthig und stetig.

Hieraus folgt, dass die genannten Ableitungen auch periodisch und gleichmässig stetig sind, sowie angebbare endliche Grenzen nirgends überschreiten.

Nun wollen wir den folgenden Ausdruck ins Auge fassen

$$A^{\eta_1\, \eta_2 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1\, \nu_2 \,.\,.\, \nu_m} = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} .\,. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \Phi \,.\, \frac{\cos\,(\nu_1\, x_1 - \eta_1\, \pi) \,.\, \cos\,(\nu_2\, x_2 - \eta_2\, \pi) \,.\,.\,.\, \cos\,(\nu_m\, x_m - \eta_m\, \pi)}{\pi^m\, 2^n}\, dx_1\, dx_2 \,.\,\,.\, dx_m$$

Hierbei sind die $\nu_1\, \nu_2 \,.\,.\, \nu_m$ irgend welche ganze pos. Zahlen, Null eingeschlossen; n ist die Anzahl der ν, welche etwa gleich Null sind; die η sind entweder Null oder $\frac{1}{2}$. Kommt etwa die Combination $\nu_\mu = 0\ \eta_\mu = \frac{1}{2}$ vor (μ eine der Zahlen $1 \,.\,.\, m$), so ist $A = 0$, welcher Fall als erledigt im Folgenden ausgeschlossen werden soll. Durch partielle Integration — ein im hier angewandten Umfange erlaubtes Verfahren — ergiebt sich dann, wenn wir zunächst voraussetzen, dass kein $\nu = 0$ ist

$$1 \,.\,.\,.\, A^{\eta_1\, \eta_2 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1\, \nu_2 \,.\,.\, \nu_m} = \frac{(-1)^{M_1 + M_2 + \,.\,. + M_m}}{\pi^m\, \nu_1^{M_1}\, \nu_2^{M_2} \,.\,.\, \nu_m^{M_m}} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} .\,. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^{M_1 + \,.\,. M_m}\, \Phi}{dx_1^{M_1} \,.\,.\, dx_m^{M_m}} \cos\ \nu_1\, x_1 - \eta_1\, \pi - M_1\, \frac{\pi}{2}\Big) \,.\,.$$

$$.\,.\, \cos\,\Big(\nu_m\, x_m - \eta_m\, \pi - M_m\, \frac{\pi}{2}\Big)\, dx_1\, dx_2 \,.\,.\,.\, dx_m$$

Das Intregal, welches auf der rechten Seite vorkommt, ist absolut nicht grösser als

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} .\,. \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d^{M_1 + \,.\,. + M_m}\, \Phi}{dx_1^{M_1} \,.\,.\, dx_m^{M_m}} \right| dx_1\, dx_2 \,.\,.\, dx_m$$

Das erstgenannte Integral überschreitet daher nach den gemachten Voraussetzungen eine ein für alle Mal angebbare endliche Grenze nicht. Für jede Combination der $\nu_1 \,.\,.\, \nu_m \; \eta_1 \,.\,.\, \eta_m$ (wobei, wie gesagt, zunächst kein ν gleich 0 ist) haben wir

$$A^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m} = \frac{K^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m}}{\nu_1^{M_1} \nu_2^{M_2} \,.\,.\, \nu_m^{M_m}} \qquad \left| K^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m} \right| \leq C$$

wobei C eine für alle A gegebene Contante bedeutet.

Sind aber n der $\nu_1 \,.\,.\,.\, \nu_m$ gleich Null, so haben wir

$$A^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m} = \frac{(-1)^{M_\alpha + M_\beta + \,.\,.}}{\pi^m \, 2^n \, \nu_\alpha^{M_\alpha} \, \nu_\beta^{M_\beta}} \int_{-\pi}^{\pi} \,.\,.\, \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{M_\alpha + M_\beta + \,.\,.} \Phi}{dx_\alpha^{M_\alpha} \, dx_\beta^{M_\beta} \,.\,.} \,.\, \cos\left(\nu_\alpha \, x_\alpha - \eta_\alpha \, \pi - M_\alpha \frac{\pi}{2}\right) \ldots$$
$$\ldots \, dx_1 \, dx_2 \, dx_m$$

wobei $\alpha \beta \,.\,.$ die Indices sind, für welche $\nu_\alpha \, \nu_\beta \,.\,.$ nicht gleich 0 sind. Ausserdem bemerke ich, dass, wenn alle ν gleich 0 sind, der ursprüngliche Ausdruck für $A^{0 \,.\,.\, 0}_{0 \,.\,.\, 0}$ bestehen bleibt. und erinnere daran, das die Combination $\eta_\mu = \frac{1}{2} \;\; \nu_\mu = 0$ ausgeschlossen ist. Jedenfalls kann man setzen

$$A^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m} = \frac{K^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\,.\, \nu_m}}{2^n \,.\, \nu_\alpha^{M_\alpha} \, \nu_\beta^{M_\beta} \,.\,.\,.} \qquad \left| K^{\eta_1 \,.\,.\, \eta_m}_{\nu_1 \,.\,.\, \nu_m} \right| \leq C_1$$

wobei C_1 eine für alle A gleichgewählte Constante ist.

Wir setzen nun die zunächst formal gebildete Reihe an

$$\Sigma \, A^{\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m}_{n_1 n_2 \,.\,.\, n_m} \cos\left(n_1 x_1 - \varepsilon_1 \pi\right) \,.\,.\,.\, \cos\left(n_m x_m - \varepsilon_m \pi\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

$$n_1 \, n_2 \,.\,.\,.\, = 0 \; 1 \; 2 \,.\,.\,.\, , \; \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0, \tfrac{1}{2}$$

ferner die zweite ebenfalls zunächst nur formale Reihe

$$\Sigma \, \frac{1}{\nu_1^{M_1} \, \nu_2^{M_2} \,.\,.\, \nu_m^{M_m}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Das Bildungsgesetz der ersten ist bereits angedeutet, das der zweiten ist das folgende: Jedem Complex von m *pos.* ganzen Zahlen (0 eingeschlossen, auch die Reihenfolge ist zu unterscheiden) $\nu_1 \, \nu_2 \,.\,.\, \nu_m$ entspricht ein Glied $\frac{1}{\nu_1^{M_1} \, \nu_2^{M_2} \,.\,.\, \nu_m^{M_m}}$, wobei aber, wenn $\nu_a = 0$ ist, anstatt $\nu_\alpha^{M_\alpha}$ die Zahl 2 zu setzen ist.

Auf Grund des bisher Erörterten können wir nun schliessen, dass, sobald 3 convergirt, 2 ebenfalls convergiren muss. Und zwar convergirt in diesem Falle auch noch diejenige Reihe für alle $x_1 \dots x_m$ gleichmässig, die aus 2 entsteht, indem man die Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Die Reihe 3 ist nun jedenfalls convergent, wenn $M_1 \geqq 2$ $M_2 \geqq 2$ etc. ist. Denn dann kann sie als das Produkt von m aus der Theorie der Eulerschen Integrale bekannten absolut convergenten Reihen dargestellt werden, nämlich als

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1^{M_1}}+\frac{1}{2^{M_1}}+\dots\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1^{M_2}}+\frac{1}{2^{M_2}}+\dots\right)\dots\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1^{M_m}}+\frac{1}{2^{M_m}}+\dots\right)$$

Machen wir also die Voraussetzung $M_1 \geqq 2$ etc., so ist die Reihe 2 gleichmässig und absolut convergent. Man kann aber in diesem Fall auch zeigen, dass sie überall die Function Φ darstellt.

Entwickelt man nämlich $\Phi\,(x_1 \dots x_m)$ in eine Fouriersche Reihe, die nach sin und cos der Vielfachen von x_1 fortschreitet (was nach den oben genannten Voraussetzungen möglich ist), so kann eine ganze Zahl N_1 so gross gewählt werden, dass die Summe Φ_1 der Glieder bis zu sin $(N_1\, x_1)$ und cos $(N_1\, x_1)$ sich von $\Phi\,(x_1 \dots x_m)$ für jedes $x_1 \dots x_m$ um weniger als $\frac{\delta}{2m}$ unterscheidet (δ sei eine irgend wie gegebene Grösse > 0). Dies ist nach den gemachten Voraussetzungen sofort ersichtlich. Denn genau wie vorhin kann man zeigen, dass die Coefficienten von $\sin n x_1$ und $\cos n x_1$ $(n > 0)$ absolut kleiner sind als $\frac{c}{n^2}$, wobei c eine Constante ist, die für alle n und $x_2 \dots x_m$ gleich gewählt werden kann.

Φ_1 ist dann, wie leicht zu sehen, in eine Fouriersche Reihe nach x_2 entwickelbar und es kann ein solches N_2 gefunden werden, dass die Summe Φ_2 der Glieder bis zu $\sin\,(N_2\, x_2)$ und $\cos\,(N_2\, x_2)$ um weniger als $\frac{\delta}{2m}$ von Φ_1 abweicht. So fortfahrend erhält man schliesslich die Summe einer Anzahl von Gliedern der Reihe 2) Φ_m, welche von Φ stets um weniger als $\frac{\delta}{2}$ abweicht.

Ich bemerke hierzu noch, dass man die $N_1\, N_2$ etc. der Bedingung unterwerfen kann, grösser zu sein als die resp. ganzen Zahlen $n_1\, n_2 \dots$, welche beliebig gewählt sind.

Sind $n_1\, n_2 \dots$ hinreichend gross gewählt, so wird Φ_m sich von dem Werthe der Reihe 2 nirgends um mehr als $\frac{\delta}{2}$ unterscheiden. Dies folgt aus der Art der Convergenz von 2) sowie aus dem Umstande, dass, wenn $N_1\, N_2 \dots N_m$ immer grösser und grösser gewählt werden, jedes Glied von 2 einmal in die Summe Φ_m eintreten muss. Es kann daher Φ sich von dem Werth der Reihe 2 nur um weniger als δ unterscheiden. Da δ grösser als Null, sonst aber beliebig gewählt war, so ist Φ der Werth der Reihe 2.

Wir haben daher das folgende Resultat [1]) erhalten. Ist $\Phi\,(x_1\,.\,.\,x_m)$ für alle $x_1\,.\,.\,x_m$ eine einwerthige stetige periodische Function; sind ferner die $\frac{d^{n_1+n_2+\,.\,.\,+n_m}}{dx_1^{n_1}\,dx_2^{n_2}\,.\,.\,dx_m^{n_m}}\cdot\Phi$ überall endlich einwerthig und stetig, solange $n_1 \leqq M_1\,.\,.\,.\,n_m \leqq M_m$, wobei die M gleich oder grösser als 2 sind: so ist $\frac{d_1^{\nu_1+\nu_2+\,.\,.\,+\nu_m}}{dx_1^{\nu_1}\,dx_2^{\nu_2}\,.\,.\,dx_m^{\nu_m}}\,\Phi$ in eine gleichmässig und absolut convergente Fouriersche Reihe nach den im Variabeln entwickelbar, sobald $\nu_1 \leqq M_1 - 2\,.\,.\,.\,,\nu_m \leqq M_m - 2$.

Ich spreche nun den folgenden Satz aus:

Ist $f\,(x_1\,.\,.\,x_m)$ eine überall einwerthige stetige sowie periodische Function ($p\,.\,.\,p_m$ seien die Perioden), so kann man eine einwerthige stetige periodische Function $\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_m)$ finden, die folgenden Bedingungen genügt:

1) φ unterscheidet sich von f überall um weniger als eine gegebene Grösse $e > o$.

2) Die Ableitungen $\frac{d^{\nu_1+\,.\,.\,+\nu_m}}{dx_1^{\nu_1}\,.\,.\,dx_m^{\nu_m}}\,.\,\varphi$ existiren, falls die ganzen Zahlen ν nicht grösser als 2 sind, und sind dann überall endlich, einwerthig und stetig.

Wir zeigen zunächst, dass die Aufgabe für Functionen mit m Variabeln ($m > 1$) gelöst werden kann, sobald sie für Functionen mit $m - 1$ Variabeln gelöst ist.

Es seien die positiven von Null verschiedenen Grössen $\delta_1\,\delta_2\,.\,.\,\delta_m$ so gewählt, dass die Schwankung von f in jedem der Gebiete $n_1\,\delta_1 \leqq x_1 \leqq (n_1+1)\,\delta_1\,.\,.\,n_m\,\delta_m \leqq x_m \leqq (n_m+1)\,\delta_m$ ($n_1\,.\,.\,n_m$ ganze Zahlen) kleiner als $\frac{e}{m}$ wird. Auch seien die $\frac{p_1}{\delta_1}\,.\,.\,.\,\frac{p_m}{\delta_m}$ ganze Zahlen. Dann kann man Functionen $\varphi\,(x_1\,.\,.\,.\,x_{m-1}\;n\,.\,\delta_m)$ für jede ganze Zahl n finden, welche sich von $f\,(x_1\,.\,.\,.\,x_{m-1}\;\;n\,.\,\delta_m)$ überall um weniger als $\frac{m-1}{m}\;e$ unterscheiden und im übrigen die Bedingungen unseres Satzes — nur für $m - 1$ Variabeln übertragen — erfüllen. Ausserdem sei $\varphi\;(x_1\,.\,.\,x_{m-1}\;\;n\,.\,\delta_m + p_m) = \varphi\;(x\,.\,.\,x_{m-1}\;\;n\,.\,\delta_m)$. Dann setzen wir, falls $n\,.\,\delta_m < x_m < (n+1)\,\delta_m$ ist

$$\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_m) = \frac{\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_{m-1}\,(n+1)\,\delta_m) + \varphi\,(x_1\,.\,.\,x_{m-1}\,n\,.\,\delta_m)}{2} + \frac{\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_{m-1}\,(n+1)\,\delta_m) - \varphi\,(n_1\,.\,.\,x_{m-1}\,n\,.\,\delta_m)}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{9}{8}\,\sin\frac{\pi}{\delta_m}\left(x_m - \frac{2n+1}{2}\,\delta_m\right) + \frac{1}{8}\,\sin\frac{3\pi}{\delta_m}\left(x_m - \frac{2n+1}{2}\,.\,\delta_m\right)\right)$$

während für $x_m = n\,\delta_m$ φ bereits bestimmt ist. Die Formel ist aber so gewählt, dass sie auch für den Fall gilt, wo $x_m = n\,\delta_m$ oder $= (n+1)\,\delta_m$ ist. Hiernach liegt, wie man leicht sieht [2]), $\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_m)$ stets zwischen zwei Grössen $\varphi\,(x_1\,.\,.\,x_{m-1}\,(n+1)\,\delta_m)$

---

1) Die vorstehende Bemerkung kann noch erweitert werden, indem man gewisse Unstetigkeiten zulässt. Auch in der erweiterten Form ist sie einfach durch partielle Integration zu erweisen und stellt dann die Ausdehnung eines von Poincaré für Functionen einer Variabeln gegebenen Satzes auf Functionen mehrerer Variabeln dar, vgl. H. Poincaré, Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques. Bulletin astronomique. Tome III.

2) Der Ausdruck in Klammern liegt nämlich für $n\,.\,\delta_m < x_m < (n+1)\,\delta_m$ zwischen -1 und $+1$.

uud $\varphi(x_1 \ldots x_{m-1}\, n\, \delta_m)$ oder kommt ihnen höchstens gleich. Daher ist $|f(x_1 \ldots x_m) - \varphi(x_1 \ldots x_m)|$ stets entweder kleiner als diejenige der beiden Grössen $|f(x_1 \ldots x_m) - \varphi(x_1 \ldots x_{m-1}\, n \,.\, \delta_m)|$ und $|f(x_1 \ldots x_m) - \varphi(x_1 \ldots x_{m-1}\,(n+1)\,\delta_m)|$, welche nicht kleiner als die andere ist, oder kommt einer von ihnen gleich. Schreibt man nun die beiden Grössen in der Form

$$|f(x_1 \ldots x_m) - f(x_1 \ldots x_{m-1}\, n \,.\, \delta_m) + f(x_1 \ldots x_{m-1}\, n \,.\, \delta_m) - \varphi(x_1 \ldots x_{m-1}\, n \,.\, \delta_m)|$$

$$|f(x_1 \ldots x_m) - f(x_1 \ldots x_{m-1}(n+1)\delta_m) + f(x_1 \ldots x_{m-1}(n+1)\,\delta_m) - \varphi(x_1 \ldots x_{m-1}(n+1)\delta_m)|$$

so sieht man, dass beide kleiner als e sind, so dass auch $|f - \varphi|$ kleiner als e sein muss.

Was den noch verbleibenden Rest unserer Behauptungen angeht, so ist ohne weiteres ersichtlich, dass dieselben gerechtfertigt sind für irgend ein Gebiet $n\,\delta_m \leqq x_m \leqq (n+1)\,\delta_m$ ($x_1 \ldots x_{m-1}$ beliebig). Berücksichtigt man aber noch, dass gemäss unserer Formel $\frac{d^{\,\nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_m}}{dx_1^{\,\nu_1}\, dx_2^{\,\nu_2} \cdots dx_m^{\,\nu_m}}\,\varphi$ ($\nu_m = 1$ oder $= 2$, $\nu_1 \ldots \nu_{m-1}$ positive ganze Zahlen $\leqq 2$ oder 0) für $x_m = n\,\delta_m$ (n eine ganze Zahl) Null wird, so sind sie auch für das ganze Gebiet begründet.

Für Functionen einer Variablen ist nun unser Satz leicht zu beweisen. Sei $f(x)$ die zu betrachtende Function, so bestimme man δ derart, dass die Schwankung von f in jedem Gebiet $n\,\delta \leqq x \leqq (n+1)\,\delta$ kleiner als e ist. Auch sei $\frac{p}{\delta}$ eine ganze Zahl. Für jedes x, welches in diesem Gebiet liegt, setze man

$$\varphi(x) = \frac{f((n+1)\,\delta) + f(n\delta)}{2} + \frac{f((n+1)\,\delta) - f(n\delta)}{2}\left(\frac{9}{8}\sin\frac{\pi}{\delta}\left(x - \frac{2n+1}{2}\,\delta\right) + \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi}{\delta}\left(x - \frac{2n+1}{2}\,\delta\right)\right)$$

Verfährt man ebenso für jedes andere Gebiet, so genügt φ allen Anforderungen.

Hiermit haben wir den in Rede stehenden Satz bewiesen. Ich bemerke noch, dass man denselben auch auf höhere Differentialquotienten ausdehnen kann, indem man unsere Formel für φ entsprechend abändert; ferner, dass man schon für unsere Bedürfnisse mit einer einfacheren Formel ausreicht, wenn man die Erweiterung der vorhin gegebenen Bemerkung auf Functionen mit unstetigen Ableitungen voraussetzt.

Auf Grund des in dieser Nr. bisher Gezeigten, können wir nun sagen: Ist eine überall einwerthige stetige mit den Perioden 2π periodische Function $f(x_1 \ldots x_m)$ gegeben, sowie eine Grösse $e > 0$, so kann man eine gleichmässig und absolut convergente trigonometrische Reihe

$$\Sigma\; a_{n_1 \ldots n_m}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m} \cos(n_1 x_1 - \varepsilon_1 \pi) \ldots \cos(n_m x_m - \varepsilon_m \pi)$$

finden, deren Werth überall von f um weniger als e abweicht. Hieraus folgt dann weiter, dass man die Worte dieses Satzes „so kann man eine gleichmässig und absolut convergente trigonometrische Reihe Σ finden" durch die folgenden ersetzen kann: „so kann man eine trigonometrische Reihe $\Sigma\, b^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m}_{n_1 \ldots n_m} \cos(n_1 x_1 - \varepsilon_1 \pi) \ldots \cos(n_m x_m - \varepsilon_m \pi)$ mit endlicher Gliederzahl finden".

Ist aber eine Function von $x_1 \ldots x_m$ gegeben, die die Perioden $p_1 \ldots p_m$ besitzt, sonst aber dieselben Bedingungen erfüllt, so führt die Substitution $x_1 = \frac{p_1 y_1}{2\pi} \ldots x_m = \frac{p_m y_m}{2\pi}$ auf den vorigen Fall zurück. (Man erkennt überhaupt, dass die Grösse der Perioden durchweg hier unwesentlich ist. Ich habe sie je nach Bequemlichkeit ausgewählt). Es gilt also in diesem Fall dasselbe, nur treten anstatt der Argumente $n_1 x_1 - \varepsilon_1 \pi$ etc. die Argumente $n_1 \frac{2\pi}{p_1} x_1 - \varepsilon_1 \pi$ etc. auf.

Nun nehmen wir — um zum Schluss zu kommen — eine Reihe von Grössen > 0 $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots$, die nach 0 convergiren, auf. S_ν bezeichne eine endliche trigonometrische Reihe mit den Argumenten $n_1\, 2\pi x_1 - \varepsilon_1 \pi$ etc., welche sich überall um weniger als σ_ν von unserer Function $\Psi(x_1 \ldots x_m)$ unterscheidet. Weiter setzen wir $U_0 = S_1$ $U_1 = S_2 - S_1$ $U_2 = S_3 - S_2$ etc. Dann ist

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$$

eine gleichmässig convergente Reihe, die Ψ in der am Eingang unserer Nr. geforderten Weise darstellt.

5.

Soll unser Satz bequeme Anwendung finden, so werden im allgemeinen noch weitere Bedingungen von der Function $\psi(t)$ erfüllt sein müssen, welche speciellere Darstellungen der Function Ψ erlauben. Derartige Untersuchungen schliessen sich wohl am besten an die Behandlung des jeweilig vorliegenden besonderen Problems an. In dieser und der nachfolgenden Nr. sollen nach der genannten Richtung hin einige Hinweise allgemeinerer Natur gegeben werden.

Eine Function $\psi(t)$ habe für jeden Werth von t einen bestimmten Werth. $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ seien Grössen, welche dieselben Bedingungen wie in Nr. 3 erfüllen. τ sei eine Grösse, von der bekannt sei, dass $\frac{\tau}{\alpha_1} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ gewisse ganze Zahlen um resp. $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ übertreffen (über das Vorzeichen von $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ wird dabei nichts vorausgesetzt). Durch die Angabe der $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ (ja auch nur von zweien unter ihnen) ist dann τ eindeutig bestimmt. Hieraus folgt, dass der Ansatz $\varphi(t\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m) = \psi(t + \tau) - \psi(t)$ eine Function φ für alle Werthe von t und für diejenigen ε, welche Gleichungen der Form

$$\alpha_1 (n_1 + \varepsilon_1) = \alpha_2 (n_2 + \varepsilon_2) = \ldots = \alpha_m (n_m + \varepsilon_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

(die n sind ganze Zahlen) genügen, eindeutig bestimmt. Kann man nun zeigen, dass der Function $\varphi\ (t\ \varepsilon_1\ ..\ \varepsilon_m)$ die Eigenschaft zukommt, absolut kleiner als eine beliebig gegebene Grösse $e > 0$ zu sein, sobald die $|\varepsilon|$ kleiner als eine nur von e abhängige Grösse $\eta > 0$ sind, so sind die Bedingungen unseres Satzes in Nr. 3 erfüllt. Ist dann Ψ die nach Anleitung von Nr. 3 zu ψ construirte Function, so gelten die folgenden Beziehungen

$$\psi\ (t + \tau) = \Psi\left(\frac{t}{a_1} + \frac{\tau}{a_1} \cdot\cdot \frac{t}{a_m} + \frac{\tau}{a_m}\right) = \Psi\left(\frac{t}{a_1} + \varepsilon_1 \cdot\cdot \frac{t}{a_m} + \varepsilon_m\right)$$

$$\Psi\left(\frac{t}{a_1} + \varepsilon_1 \cdot\cdot \frac{t}{a_m} + \varepsilon_m\right) - \Psi\left(\frac{t}{a_1} \cdot\cdot \frac{t}{a_m}\right) = \varphi\ (t\ \varepsilon_1\ ..\ \varepsilon_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

Hieraus folgt weiter: Ist $e_1 \ldots e_m$ ein System von Grössen, das nicht die Gleichungen 1 gesetzt erfüllen kann, so lässt sich nach Nr. 2 eine Reihe von Systemen $\varepsilon_1' \,..\, \varepsilon_m'$, $\varepsilon_1'' \,..\, \varepsilon_m''$ etc. aufstellen, deren Elemente nach resp. $e_1 \,..\, e_m$ convergiren und die Gleichungen 1 erfüllen. Dann convergirt die Grössenreihe $\varphi\ (t\ \varepsilon_1' \,..\, \varepsilon_m')$, $\varphi\ (t\ \varepsilon_1'' \,..\, \varepsilon_m'') \,..$ nach $\Psi\ (\frac{t}{a_1} + e_1 \ldots) - \Psi\ (\frac{t}{a_1}, \,..\, \frac{t}{a_m})$. Bezeichnet man den letzten Werth mit $\varphi\ (t\ e_1\ ..\ e_m)$, so ist jetzt φ offenbar eine für alle Werthe von t, $e_1 \,..\, e_m$ einwerthig gegebene, gleichmässig stetige Function dieser Grössen.

Oft kann man je nach den Besonderheiten des zu behandelnden Falles weitere Eigenschaften von φ feststellen, welche Schlüsse hinsichtlich der Beschaffenheit von Ψ gestatten. Namentlich ist es nicht selten möglich, die Frage nach der Existenz und Beschaffenheit der Differentialquotienten von Ψ auf diese Weise zu erledigen. Da dieser Umstand für die Darstellung von Ψ von grosser Wichtigkeit ist, will ich eine neue Voraussetzung einführen und darauf gestützt die Untersuchung für die ersten Differentialquotienten von Ψ durchführen.

Was wir von $\psi\ (t)$ voraussetzeu, ist nämlich jetzt das Folgende: ψ ist für jedes t einwerthig gegeben. Genügen die Grössen $\tau\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ den Gleichungen

$$\tau = a_1\ (n_1 + \varepsilon_1) = a_2\ (n_2 + \varepsilon_2) = \ldots = a_m\ (n_m + \varepsilon_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

wobei die $n_1 \,..\, n_m$ ganze Zahlen sind, so soll man setzen können [1])

$$\psi\ (t + \tau) - \psi\ (t) = \varphi\ (t\ \varepsilon_1\ ..\ \varepsilon_m) = \varepsilon_1\ (\varphi_1 + \psi_1) + \varepsilon_2\ (\varphi_2 + \psi_2) + .. + \varepsilon_m\ (\varphi_m + \psi_m) \,..\, 4$$

Hierbei sind die $\varphi_1 \,..\, \varphi_m$ Functionen von t allein, die überall einwerthig gegeben sind, und nirgends gewisse endliche Grenzen überschreiten. Die $\psi_1 \,..\, \psi_m$ sind Functionen von

1) Man kann hier und im Folgenden nach die Bedingung einschalten „wenn die $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m$ absolut kleiner sind als die resp. Grössen $g_1 \ldots g_m > 0$“ ohne dass sich im Resultat etwas ändert.

$t\,\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$ und für alle t, sowie für diejenigen ε, die den Gleichungen 1 genügen können, einwerthig gegeben. Auch sie sollen gewisse endliche Grenzen nicht überschreiten; ausserdem werde vorausgesetzt, dass ihre oberen Grenzen (gerechnet für constantes $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$ und variable t) mit nach 0 convergirenden ε ebenfalls nach 0 convergiren.

Dass unter diesen Voraussetzungen $\psi(t)$ den Bedingungen des Satzes unter Nr. 3 genügt, ist sofort zu sehen. Ich werde aber zeigen, dass auch die $\varphi_1 \,.\,.\, \varphi_m$ den genannten Bedingungen genügen.

Um dies zu zeigen, setzen wir

$$\tau' = n_1'\alpha_1 + \varepsilon_1'\alpha_1 = n_2'\alpha_2 + \varepsilon_2'\alpha_2 = \ldots = n_m'\alpha_m + \varepsilon_m'\alpha_m \qquad 5$$

wobei die τ' ε' n' eine den τ ε n analoge Bedeutung haben. Dann ergiebt sich, wenn bei den ψ durch die Indices ε und ε' angedeutet wird, ob sie für $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$ oder $\varepsilon_1' \,.\,.\, \varepsilon_m'$ zu bilden sind

$$\psi(t+\tau+\tau') - \psi(t+\tau') = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu \left(\varphi_\mu(t+\tau') + \psi_{\mu\varepsilon}(t+\tau')\right) =$$

$$= \psi(t+\tau) + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu' \left(\varphi_\mu(t+\tau) + \psi_{\mu\varepsilon'}(t+\tau)\right) - \psi(t) - \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu' \left(\varphi_\mu(t) + \psi_{\mu\varepsilon'}(t)\right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu \left(\varphi_\mu(t) + \psi_{\mu\varepsilon}(t)\right) + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu' \left(\varphi_\mu(t+\tau) + \Psi_{\mu\varepsilon'}(t+\tau)\right) - \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \varepsilon_\mu' \left(\varphi_\mu(t) + \psi_{\mu\varepsilon'}(t)\right)$$

Falls ε_1 nicht 0 ist, kann man weiter schreiben

$$\varphi_1(t+\tau') - \varphi_1(t) = -\psi_{1\varepsilon}(t+\tau') + \psi_{1\varepsilon}(t) + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\varepsilon_\mu'}{\varepsilon_1} \left(\varphi_\mu(t+\tau) + \psi_{\mu\varepsilon'}(t+\tau)\right) -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\varepsilon_\mu'}{\varepsilon_1} \left(\varphi_\mu(t) + \psi_{\mu\varepsilon'}(t)\right) + \sum_{\mu=2}^{\mu=m} \frac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon_1} \left(\varphi_\mu(t) - \psi_{\mu\varepsilon}(t)\right) - \sum_{\mu=2}^{\mu=m} \frac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon_1} \left(\varphi_\mu(t+\tau') + \psi_{\mu\varepsilon}(t+\tau')\right)$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist nur von t und den ε' abhängig. Daher kann man in der rechten Seite den $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$ irgend welche Werthe, die einer Gleichung 1 genügen ($\varepsilon_1 = 0$ ausgeschlossen) ertheilen, ohne die Giltigkeit der Beziehung aufzuheben.

Ferner beachte man, dass die ε und ε' nach Nr. 2 stets gegebenen Grössen beliebig nahe gewählt werden können (wobei man $\varepsilon_1 = 0$ immer vermeiden kann). Es ist daher auch möglich alle ε Grössen so zu wählen, dass sie selbst sowohl, als die $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \,.\,.\, \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}$ absolut kleiner werden als eine gegebene Grösse > 0. Zieht man weiter in Betracht, dass die φ_μ und ψ_μ gegebene Grenzen niemals überschreiten, so ergiebt sich, dass die linke Seite unserer Gleichung absolut kleiner als eine gegebene Grösse $e > 0$ wird, sobald die $\varepsilon_1' \ldots \varepsilon_m'$ absolut kleiner sind als eine Grösse $\eta > 0$, deren Wahl nur von e abhängt, nicht aber von t. Da genau das gleiche wie von φ_1 auch von $\varphi_2 \ldots \varphi_m$ gilt, so haben wir damit unsere Behauptung begründet. Es ist daher möglich für die $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ Functionen $\Psi_1 \ldots \Psi_m$ zu construiren, die zu ihnen sich ebenso verhalten wie Ψ zu ϕ.

Fassen wir nun wiederum die Gl. 4 ins Auge, so wissen wir bereits, dass die linke Seite nach einem bestimmten Werth convergirt, wenn ε_1 nach einem Werthe d, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ nach 0 convergiren, und zwar ist dieser Werth

$$\Psi\left(\frac{t}{a_1} + d, \frac{t}{a_2}, \ldots \frac{t}{a_m}\right) - \Psi\left(\frac{t}{a_1} \ldots \frac{t}{a_m}\right)$$

Nach demselben Werth muss daher bei dem genannten Process auch die rechte Seite von 4) convergiren. Beachtet man nun, dass die letzten $m - 1$ Glieder derselben nach 0 convergiren, $\varepsilon_1 \varphi_1(t)$ aber nach $d \cdot \varphi_1(t)$, so sieht man, dass auch ϕ_1 dabei nach einem bestimmten Werth, den wir mit $\phi_1(t d\, 0 \ldots 0)$ bezeichnen wollen, convergiren muss. Aus den Voraussetzungen über ϕ_1 folgt aber dann, dass $\phi_1(t d\, 0 \ldots 0)$ zugleich mit d nach 0 convergirt und zwar in folgender Weise:

Ist eine Grösse $\delta > 0$ gegeben, so kann man stets ein $D > 0$ so angeben (nur abhängig von δ, unabhängig von t), dass, wenn $|d| < D$ ist, $|\phi_1(t\, d\, 0 \ldots 0)|$ nicht grösser als δ wird. Es folgt daraus, dass

$$\frac{\Psi\left(\frac{t}{a_1} + d, \ldots, \frac{t}{a_m}\right) - \Psi\left(\frac{t}{a_1}, \ldots, \frac{t}{a_m}\right)}{d}$$

nach $\varphi_1(t)$ convergirt, sobald d nach 0 convergirt; es folgt ferner, dass sich diese Grösse $\varphi_1(t)$ nicht mehr als um $\delta > 0$ unterscheidet, wenn $|d| < D$ ist, wobei $\delta > 0$ beliebig gewählt ist, $D > 0$ nur von δ abhängt. Anders ausgedrückt:

Die Function $\Psi(x_1 \ldots x_m)$ hat unter den in dieser Nummer gegebenen Voraussetzungen an jeder Stelle $x_1 \ldots x_m$, die einer Classe erster Kategorie entspricht, einen endlichen Differentialquotienten nach x_1, und zwar ist derselbe nach unserer früheren Bezeichnung gleich $\Psi_1(x_1 \ldots x_m)$. Ferner unterscheidet sich die Grösse $\frac{\Psi(x_1 + d, x_2 \ldots x_m) - \Psi(x_1 \ldots x_m)}{d}$ von $\Psi_1(x_1 \ldots x_m)$ nicht mehr als um δ, wenn $|d| < D$ ist, welches auch die Stelle erster Kategorie $x_1 \ldots x_m$ sein möge.

Ich werde nun zeigen, dass dasselbe auch für Stellen zweiter Kategorie gilt. Es sei $x_1 \ldots x_m$ eine solche, so kann gemäss den Eigenschaften von Ψ und Ψ_1 eine Stelle $x_1' \ldots x_m'$ erster Kategorie so nahe der Stelle $x_1 \ldots x_m$ gewählt werden, dass sich $\Psi_1(x_1' \ldots x_m')$

von $\Psi_1(x_1 \,..\, x_m)$ und $\Psi(x_1' \,..\, x_m')$ von $\Psi(x_1 \,..\, x_m)$ und endlich $\Psi(x_1' + d, x_2' \,..\, x_m')$ von $\Psi(x_1 + d, x_2 \ldots x_m)$ beliebig wenig unterscheiden. Würde nun $\frac{\Psi(x_1 + d, x_2 \,..\, x_m) - \Psi(x_1 \,..\, x_m)}{d}$ sich von $\Psi_1(x_1 \,..\, x_m)$ um mehr als um δ unterscheiden (für ein $|d| < D$), nämlich um $\delta + \delta_1$; so könnte man $x_1' \,..\, x_m'$ so nahe $x_1 \ldots x_m$ wählen, dass sich $\frac{\Psi(x_1' + d, x_2' \ldots x_m') - \Psi(x_1' \ldots x_m')}{d}$ von $\frac{\Psi(x_1 + d, x_2 \,..\, x_m) - \Psi(x_1 \,..\, x_m)}{d}$ um weniger als $\frac{\delta_1}{2}$ unterscheidet und ferner $\Psi_1(x_1' \,..\, x_m')$ von $\Psi_1(x_1 \,..\, x_m)$ um weniger als $\frac{\delta_1}{2}$. Dann müsste auch der Unterschied von $\frac{\Psi(x_1' + d, x_2' \,..\, x_m') - \Psi(x_1' \,..\, x_m')}{d}$ und $\Psi_1(x_1' \,..\, x_m')$ grösser als δ ausfallen, was aber unmöglich ist, da $x_1' \,..\, x_m'$ eine Stelle erster Kategorie sein sollte. Da nun das gleiche wie für die Variable x_1 auch für $x_2 \,..\, x_m$ gilt, ist damit Existenz und gleichmässige Stetigkeit der ersten Differentialquotienten von Ψ nachgewiesen.

Man wird aus dieser Probe bereits erkennen, wie man die Voraussetzungen erweitern muss, um zu ähnlichen Sätzen bezüglich der höheren Differentialquotienten zu gelangen.

6.

Die Function $\phi(t)$ genüge den Bedingungen der Nr. 3 und sei daher in eine trigonometrische Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ der mehrfach genannten Art entwickelbar. Jedes Glied u_ν enthält dann eine Anzahl Terme der Form

$$a^{\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m}_{n_1 \,..\, n_m} \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right)$$

Ein und dasselbe *cos*-Produkt kann in mehreren oder auch in allen u_ν vorkommen.

Sei

$$\cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right)$$

irgend ein solches Produkt. $a_0\, a_1\, a_2 \ldots$ seien die Coefficienten desselben in resp. $u_0\, u_1\, u_2 \ldots$ wobei $a_\mu = 0$ ist, wenn der Produkt in u_μ überhaupt nicht vorkommt. Bezeichnen wir dann die Summe $u_0 + u_1 + u_2 \,..\, + u_N$ mit ϕ_N und bilden die Grösse

$$J(TN) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_N \cdot \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt$$

so convergirt dieselbe mit ohne Grenze wachsendem T nach dem Werthe $S_N = \frac{1}{2^{m-n}}(a_0 + a_1 + \,..\, + a_N)$, wobei n die Anzahl der $n_1 \,..\, n_m$ bezeichnet, die gleich Null sind. (Dass die Combination $n_\mu = 0\ \varepsilon_\mu = \frac{1}{2}$ ausgeschlossen wird, ist bereits gesagt). Ebenso convergirt $J(TM)$ (M eine ganze positive Zahl) mit ohne Grenze wachsendem T nach S_M. Infolge dessen convergirt

$$J(TM) - J(TN) = \frac{1}{T}\int_0^T (\psi_M - \psi_N) \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt$$

unter gleichen Umständen nach $S_M - S_N$, oder wenn $M > N$ ist nach $\frac{1}{2^{m-n}}(a_{N+1} + \ldots + a_M)$ Man kann nun eine ganze Zahl n so bestimmen, dass, sobald $N > n$ $M > N$ ist $|\psi_M - \psi_N| \leqq \delta$ ($\delta > 0$, sonst eine beliebige Grösse) wird. Dann ist auch $|J(TM) - J(TN)|$ für jedes endliche T absolut $\leqq \delta$. Hieraus folgt weiter, dass auch $|S_M - S_N| \leqq \delta$ sein muss, sobald M und N den genannten Bedingungen genügen. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist also convergent.

Um nun den Werth dieser Reihe $2^{m-n} . S$ zu bestimmen, verfahren wir wie folgt:

1) Wir bestimmen ein N so gross, dass $|\psi(t) - \psi_N(t)| < \frac{e}{3}$ ($e > 0$ sonst beliebig) und gleichzeitig $|S - S_N| < \frac{e}{3}$ ist.

2) Wir setzen [1])

$$E(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(t) \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt - S.$$

Dann ist identisch

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi_N \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt - S_N =$$

$$= E(T) + S - S_N - \frac{1}{T}\int_0^T dt (\psi - \Psi_N) \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots$$

3) Dann kann man eine Grösse T_0 so angeben, dass für jedes $|T| > |T_0|$ die linke Seite der letzten Gleichung abs. $< \frac{e}{3}$ wird.

Beachtet man weiter, dass die rechte Seite sich nach 1) und 2) von $E(T)$ für jedes endliche T um weniger als $\frac{2}{3}e$ unterscheidet, so sieht man, das $E(T)$ für jedes $T > T_0$ absolut kleiner als e werden muss d. h.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t) \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{a_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{a_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt$$

---

1) $\psi(t)$ ist endlich und stetig, daher integrabel.

convergirt mit ohne Grenze wachsendem T nach dem Werthe S. Bezeichnet man mit $T_1\ T_2\ T_3 \ldots$ eine ohne Grenze wachsende Grössenreihe, so können wir schreiben

$$S = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \psi \,.\, cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt + P_{T_2 T_1} + P_{T_3 T_2} + \ldots$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$P_{ab} = \frac{1}{a} \int_0^{a} \psi \,.\, cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt -$$

$$- \frac{1}{b} \int_0^{b} \psi\ cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt$$

Falls etwa in der trig. Reihe für ψ jedes *cos*-Produkt nur einmal auftritt — ein wichtiger Fall — so ist S gleich dem Coefficienten des Produkts

$$cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \ldots cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right)$$

multiplicirt mit $\frac{1}{2^{m-n}}$.

Diese Coefficientenbestimmung im letzteren Fall wird im allgemeinen weniger für die wirkliche Berechnung geeignet sein, als vielmehr dazu dienen, wichtige Eigenhaften der trig. Reihe für ψ — insbesondere ihre gliedweise Differentiirbarkeit — zu untersuchen.

7.

Nachdem ich den in Nr. 1 angekündigten Satz für einen besonders wichtigen Specialfall bewiesen und zugleich gezeigt habe, wie in diesem Fall unter gewissen Voraussetzungen eingehendere Untersuchungen sich anschliessen können, will ich nun in den beiden letzten Nr. den genannten Satz im ganzen Umfang beweisen.

Zunächst zeige ich Folgendes:

Es sei $\psi(t)$ für alle t einer irgend wie definirten Werthmenge T gegeben. $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$ seien von Null verschiedene Grössen. Der Function ψ komme folgende Eigenschaft zu: Ist eine Grösse $e > 0$ gegeben, so kann eine zweite $\eta > 0$ so bestimmt werden, dass $|\psi(t+\tau) - \psi(t)| < e$ wird, wenn $\frac{\tau}{\alpha_1} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden, vorausgesetzt, dass $t + \tau$ und t zur Werthmenge T gehören. Dann giebt es eine einwerthige gleichmässig stetige, in $x_1 \ldots x_m$ mit den Perioden 1 periodische Function $\Psi(x_1 \ldots x_m)$ von der Eigenschaft, dass für alle t der Werthmenge T $\Psi\left(\frac{t}{a_1} \ldots \frac{t}{a_m}\right) = \phi(t)$ ist.

Es ist hier noch nicht gesagt, dass Ψ für alle $x_1 \ldots x_m$ definirt ist, wohl aber liegt in der Fassung des Satzes die Behauptung, dass Ψ für alle x, welche den Gleichungen $x_1 = \frac{t}{a_1} \ldots x_m = \frac{t}{a_m}$ (t ein Werth der Menge T) genügen können, bestimmt ist. Dass Ψ periodisch mit den Perioden 1 genannt ist, soll heissen: Ist Ψ für $x_1 \ldots x_m$ definirt, so ist Ψ es auch für $x_1 + n_1 \ldots x_m + n_m$, wobei $n_1 \ldots n_m$ irgend welche ganze Zahlen sind, und zwar hat Ψ daselbst denselben Werth wie in $x_1 \ldots x_m$. Dass Ψ gleichmässig stetig ist, soll heissen: Zu jeder Grösse $\delta > 0$ soll eine andere $\varepsilon > 0$ derart bestimmbar sein, dass der Unterschied der Werthe von Ψ für zwei Stellen, die etwa im Gebiete $a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + \varepsilon \ldots a_m \leqq x_m \leqq a_m + \varepsilon$ liegen ($a_1 \ldots a_m$ beliebig) und Werthe für Ψ liefern, kleiner als δ wird.

Der Beweis dieses Satzes ist dem in Nr. 3 völlig analog, nur wegen der weniger umfangreichen Behauptung entsprechend einfacher. Die Bezeichnungen Congruenz, Symbol, Classe, Zuordnung nehmen wir in demselben Sinne wie bisher. Jedoch soll eine Classe nur dann „erster Kategorie" heissen, wenn das ihr zugeordnete t der Menge T angehört. Jedem t ist wiederum nur eine Classe zugeordnet. Einer Classe können mehrere Werthe von t aus der Menge T zugeordnet sein, der Unterschied zweier solcher Werthe t_1 und t_2 muss dann aber ein gemeinsames ganzes Vielfache der $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ sein, sodass ϕ in t_1 und t_2 denselben Werth annimmt. Die Bemerkung Nr. 3,3 gilt unverändert, obgleich die dort bezeichneten Werthe t_1 t_2 ev. in mehrfacher Weise bestimmt werden können. Construirt man nun Ψ nur für die Stellen $x_1 \ldots x_m$, für welche $|x_1 \ldots x_m|$ erster Categorie ist, aber sonst ganz wie in Nr. 3, so genügt dieses Ψ allen Anforderungen unseres Satzes.

In Nr. 3 geschahen nun die weiteren Schritte in der Weise, dass die Function Ψ auch für die übrigen Stellen construirt wurde. Hieran schloss sich dann in Nr. 4 die Entwicklung von Ψ in eine Reihe $U_0 + U_1 + \ldots$ Hier würde das gleiche Verfahren zur Bestimmung von Ψ, wie in Nr. 3, nur an etwaigen Häufungsstellen von Stellen erster Kategorie zum Ziele führen. Immerhin könnte man vermuthlich auch hier eine Function construiren, die für alle $x_1 \ldots x_m$ einwerthig gegeben, gleichmässig stetig und periodisch wäre und an den Stellen erster Kategorie mit dem bisher bestimmten Ψ übereinstimmte. Wir kommen aher in einfacherer Weise zum Ziel.

In der folgenden Nr. wird nämlich gezeigt werden, dass man eine Function Ψ' finden kann, die überall einwerthig gegeben, gleichmässig stetig, periodisch ist und sich an den Stellen erster Kategorie von dem bisher bestimmten Ψ um weniger als $\frac{\delta}{3}$ unterscheidet ($\delta > 0$ sonst beliebig angenommen). Diesen Satz vorausgesetzt, können wir nach

Nr. 4 eine weitere Function Ψ'' finden, die sammt ihren Ableitungen $\frac{d^{\nu_1 + \ldots + \nu_m}}{dx_1^{\nu_1} dx_2^{\nu_2} \ldots dx_m^{\nu_m}} \Psi''$ $(\nu_1 \ldots \nu_m \leqq 2)$ überall einwerthig, gleichmässig stetig und periodisch ist und sich von Ψ' überall um weniger als $\frac{\delta}{3}$ unterscheidet. Dann können wir weiter nach Nr. 4 eine trigonometrische Reihe S von endlicher Gliederzahl finden, deren Summe sich von Ψ'' überall um weniger als $\frac{\delta}{3}$ unterscheidet. Diese Reihensumme weicht dann von Ψ an den Stellen erster Kategorie um weniger als δ ab. Weiter ist genau wie in Nr. 4 eine Entwicklung von Ψ in eine trigonometrische Reihe $U_0 + U_1 + U_2 \ldots$ möglich, die für alle Stellen erster Kategorie gleichmässig convergirt und Ψ an allen diesen Stellen darstellt. Damit ist unser Satz auch in seiner erweiterten Form bewiesen.

Es liegt vielleicht die Frage nahe, warum in dieser Abhandlung die zwei Formen unseres Satzes gesondert bewiesen wurden, während doch die in Nr. 3 und Nr. 4 erledigte einen besonderen Fall der hier besprochenen darstellt. Es geschah dies deshalb, weil die erste Form eine Construction von Ψ gestattete, die viel bequemer für weitergehende Untersuchungen ist als die vorliegende. Einen Beleg dafür hat Nr. 5 gebracht. Ich glaubte umsoweniger auf eine gesonderte Darstellung des ersten Falles verzichten zu sollen, als gerade dieser Fall für Anwendungen wichtig ist. Die bei Betrachtung desselben angewandten besonderen Verwahrungsweisen müssten bei der Verwerthung unseres Satzes nachgeholt werden, wenn sie hier weggeblieben wären.

8.

In der vorigen Nr. habe ich einen Satz vorausgesetzt, den ich jetzt noch zu beweisen habe.

Die Function Ψ von m Variablen $x_1 \ldots x_m$ erfülle folgende Bedingungen:

1) Ψ ist für irgend wie definirte Werthe von $x_1 \ldots x_m$ einwerthig gegeben; für andere hat es keinen Werth.

2) Ψ ist periodisch mit den Perioden $p_1 \ldots p_m$ dh. ist Ψ für $x_1 \ldots x_m$ gegeben, so gilt dasselbe für $x_1 + n_1 p_1 \ldots x_m + n_m p_m$, wenn $n_1 \ldots n_m$ irgend welche ganze Zahlen sind, und zwar hat Ψ daselbst den gleichen Werth.

3) Ψ ist gleichmässig stetig d. h. wie auch eine positive von Null verschiedene Grösse σ gewählt sein mag, stets giebt es ein System positiver von Null verschiedener Grössen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ derart, dass die Schwankung von Ψ für die Werthe, die es etwa im Gebiete $\xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_1 + \varepsilon_1 \ldots \xi_m \leqq x_m \leqq \xi_m + \varepsilon_m$ (ξ bel. Grössen) annimmt, kleiner als σ wird.

Dann giebt es eine Function φ die folgende Bedingungen erfüllt:

1) φ ist für alle Werthe von $x_1 \ldots x_m$ einwerthig gegeben

2) φ ist periodisch mit den Perioden $p_1 \ldots p_m$

3) φ ist gleichmässig stetig.

4) φ unterscheidet sich von Ψ für die $x_1 \ldots x_m$, wo letzteres gegeben ist, um weniger als eine beliebig gegebene Grösse $\varepsilon < 0$

Zum Beweise wählen wir m Grössen > 0 $3\delta_1\ 3\delta_2 \ldots 3\delta_m$ so aus, dass die Schwankung von Ψ in irgend einem Gebiete $\xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_1 + 3\delta_1 \ldots \xi_m \leqq x \leqq \xi_m + 3\delta_m$ kleiner als die beliebig gewählte Grösse $\sigma > 0$ wird. Hierbei kann man annehmen, dass $p_1 \ldots p_m$ ganze Vielfache von $\delta_1 \ldots \delta_m$ sind.

Nun ertheilen wir der Function φ zunächst Werthe für die $x_1 \ldots x_m$, welche positive oder negative ganzzahlige Vielfache (0 eingeschlossen) von $\delta_1 \ldots \delta_m$ sind. Und zwar erhält φ für $x_1 = \nu_1 \delta_1 \ldots x_m = \nu_m \delta_m$ ($\nu_1 \ldots \nu_m$ ganze Zahlen oder Null) irgend einen Werth, den Ψ im Gebiete $(\nu_1 - 1)\,\delta \leqq x_1 \leqq (\nu + 1)\,\delta_1 \ldots (\nu_m - 1)\,\delta_m \leqq x_m \leqq (\nu_m + 1)\,\delta_m$ etwa annimmt. Sollte aber Ψ für kein $x_1 \ldots x_m$ aus diesem Gebiete bestimmt sein, so bleibt auch φ an der genannten Stelle unbestimmt. Ferner soll noch festgesetzt werden, dass stets $\varphi\,(x_1 + n_1 p_1 \ldots x_m + n_m p_m) = \varphi\,(x_1 \ldots x_m)$ ($n_1 \ldots n_m$ ganze Zahlen oder 0) genommen werden soll, was immer möglich ist.

Die eben vollführte Bestimmung von φ für gewisse Werthe von $x_1 \ldots x_m$ wollen wir die Bestimmung I nennen. Sie muss immer zur Bestimmung von φ für gewisse $x_1 \ldots x_m$ führen, wenn Ψ überhaupt irgendwo gegeben ist.

Hat φ nach der Bestimmung I für ein gewisses System $x_1 = \nu_1' \delta_1 \ldots x_m = \nu_m' \delta_m$ einen Werth erhalten, so giebt es immer noch andere Systeme $x_1 = \nu_1' \delta_1 \ldots x_{m-1} = \nu_{m-1}' \delta_{m-1}$ $x_m = \nu_m'' \delta_m$ etc. für welche φ ebenfalls durch I bestimmt wird. Wir ertheilen nun φ auch noch Werthe für alle Systeme $x_1 = \nu_1' \delta_1 \ldots x_{m-1} = \nu_{m-1}' \delta_{m-1}$ $x_m = \xi_m$, wobei ξ_m irgend ein Werth ist, der nicht zu den $\nu_m' \delta_m$, $\nu_m'' \delta_m$ etc. gehört. Es geschehe dies in in der Weise, dass man unter den $\nu_m' \delta_m$, $\nu_m'' \delta_m$ etc. die zwei herausnimmt, welche ξ_m benachbart sind, es seien dies α und β, und dann setzt

$$\varphi\,(\nu_1' \delta_1 \ldots \nu_{m-1}' \cdot \delta_{m-1}\ \xi_m) = \varphi\,(\nu_1' \delta_1 \ldots \nu_{m-1}' \cdot \delta_{m-1}\ \alpha)\,\frac{\xi_m - \beta}{\alpha - \beta} + \varphi\,(\nu_1' \delta_1 \ldots \nu_{m-1}' \cdot \delta_{m-1}'\ \beta)\,\frac{\xi_m - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Diese Formel giebt auch noch den richtigen (d. h. mit der Bestimmung I übereinstimmenden) Werth für φ, wenn $\xi_m = \alpha$ oder β genommen wird.

Ebenso ertheile man φ Werthe für jedes System $x_1 = N_1 \delta_1 \ldots x_{m-1} = N_{m-1} \delta_{m-1}$ $x_m = \xi_m$, vorausgesetzt, dass die Combination von ganzen Zahlen $N_1 \ldots N_{m-1}$ in irgend einem System $x_1 \,.\,.\, x_{m-1}\, x_m$ vorkommt, wo φ nach I bestimmt wurde. Jedenfalls existirt nach Ausführung der eben genannten Bestimmung II für jedes x_m mindestens ein [1]) System $x_1 \,.\,.\, x_m$, wo jetzt φ bekannt ist. Ausserdem ist φ hinsichtlich der nach II angenommenen Werthe stetig.

Um letzteres zu zeigen, sei $x_1 \,.\,.\, x_m$ eine Stelle, wo φ nach der Bestimmung II bekannt ist. Man kann eine Umgebung dieser Stelle bestimmen, derart, dass jede Stelle, wo φ ebenfalls bestimmt ist und die in die Umgebung hineinfällt folgenden Bedingungen genügt.

1) Die Stelle kann bezeichnet werden mit $x_1 \,.\,.\,.\, x_{m-1} \quad x_m + \xi_m$, wobei $|\xi_m| < e$ ist (e eine beliebige Grösse > 0).

2) Wenn $x_m + \xi_m$ zwischen α und β liegt (vgl. oben die Bedeutung dieser Grössen) so liegt x_m zwischen α und β (diese Grenzen eingeschlossen).

Hiernach kann man setzen (für irgend ein bestimmtes ξ_m der Umgebung)

$$\varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_m) = \varphi\,(x_2 \,.\,.\, x_{m-1}\, \alpha)\,\frac{x_m - \beta}{\alpha - \beta} + \varphi\,(x_1 \,.\,.\,.\, x_{m-1}\, \beta)\,\frac{x_m - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_m + \xi_m) = \varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_{m-1}\, \alpha)\,\frac{x_m + \xi_m - \beta}{\alpha - \beta} + \varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_{m-1}\, \beta)\,\frac{x_m + \xi_m - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Da $|\alpha - \beta| \geqq \delta_m$ ist und die Werthe, die Ψ annimmt, zwischen endlichen Grenzen liegen müssen, so folgt, dass der Unterschied zwischen $\varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_m)$ und $\varphi\,(x_1 \,.\,.\, x_m + \xi_m)$ kleiner als eine vorgegebene Grösse ist, wenn nur e klein genug gewählt ist. Hieraus folgt die Stetigkeit ohne weiteres. Berücksichtigt man die Periodicitätseigenschaft, so erkennt man nach bekannten Methoden auch die gleichmässige Stetigkeit.

Es sei nun $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_{m-1}'\, x_m'$ eine Stelle, wo φ nach II bestimmt ist. Dann giebt es stets noch andere Stellen $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_{m-1}''\, x_m'$ etc. wo φ ebenfalls bestimmt ist. Wir verleihen nun der Function auch Werthe für alle Stellen $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_{m-1}\, x_m'$, für welche x_{m-1} einen von den $x_{m-1}'\, x_{m-1}''$ etc. verschiedenen Werth hat. Wir wählen unter den $x_{m-1}'\, x_{m-1}''$ etc. das benachbarte Paar $\alpha_1\, \beta_1$ aus, welches x_{m-1} zwischen α_1 und β_1 enthält (diese Wahl ist für alle Systeme $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_{m-1}\, x_m$ dieselbe, welchen Werth x_m auch haben mag). Dann setzen wir

$$\varphi\,(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_{m-1}\, x_m') = \varphi\,(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, \alpha_1\, x_m')\,\frac{x_{m-1} - \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \varphi\,(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, \beta_1\, x_m')\,\frac{x_{m-1} - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

Ebenso verfahren wir für die Stellen, in denen $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}'\, x_m'$ andere Werthe haben,

1) Es giebt dem natürlich auch immer mehr als ein System.

wenn nur eine Stelle existirt, in der φ nach II. bestimmt ist und die diese Combination aufweist. Jedenfalls giebt es jetzt zu jedem Werthepaar $x_{m-1}\, x_m$ Stellen $x_1 \,.\,.\, x_{m-1}\, x_m$ wo φ jetzt bestimmt ist. φ bleibt auch jetzt noch stetig.

Um letzteres zu zeigen, nehmen wir an $x_1' \,.\,.\, x_m'$ sei eine Stelle, in der φ jetzt nach der Bestimmung III bestimmt ist. Man kann dann für $x_1' \,.\,.\, x_m'$ eine Umgebung angeben, welche so klein ist, dass folgende Bedingungen erfüllt sind

1) Jede Stelle der Umgebung kann dargestellt werden durch $x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', x_{m-1}' + \xi_{m-1}$ $x_m' + \xi_m$, wobei $|\xi_{m-1}| < e_1$ $|\xi_m| < e_2$ ($e_1\, e_2$ zwei beliebige Grössen > 0).

2) Liegt $x_{m-1}' + \xi_{m-1}$ zwischen α_1 und β_1 (siehe oben die Bedeutung dieser Grössen) so liegt auch x_{m-1}' dazwischen, diese Grenzen eingeschlossen. $x_{m-1}' + \xi_{m-1}$ kann nur ev. mit α_1 oder β_1 zusammenfallen, wenn $\xi_{m-1} = 0$ ist.

Hiernach kann man für bestimmte ξ_{m-1} und ξ_m der Umgebung setzen

$$\varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', x_{m-1}' + \xi_{m-1}, x_m' + \xi_m\right) = \varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', \alpha_1, x_m' + \xi_m\right) \frac{x_{m-1}' + \xi_{m-1} - \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} +$$
$$+ \varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', \beta_1, x_m' + \xi_m\right) \frac{x_{m-1}' + \xi_{m-1} - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

$$\varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_m'\right) = \varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', \alpha_1, x_m'\right) \frac{x_{m-1}' - \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \varphi\left(x_1' \,.\,.\, x_{m-2}', \beta_1, x_m'\right) \frac{x_{m-1}' - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

Da aber φ nach der Bestimmung II glm. stetig war, so kann man jetzt $e_1\, e_2$ von vornherein so klein wählen, dass diese beiden Ausdrücke sich um weniger als eine gegebene Grösse unterscheiden. Hieraus folgt die gleichmässige Stetigkeit von φ nach bekannten Methoden.

In dieser Weise fährt man in der Bestimmung von φ fort. Schliesslich erhält man eine endliche, gleichmässig stetige und periodische Function φ, die für alle $x_1 \,.\,.\,.\, x_m$ gegeben ist.

Wir wollen nun ein Gebiet $\nu_1\, \delta_1 \leqq x_1 \leqq (\nu_1 + 1)\, \delta_1 \,.\,.\, \nu_m\, \delta_m \leqq x_m \leqq (\nu_m + 1)\, \delta_m$ ins Auge fassen, in dem Ψ wenigstens an einer Stelle gegeben ist und wollen es kurz das Gebiet 1) nennen. Nach der Bestimmung I erhielt dann φ jedenfalls Werthe an den Stellen, wo $x_1 = \nu_1\, \delta_1$ oder $= (\nu_1 + 1)\, \delta_1$, $x_2 = \nu_2\, \delta_2$ oder $= (\nu_2 + 1)\, \delta_2$ etc. ist, die wir Grenzstellen des Gebietes 1) nennen wollen. Die genannten Werthe sind aber alle aus den Werthen entnommen, welche Ψ in dem Gebiete $(\nu_1 - 1)\, \delta_1 \leqq x_1 \leqq (\nu_1 + 2)\, \delta_1 \,.\,.\,.$ $.\,.\,.\, (\nu_m - 1)\, \delta_m \leqq x_m \leqq (\nu_m + 2)\, \delta_m$, dem Gebiete 2), annimmt.

Aus der Construction von φ ist aber unmittelbar zu erkennen, dass diese Function im Gebiete 1) nur Werthe annimmt, die zwischen den äussersten Grenzen der Werthe an den Grenzstellen liegen oder ihnen höchstens gleichkommen. Daher liegen die Werthe von φ im Gebiete 1) zwischen den extremen Grenzen (dieselben eingeschlossen) der Werthe, welche Ψ im Gebiete 2) annimmt. Berücksichtigt man, dass diese Grenzen um weniger als σ von einander abstehen und dass das Gebiet 1) im Gebiet 2) enthalten ist, so sieht man, dass φ sich von Ψ im Gebiete 1) nirgends um mehr als σ unterscheiden kann. Damit ist unser Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Es sei schliesslich hervorgehoben, dass unsere Sätze auch noch andere Gestalten annehmen können, welche auf die hier behandelte Form zurückführen. Eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung ist ferner möglich, indem man sich von der Voraussetzung befreit, dass die α-Grössen in endlicher Anzahl vorhanden sind. Die Grundlagen für die Behandlung dieses Falles sind übrigens bereits in den letzten Nummern enthalten.

Thesen.

1. Diejenigen fundamentalen Gleichungen der Mechanik, auf welche Erfahrung und aprioristische Erkenntniss — wenn man eine solche annimmt — führen, sind allgemeiner als die gebräuchlichen Gleichungen. Es ist nicht richtig, letztere als Hypothesen zu bezeichnen.
2. Die Berechnung der potentiellen Energie auf Grund der Continuitätshypothese ist im allgemeinen nicht gestattet und hat mehrfach zu Fehlern Veranlassung gegeben.
3. Die Bezeichnung der Wärme als „Art von Bewegung“ ist falsch.
4. Das Wort „unendlich“ kann und soll aus den Lehrbüchern der Functionentheorie verschwinden.
5. Die Scheidung des Wahren vom Giltigen geschieht in der Naturwissenschaft und Mathematik nicht durchweg in bewusster und consequenter Weise.
6. Es giebt keine axiomatischen Wahrheiten in der Mathematik.

Различие между истинным
и годным определяется в
естествознании и математике не
всегда сознательным
последовательным образом