MAX HESSES
ILLUSTRIERTE
HANDBÜCHER

Handbuch der Akustik (Musikwissenschaft)

von
Prof. Dr.
H. Riemann

8. 9. Riemann, Kompositionslehre (Musikalische Formenlehre) I. (theoretischer) Teil: Allgemeine Formenlehre. II. (praktischer) Teil: Angewandte Formenlehre. 4. Aufl. 2 Bde. in 1 Bd. geb. M. 6,60 (brosch. je M. 2,60).

10. Riemann, Anleitung zum Generalbaßspiel. (Harmonieübungen am Klavier) 3. Aufl. geb. M. 3,10 (brosch. M. 2,10).

11. Riemann, Systematische Gehörsbildung. (Handbuch des Musikdiktats) 3. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

12. Schroeder, Prof. C., Handbuch des Violinspiels. 3. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

13. Schröder, C., Handbuch des Violoncellospiels. 2. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

14. Schroeder, C., Handbuch des Dirigierens u. Taktierens. (Der Kapellmeister und sein Wirkungskreis) 5. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

15. Riemann, Handbuch der Harmonie- und Modulationslehre. (Praktische Anleitung zum mehrstimmigen Tonsatz) 6. Aufl. geb. M. 3,60 (brosch. M. 2,60).

16. Riemann, Handbuch der Phrasierung. 3. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

17. Riemann, Grundlinien der Musikästhetik. (Wie hören wir Musik) 3. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

18. 19. Riemann, Analyse von Bachs wohltemperiertem Klavier. Teil I und II (Handbuch der Fugenkomposition) 3. Aufl. 2 Bde. in 1 Bd. geb. M. 6,60 (brosch. je M. 2,60).

29. Riemann, Analyse von Bachs Kunst der Fuge (Handbuch der Fugenkomposition III. Teil) 2. Aufl. geb. M. 3,60 (brosch. M. 2,10).

Max Hesses illustrierte Handbücher.
No. 21.

Handbuch
der
Akustik
(Musikwissenschaft)

von

Dr. phil. et mus. Hugo Riemann
Professor der Musikwissenschaft und Direktor des Collegium musicum der Universität Leipzig

2. Auflage

Leipzig,
Max Hesses Verlag
1914.

Holzfreies Papier.

Herrn

Prof. Dr. Franz Marschner

in Wien

freundschaftlichst gewidmet.

E. G.

Inhalt.

Vorwort der ersten Auflage.

Das vorliegende kleine Buch soll den sich für die Musik ernstlicher Interessierenden in die Kenntnis derjenigen Probleme einführen, welche die sogenannten „Musikgelehrten“ seit dem Altertume beschäftigt haben. Eine eingehendere *Würdigung* der einschlägigen Literatur lag nicht im Plane der Arbeit des Verfassers. Die im Buche angeführten Werke werden aber denen, die sich weiter vertiefen wollen, genug Wege in die Spezialliteratur der spekulativen Theorie der Musik aufweisen. Insbesondere wird vorausgesetzt, daß jeder, der weiter eindringen will, sich gründlich mit Helmholtz' „Lehre von den Tonempfindungen“ vertraut macht; von diesem hochbedeutenden Werk aus wird er sich leicht weiter orientieren und vor allem auch verstehen lernen, um was sich eigentlich die Zarlino, Rameau, Tartini, Valotti, Gottfried Weber, Fétis, M. Hauptmann, A. v. Öttingen gemüht haben. Die landläufige sogenannte theoretische Ausbildung des Musikers gewöhnt freilich denselben, sich zufriedenzugeben, wenn sein Lehrer ihm eine Anzahl praktischer Handgriffe beibringt und ihm gewisse Verbote einschärft; nach dem Warum? zu fragen, kommt den meisten gar nicht bei, auch würden die meisten Lehrer die Antwort schuldig bleiben müssen. Ich will aber nicht leugnen, daß mir doch in meiner eigenen Praxis schon eine Reihe jüngerer und älterer Musiker vorgekommen sind, welche nach Gründen und nach gewissen letzten festen Prinzipien verlangten: für solche einem idealen Bedürfnis Befriedigung Suchende ist das vorliegende kleine Buch als erster Handleiter gedacht.

Wenn das erste Kapitel ausführlicher ausgefallen ist als das zweite und dritte, so hat das seinen Grund darin, daß die Themen des zweiten und dritten Kapitels in andern Büchern des Verfassers ausführlicher abgehandelt sind; eine Wiederholung schien nicht am Platze. Hoffentlich gelingt es, durch eine solche allgemein verständliche Einführung in die Geschichte des musikalischen Rechnungswesens, Vorurteile gegen dasselbe zu beseitigen und einem weiteren Kreise von Musikern Interesse und Verständnis für dasselbe einzuflößen.

Wiesbaden, im April 1891.

Dr. Hugo Riemann.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Trotz der 23 Jahre, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage (als „Katechismus der Musikwissenschaft") verflossen sind, kann dieses kleine Buch so gut wie ganz unverändert zum Neudruck gehen. Die in demselben vertretenen Ansichten bezüglich der wissenschaftlichen Fundamentierung der Grundbegriffe der Musiktheorie (Konsonanz, Dissonanz, Tonalität usw.) stehen noch heute unerschüttert da. Karl Stumpf, von dessen „Tonpsychologie" der zweite Band (1890) ein Jahr vor der ersten Auflage dieses Buchs herausgekommen war und wegen der Absage an die einseitige Fundamentierung der Konsonanzlehre durch die Obertöne von mir mit Freude begrüßt wurde, hat bis heute nicht vermocht, die an eine Fortsetzung seines Werkes geknüpften Hoffnungen zu erfüllen und die von ihm dem Namen nach begründete „Tonpsychologie" (statt der Physiologie der Tonempfindungen Helmholtz') zu einer wirklichen Psychologie der Tonempfindungen, d. h.

eine Aufweisung der natürlichen Gesetze des Tonvorstellens fortzuentwickeln. Nach dieser Richtung sind meine eigenen Aufstellungen seit meiner Dissertation (1873) bis heute nicht durch Besseres ersetzt worden. Zwar hat Stumpf mit der Einführung der neuen Termini „Konkordanz" und „Diskordanz" für mehr als zweitönige Zusammenklänge neben den ausschließlich für Zweiklänge von ihm reservierten „Konsonanz" und „Dissonanz" sich zum Übertritt von den musikalisch so ganz ergebnislosen tonpsychologischen Experimenten auf das eigentlich musikalische Gebiet entschlossen, d. h. de facto anerkannt, daß der Begriff des konsonanten Akkords für die wissenschaftliche Fundamentierung der Musiklehre schlechterdings unentbehrlich ist; aber daß dabei der Dualismus Dur oder Moll unweigerlich herausspringt, ist ihm nach wie vor eine äußerst unbequeme Sache, und auch heute noch gibt er nicht zu, daß erst die Klangvertretung den Intervallen konkreten Sinn und ästhetischen Wert verleiht. Auch heute noch ist es von Stumpfs Standpunkte aus ein unlösbares Rätsel, daß schon der 7. Naturton nicht mehr als Konsonanz gewertet wird; die Grenze zwischen Konsonanz und Dissonanz verfließt bei ihm nach wie vor. Nicht Stumpf, sondern Arthur von Öttingen, dessen „Harmoniesystem in dualer Entwicklung" (Dorpat 1866), soeben (Herbst 1913) in Neubearbeitung als „Das duale Harmoniesystem" (Leipzig, C. F. W. Siegel) erscheint, ist in der wissenschaftlichen Fundamentierung der Musiktheorie der Anbahner eines wirklichen Fortschritts über Helmholtz hinaus. Freilich vermag derselbe sich nicht ganz frei zu machen von der Wertung des Phänomens der Obertöne als Ursache der Konsonanz, und er steht in dieser Hinsicht gegen Stumpf zurück, der mit Recht in den Phänomenen nur Belege für ein hinter denselben stehendes allgemeineres Prinzip erblickt. Aber Öttingen steht von Anfang an wirklich auf psychologischem Gebiete und handelt in seinem Werke (in beiden Fassungen) nur von musikalischen Vorstellungen. Konsonanz und Dissonanz sind Begriffe, die aus der Vergleichung und Kombination einer Mehrheit von Vorstellungen resultieren. Wie aus dem Schlußkapitel meiner „Geschichte der Musiktheorie" (im Verlag Max Hesse) des näheren zu ersehen, ist Öttingen allerdings durchaus nicht der Begründer der dualen Fundamentierung der Musiktheorie, sondern nur der erste, der in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts versucht hat, den harmonischen Dualismus naturwissenschaftlich zu begründen. Meine Arbeiten knüpfen zunächst durchaus an die Öttingens an, haben vor allem auch im Anschluß an Anfänge bei Öttingen allmählich eine duale Harmonie-Bezifferung ausgebaut. Unsere Wege schieden sich erst, als ich (zuerst 1877 in der „Musikalischen Syntaxis") die Lehre von der „enharmonischen Identifikation" aufstellte und endgültig jedem Versuche entsagte, die praktische Musiklehre mit den feineren Intonationsunterschieden der „reinen Stimmung" zu behelligen. Öttingen ist dagegen in seinem neuen Buche zur Ausarbeitung einer „Reinschrift", d. h. einer Andeutung der unterschiedenen Werte der reinen Stimmung, fortgeschritten, welche die gleichschwebende Temperatur gleichsetzt, in der Notierung, und tritt für die Einführung dieser Unterscheidungen in die Musikpädagogik ein. Die Vergleichung von Öttingens Methode mit der meinigen wird sehr nützlich sein, um klar zu machen, daß ich mich keineswegs in rein wissenschaftlich doktrinäres Wesen verirrt habe, sondern mit Vollbewußtsein seit 1877 eine Brücke von der strengen Wissenschaftlichkeit herüber zur musikalischen Praxis zu bauen mich bemüht habe. Weiterer Kompromisse bedarf es aber nun nicht, und diejenigen befinden sich auf einem Irrwege, welche meine Lehrweise durch Wiederausmerzung des Dualismus bequemer lehrbar machen zu können glauben.

Leipzig, Herbst 1913.

Hugo Riemann.

I. Kapitel.

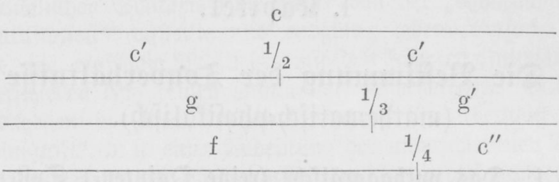
Die Bestimmung der Tonverhältnisse
(mathematisch-physikalisch).

§ 1. Das pythagoräische (reine Quinten-) System.

Die Zurückführung des Verhältnisses von Tönen, welche nach dem Urteil des Ohres als nach- oder miteinander verständlich erscheinen, auf gewisse einfache Zahlenbestimmungen ist sehr alt und, wenn wir von abenteuerlichen Mythen der Chinesen ganz absehen, mindestens auf Pythagoras, wahrscheinlich aber auf eine viel ältere, ägyptische Priesterweisheit zurückzuführen. Wir wollen den einmal geläufigen und historisch verbürgten Namen des Pythagoras festhalten und die älteste Bestimmung der musikalischen Intervalle nach der Größe der schwingenden Teile einer und derselben Saite bei gleichbleibender Spannung die pythagoräische nennen.

Die Grundlage dieses Systems der Tonbestimmung ist folgende.

Man spannt über einen mit genauer Maßteilung versehenen Resonanzkasten eine Saite über zwei Grenzstege, zwischen welchen ein dritter Steg, auf dem die Saite ebenfalls fest aufliegt, verschiebbar ist (Monochord). Angenommen, die Saite ist so lang und so gespannt, daß sie, wenn der verschiebbare Steg weggenommen wird, den Ton (klein) c angibt, so geben, wenn der bewegliche Steg gerade auf die Mitte der Saite gerückt wird, beide Hälften der Saite, wenn man sie anreißt (oder anstreicht), die Oktave des Tones der ganzen Saite, also (eingestrichen) c′. Rückt man den Steg auf $^1/_3$ der Länge der Saite, so ergibt der längere Teil der Saite ($^2/_3$) die Quinte des Tones der ganzen Saite, d. h. den Ton (klein) g, der kürzere ($^1/_3$) deren Oktave (eingestrichen) g′. Rückt man den Steg auf $^1/_4$ der Länge, so ergibt der längere Teil ($^3/_4$) die Quarte des Tones der ganzen Saite, d. h. den Ton (klein) f, der kürzere ($^1/_4$) die Quinte von dessen Oktave, d. h. (zweigestrichen c″), also:



Hier macht die Tonbestimmung der Pythagoräer halt, d. h. sie zieht nicht mehr den fünften Teil der Saite in Betracht (eine sehr naheliegende Weiterführung, zu welcher, wie wir sehen werden, die Folgezeit fortschreitet), sondern leitet alle weiteren Tonverhältnisse aus den Zahlenbestimmungen der hiermit gefundenen ab. Zunächst ergibt die Vergleichung von $^2/_3$ der Saitenlänge (g) mit $^3/_4$ (f) das Verhältnis des ganzen Tones (f : g) als $^3/_4 : {}^2/_3 = 9 : 8$. Um die Richtigkeit dieser Rechnung einzusehen, denke man sich die Maßteilung des Monochords in 60 Einheiten, dann ist:

$$\begin{aligned} c &= 60 \\ c' &= 30 \ (= {}^1/_2\ c) \\ g' &= 20 \ (= {}^1/_3\ c) \\ g &= 40 \ (= {}^2/_3\ c) \\ c'' &= 15 \ (= {}^1/_4\ c) \\ f &= 45 \ (= {}^3/_4\ c) \end{aligned}$$

also f : g = 45 : 40, oder was dasselbe ist 9 : 8.

Überträgt man dieses Verhältnis auf c selbst, d. h. stellt man den Steg auf $^1/_9$ der Länge von c, so gibt der kürzere Teil der Saite ($^1/_9$) den Ton d‴, und der längere ($^8/_9$) dessen tiefere Tripeloktave d; denn $^1/_9$ der ganzen Saite ist soviel wie $^1/_3$ von $^1/_3$ ($^1/_3$ c ist aber $= g'$, die Quinte der Oktave von c, und $^1/_3$ g' die Quinte der Oktave von g', d. h. d'''). Jede Halbierung ergibt einen eine Oktave höheren Ton, also jede Verdoppelung einen eine Oktave tieferen; also ist, wenn $^1/_9 = d'''$ ist, $^2/_9 = d''$, $^4/_9 = d'$ und $^8/_9 = d$. So haben wir nun zunächst innerhalb der Oktave c — c' die Töne:

$$
\begin{aligned}
c &= 1\\
d &= {}^8/_9\, c\\
f &= {}^3/_4\, c\\
g &= {}^2/_3\, c\\
c' &= {}^1/_2\, c
\end{aligned}
$$

Wollen wir diese Werte in ganzen Zahlen ausdrücken, so müssen wir c = 36 Einheiten (36 als Generalnenner der Neuntel, Viertel usw.) setzen:

$$
\begin{aligned}
c &= 36\\
d &= 32\\
f &= 27\\
g &= 24\\
c &= 18
\end{aligned}
$$

Die noch fehlenden Töne der diatonischen Skala e, a und h berechneten die Pythagoräer in ähnlicher Weise durch weitere Übertragungen des Quintverhältnisses ($^2/_3$) resp. Ganztonverhältnisses ($^8/_9$), nämlich, indem sie von d aus die Quinte a als $^2/_3$ d bestimmten und weiter von a aus die Quinte e' als $^2/_3$ a (bzw. dessen Unteroktave e als $^4/_3$ a) und endlich h als $^2/_3$ e, oder aber gleich e als $^8/_9$ d, a als $^8/_9$ g und h als $^8/_9$ a.

Die ganze Skala von c bis c' bestimmt sich also als:

$$
\begin{aligned}
c &= 1\\
d &= {}^8/_9\, c\\
e &= {}^8/_9\, d = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{8}{9}\, c = \tfrac{64}{81}\, c\\
f &= {}^3/_4\, c\\
g &= {}^2/_3\, c\\
a &= \tfrac{2}{3}\, d = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{2}{3}\, c = \tfrac{16}{27}\, c\\
h &= \tfrac{2}{3}\, e = \tfrac{64}{81} \cdot \tfrac{2}{3}\, c = \tfrac{128}{243}\, c\\
c' &= {}^1/_2\, c
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir die gefundenen Werte noch untereinander, so ist d : f eine kleine Terz von dem Verhältnis $^8/_9 : {^3/_4} = \frac{32}{27}$, e : f ein Halbton von dem Verhältnis $\frac{64}{81} : {^3/_4} = \frac{256}{243}$, h : c′ ein ebensolcher ($\frac{128}{243} : {^1/_2} = \frac{256}{243}$) und f : h eine übermäßige Quarte von dem Verhältnis $^3/_4 : \frac{128}{243} = \frac{729}{512}$. Übertragen wir auch diese Verhältnisse auf c selbst, so finden wir dessen kleine Terz es $= \frac{27}{32}$, den Halbton des $= \frac{243}{256}$ und die übermäßige Quarte fis $= \frac{512}{729}$. Alle drei ergeben gegen ihre Nachbartöne das Verhältnis des chromatischen Halbtons oder der Apotome (des : d, es : e, f : fis) als $\frac{2048}{2187}$, denn es ist $\frac{243}{256} : {^8/_9} = \frac{2048}{2187}$, und ebenso $\frac{27}{32} : \frac{64}{81} = \frac{2048}{2187}$ und $^3/_4 : \frac{512}{729} = \frac{2048}{2187}$. Sämtliche Werte der pythagoräischen Bestimmung sind zurückzuführen auf eine Reihe von übereinander gebauten Quinten mit Reduktion um eine oder mehrere Oktaven; setzen wir statt $^2/_3$ das Zeichen Q und drücken durch zu diesem gestellte ganze Zahlen aus, wievielmal das Quintenverhältnis potenziert ist, und ebenso durch O das Oktavintervall und durch Zahlen bei demselben ebenfalls die Anzahl der Oktaven, so können wir die Töne der obigen Skala ausdrücken durch:

$$c = 1 \qquad g = Q$$

$$d = \frac{2\,Q}{O} \qquad a = \frac{3\,Q}{O}$$

$$e = \frac{4\,Q}{2\,O} \qquad h = \frac{5\,Q}{2\,O}$$

$$f = \frac{1}{Q} \qquad c' = O$$

Dem pythagoräischen System ist der Begriff der Terz als eines leichtverständlichen Grundintervalls fremd (die Terz e ist vielmehr eine um zwei Oktaven verengte vierte Quinte $= \frac{4\,Q}{2\,O}$). Diese Art von Tonbestimmung stößt daher erst mit der zwölften Quinte wieder auf einen Ton, der mit dem Ausgangston resp. dessen siebenter Oktave annähernd in der Tonhöhe übereinstimmt. Setzen wir $_1C = 1$, so ist $_1G = {^2/_3}$, $D = {^4/_9}$, $A = \frac{8}{27}$, $e = \frac{16}{81}$, $h = \frac{32}{243}$, fis′ $= \frac{64}{729}$, cis″ $= \frac{128}{2187}$, gis″ $= \frac{256}{6561}$, dis‴ $= \frac{512}{19683}$, ais‴ $= \frac{1024}{59049}$, eis⁗ $= \frac{2048}{177147}$, his'''' $= \frac{4096}{531441}$; rücken wir dieses his'''' um sieben Oktaven herab ($\frac{4096}{531441} \cdot 2^7 = \frac{4096}{531441} \cdot 128 = \frac{524288}{531441}$) oder rücken wir $_1$C um sieben Oktaven hinauf $\left(\frac{1}{2^7} : \frac{4096}{531441}\right)$, was dasselbe ist, so finden wir, daß die zwölfte Quinte von $_1$C (his'''') etwas höher ist (nämlich um das Verhältnis $\frac{531441}{524288}$) als die siebente Oktave (c'''').

Dieser Unterschied heißt das **pythagoräische Komma** (dasselbe beträgt etwas mehr als $^1/_{10}$ Ganzton), das zwar bei den Griechen selbst keine Rolle spielte, wohl aber in der neueren Zeit für die Berechnung der Verhältnisse der **gleichschwebenden Temperatur.**

Dasselbe Verhältnis finden wir, wenn wir in Quinten von $_1$C hinabsteigen oder, was dasselbe ist, wenn wir in Quarten emporsteigen: $_1$C $= 1$, $_1$F $= \frac{3}{4}$, $_1$B $= \frac{9}{16}$, Es $= \frac{27}{64}$, As $= \frac{81}{256}$, des $= \frac{243}{1024}$, ges $= \frac{729}{4096}$, ces' $= \frac{2187}{16384}$, fes' $= \frac{6561}{65536}$, heses' $= \frac{19683}{262144}$, eses'' $= \frac{59049}{1048576}$, asas'' $= \frac{177147}{4194304}$, deses''' $= \frac{531441}{16777216}$, was, um fünf Oktaven herabgerückt, wieder $\frac{531441}{524288}$ ergibt, um das deses tiefer ist als c.

Verfolgen wir diese Art der Tonbestimmung noch weiter bis an die Grenze der Notenschrift (hisis und feses) und rücken die Werte zugleich in eine Oktavlage zusammen (zwischen c und c'), so erhalten wir die Werte:

c $= 1.$

his $= \frac{524288}{531441}$ (pythagoräisches Komma) $= \frac{2^{19}}{3^{12}}$

des $= \frac{243}{256} = \frac{3^5}{2^8}$

cis $= \frac{2048}{2187}$ (Apotome) $= \frac{2^{11}}{3^7}$

hisis $= \frac{1073741792}{1162261467} = \frac{2^{30}}{3^{19}}$

eses $= \frac{59049}{65536} = \frac{3^{10}}{2^{16}}$

d $= {}^8/_9$ (Ganzton) $= \frac{2^3}{3^2}$

$$\text{cisis} = \frac{4194304}{4782969} = \frac{2^{22}}{3^{14}}$$

$$\text{feses} = \frac{14348907}{16777216} = \frac{3^{15}}{2^{24}}$$

$$\text{es} = \frac{27}{32} \text{ (pyth. kleine Terz)} = \frac{3^3}{2^5}$$

$$\text{dis} = \frac{16384}{19683} = \frac{2^{14}}{3^9}$$

$$\text{fes} = \frac{6561}{8192} = \frac{3^8}{2^{13}}$$

$$\text{e} = \frac{64}{81} \text{ (pyth. Terz)} = \frac{2^6}{3^4}$$

$$\text{disis} = \frac{33554432}{43046721} = \frac{2^{25}}{3^{16}}$$

$$\text{geses} = \frac{1594323}{2097152} = \frac{3^{13}}{2^{21}}$$

$$\text{f} = \frac{3}{4} \text{ (Quarte)} = \frac{3}{2^2}$$

$$\text{eis} = \frac{131072}{177147} = \frac{2^{17}}{3^{11}}$$

$$\text{ges} = \frac{729}{1024} = \frac{3^6}{2^{11}}$$

$$\text{fis} = \frac{512}{729} = \frac{2^9}{3^6}$$

$$\text{eisis} = \frac{268435448}{387420489} = \frac{2^{28}}{3^{18}}$$

$$\text{asas} = \frac{177147}{262144} = \frac{3^{11}}{2^{18}}$$

$$\text{g} = \frac{2}{3} \text{ (Quinte)}$$

$$\text{fisis} = \frac{1048576}{1594323} = \frac{2^{20}}{3^{13}}$$

$$\text{as} = \frac{81}{128} \text{ (pyth. kl. Sexte)} = \frac{3^4}{4^7}$$

$$\text{gis} = \frac{4096}{6561} = \frac{2^{12}}{3^8}$$

$$\text{heses} = \frac{19683}{32768} = \frac{3^9}{2^{15}}$$

$$\text{a} = \frac{16}{27} \text{ (pyth. gr. Sexte)} = \frac{2^4}{3^3}$$

$$\text{gisis} = \frac{8388608}{14348907} = \frac{2^{23}}{3^{15}}$$

$$\text{ceses} = \frac{4782969}{8388608} = \frac{3^{14}}{2^{23}}$$

$$\text{b} = \frac{9}{16} \text{ (kl. Septime)} = \frac{3^2}{2^4}$$

$$\text{ais} = \frac{32768}{59049} = \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

$$\text{ces}' = \frac{2187}{4096} = \frac{3^7}{2^{12}}$$

$$\text{h} = \frac{128}{243} = \frac{2^7}{3^5}$$

$$\text{aisis} = \frac{67108864}{129140163} = \frac{2^{26}}{3^{17}}$$

$$\text{deses}' = \frac{531441}{1048576} = \frac{3^{12}}{2^{20}}$$

$$\text{c}' = \frac{1}{2}$$

Diese 36 Werte sind so geordnet, daß jeder folgende Ton höher ist als der vorausgehende. Das kann man freilich den zum Teil sehr komplizierten Brüchen nicht ansehen; es tritt aber sofort deutlich hervor, wenn man die gemeinen Brüche durch Dezimalbrüche ersetzt, die man bekanntlich findet, wenn man den Zähler durch den Nenner teilt (was, besonders bei komplizierten Beispielen, am bequemsten mit Hilfe Briggsscher Logarithmen geschieht), z. B. für his:

$$\begin{array}{rl} \log 524288 &= 5{,}7195716 \\ -\log 531441 &= 5{,}7254542 \\ \hline & 0{,}9941344^{\,-1} \text{ num.} = 0{,}98722 \end{array}$$

(Die Logarithmenrechnung hat den großen Vorzug, daß sie jeden Fehler schnell verrät.)

Dann sehen unsere 36 pythagoräischen Werte in Dezimalen so aus:

c	= 1,00000
his	= 0,98722
des	= 0,94922
cis	= 0,93644
hisis	= 0,92385
eses	= 0,90102
d	= 0,88888
cisis	= 0,87694
feses	= 0,85523
es	= 0,84375
dis	= 0,83239
fes	= 0,80091
e	= 0,79012
disis	= 0,77949
geses	= 0,76024
f	= 0,75
eis	= 0,73992
ges	= 0,71194
fis	= 0,70217
eisis	= 0,69286
asas	= 0,67575
g	= 0,66666
fisis	= 0,65765
as	= 0,63281
gis	= 0,62420
heses	= 0,60068
a	= 0,59245
gisis	= 0,58461
ceses	= 0,57017
b	= 0,5625
ais	= 0,55493
ces	= 0,53391
h	= 0,52675
aisis	= 0,51965
deses	= 0,50686
c′	= 0,5

Wir haben die Übersicht der durch Bestimmung nach reinen Quint- und Oktavschritten sich ergebenden Töne bis an die Grenze unserer Notenschrift geführt (welche eine dreifache Erhöhung oder eine dreifache Erniedrigung der Stammtöne c d e f g a h nicht kennt).

§ 2. Die Hereinziehung der Terz als 4 : 5 in die Tonbestimmung (Didymos).

Bei den Tonbestimmungen für das chromatische und enharmonische Geschlecht der Griechen wollen wir uns nicht aufhalten, ebensowenig bei den mancherlei durch spätere griechische Theoretiker versuchten Tetrachordenteilungen. Während nämlich nach pythagoräischer Bestimmung das dorische Tetrachord ein für allemal (von oben nach unten zerlegt) aus zwei Ganztönen des Verhältnisses 8 : 9 und einem Halbtone des Verhältnisses 243 : 256 besteht,

$$3:4\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\\g\end{array}\right\}\ 8:9\\\left.\begin{array}{l}g\\f\end{array}\right\}\ 8:9\\\left.\begin{array}{l}f\\e\end{array}\right\}\ :243:256\end{array}\right.$$

wollte der berühmte Aristoxenos von so komplizierten Bestimmungen überhaupt nichts wissen und stellte ganz andere Maße auf, welche dem entsprechen sollten, was das Ohr über die Qualitäten der Töne aussage; mit andern Worten: er bestimmte die Tonverhältnisse als Differenzen der Tonhöhe, anstatt als Quotienten der Saitenlängen. Er nahm die Quarte, die im theoretischen System der Griechen die Hauptrolle spielt, als Ganzes zu 60 Einheiten an und bestimmte dann für das diatonische Tongeschlecht die Differenzen als:

a		oder als: a	
g	... 24	g	... 30
f	... 24	f	... 18
e	... 12	e	... 12

Das erste möchte gehen als Unterscheidung des ganzen und halben Tones; das zweite aber (das „weiche" diatonische Geschlecht) ganz und gar nicht ($2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} : 1$). Noch krauser sehen die Bestimmungen für das chromatische und enharmonische Geschlecht und ihre verschiedenen Färbungen aus.

Dagegen interessieren uns einige der versuchten Tetrachordenteilungen des Archytas, Eratosthenes, Didymos und Ptolemäos, weil in ihnen die Terz als 4 : 5 oder die kleine Terz als 5 : 6 auftritt. Scheint das bei Archytas und Eratosthenes mehr wie ein Zufall, sofern bei Archytas die Terz 4 : 5 nur im enharmonischen, bei Eratosthenes die kleine Terz 5 : 6 nur im chromatischen Geschlecht zu finden ist, während das wichtigste, das diatonische Geschlecht bei Archytas gar die Teilung der Quarte 3 : 4 in 27 : 28, 7 : 8 und 8 : 9 aufweist (Eratosthenes hält für dasselbe die pythagoräische Bestimmung fest), so ist *Didymos* merkwürdig konsequent in allen drei Geschlechtern, denn er schreibt vor:

diatonisch:

$$\mathbf{4:5}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{a} \\ \mathrm{g} \\ \mathrm{f} \end{array}\right. \begin{array}{l} \ldots\ 8:9 \\ \ldots\ 9:10 \\ \ldots\ 15:16 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ g \\ f \end{array}}\right\} 3:4 \qquad \mathrm{e}$$

chromatisch:

$$\mathbf{4:5}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{a} \\ \mathrm{fis} \\ \mathrm{f} \end{array}\right. \begin{array}{l} \ldots\ 5:6 \\ \ldots\ 24:25 \\ \ldots\ 15:16 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ g \\ f \end{array}}\right\} 3:4 \qquad \mathrm{e}$$

enharmonisch:

$$\begin{array}{l} \mathrm{a} \\ 15:16\left\{\begin{array}{l} \mathrm{f} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{e} \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{l} \ldots\ \mathbf{4:5} \\ \ldots\ 30:31 \\ \ldots\ 31:32 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ g \\ f \end{array}}\right\} 3:4$$

Von der reichen Sammlung von Teilungsversuchen bei Ptolemäos dürfen wir wieder absehen, obgleich sich unter ihnen sogar eine unserer heutigen Bestimmung noch genauer entsprechende Teilung findet, weshalb Zarlino, der unsere heutigen Tonbestimmungen endgültig feststellte, sich auf Ptolemäos berufen zu müssen glaubte.

Die Bestimmungen des Didymos (geb. 63 v. Chr. zu Alexandria) bringen nämlich zu den von uns bisher allein betrachteten aus der Potenzierung des Quintverhältnisses 2 : 3 sich ergebenden Bestimmungen gänzlich neue, welche unser Ohr heute als durchaus leichtverständliche anerkennt, nämlich solche, die sich aus dem neben das Quintintervall und Oktavintervall als neues Grundintervall tretenden Terzintervall (als 4 : 5), seine Kombination mit dem Quintintervall, und seine Potenzierung ergeben; denn während die pythagoräische Tonbestimmung die Terz als vierte Quinte, um zwei Oktaven herabgedrückt, ergibt $\left(\frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}\right)$, findet Didymos die Terz, indem er die Saite in fünf gleiche Teile teilt (c als Ton der ganzen Saite angenommen):

e $\quad$ $^1/_5$ e″

Die Terz als 4 : 5, verglichen mit der pythagoräischen als 64 : 81, erscheint erheblich kleiner, nämlich um das Intervall $\frac{4}{5} : \frac{64}{81} = \frac{4 \cdot 81}{5 \cdot 64} = \frac{324}{320} = \frac{162}{160} = \frac{81}{80}$, das mit Recht so genannte didymische Komma (auch syntonisches Komma genannt).

Wie das pythagoräische Komma in den Berechnungen der gleichschwebenden Temperatur, so spielt das didymische Komma eine Hauptrolle in der neuesten Musikwissenschaft, besonders in allen der Durchführung reiner Stimmung (im Gegensatze zu allen Temperaturen) gewidmeten Arbeiten (Hauptmann, Helmholtz, v. Öttingen, Engel, Tanaka usw.).

Geraume Zeit nach Didymos und Ptolemäos, aber doch noch lange vor Zarlino, finden wir eine klare Vorstellung von der Konsonanzbedeutung der Terz als 4 : 5 bei den arabisch-persischen Musiktheoretikern in der sogenannten Messel-Theorie, die wohl ins 9. Jahrhundert n. Chr., wenn nicht noch viel weiter zurückreicht. Während die pythagoräische Intervallberechnung von der Teilung der Saite in Halbe, Drittel, Viertel (und bei Didymos usw noch Fünftel, Sechstel usf.) ausgeht, der sogenannten „harmonischen Saitenteilung", geht die Messel-Theorie umgekehrt von einem kleinsten Saitenstück aus, dessen Länge mit ihren einfachen Vielfachen verglichen wird, so daß an die Stelle der harmonischen Reihe $1 : {}^1/_2 : {}^1/_3 : {}^1/_4$ usf. die *arithmetische Reihe* $1:2:3:4:5:6$ tritt:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & c' & e' & a' & e'' & e''' \end{array}$$

Alle Intervalle werden ausgedrückt durch die Größe der Saite des tieferen Tones als Vielfaches der des höheren Tones, also die Oktave als 2 (2 Messel d. h. Maßeinheiten), die Quinte als $1^1/_2$ (1 Messel und dessen Hälfte) usw.

Es ist wohl zu beachten, daß diese umgekehrte Ableitungsweise der Tonverhältnisse dieselben Resultate ergibt wie die pythagoräische harmonische Teilung der Saite; wir werden auf dieselbe später ausführlicher zurückkommen, weil sie auf die einfachste Weise das Verständnis der *Mollkonsonanz* erschließt. Hier wollen wir einstweilen nur betonen, daß man — immer unter Vergleichung der Saitenlängen der Töne — ebensogut sagen kann: g ist $= {}^2/_3$ c, als: c ist $= {}^3/_2$ g; ja diese umgekehrte Formel kommt auch unter Festhaltung desselben Tones als Einheit zur Anwendung, sobald man anstatt der Saitenlängen die Schwingungszahlen der zu vergleichenden Töne ins Auge faßt. Daß die tieferen Töne, deren Saitenmaße größer sind, langsamere Schwingungen machen, und umgekehrt die höheren, deren Saiten kürzer sind, schnellere, und daß man daher ebensogut die Tonverhältnisse nach der Schnelligkeit der Schwingungen würde bezeichnen können, war schon dem Mathematiker Euklid bekannt (bei Meibom S. 23) und auch Boëtius spricht davon (Mus. IV. 1); in neuerer Zeit, seit Leonhard Eulers „Tentamen novae theoriae musicae" (1729), ist es sogar allgemein üblich geworden, nicht die Saitenlängen — oder wissenschaftlicher ausgedrückt: die relativen Schallwellen-Längen —, sondern vielmehr die relativen Schwingungszahlen der Töne der Intervallbestimmung zugrunde zu legen. Früher, als man noch kein Mittel kannte, die Schwingungen, die ein Ton von bestimmter Höhe macht, zu zählen, lag es natürlich näher, *an einer und derselben Saite bei gleichbleibender Spannung* die

Einfachheit der Grundverhältnisse zugleich ad aures und ad oculos zu demonstrieren. Wir werden im folgenden den neueren Weg einschlagen, ergänzen aber zuvor noch unsere obige Tabelle der Tonbestimmungen nach Saitenlängen durch Berechnung der durch das Terzintervall 4 : 5 sich ergebenden Werte. Man erhält dieselben, wenn man die Formeln der bisher gefundenen Töne mit $^4/_5$ (Oberterz) oder aber $^5/_4$ (Unterterz), oder aber einzeln mit $\frac{80}{81}$ bzw. $\frac{81}{80}$ multipliziert. Um aber die dadurch gefundenen Werte gleich als durch das Terzverhältnis bestimmte zu charakterisieren, setzen wir unter oder über den Tonbuchstaben einen horizontalen Strich, welcher die Vertiefung oder Erhöhung des Tones um das didymische (syntonische) Komma 80 : 81 gegenüber den pythagoräischen Bestimmungen nach reinen Quintabständen anzeigt. Eine solche Unterscheidung der Quint- und Terztöne in der Buchstabentonschrift versuchte zuerst Moritz Hauptmann („Natur der Harmonik und der Metrik" 1853), indem er große und kleine Buchstaben unterschied und mit gleichen Buchstaben (z. B. CE oder ce) die pythagoräische, mit ungleichen (Ce, cE) aber die reine Terz 4 : 5 ausdrückte. Helmholtz („Lehre von den Tonempfindungen" 1863) nahm diese Unterscheidungsweise auf; da sich dieselbe aber unzulänglich erwies, um z. B. einen übermäßigen Dreiklang, der zwei große Terzintervalle enthält, bestimmt auszudrücken, führte Helmholtz hilfsweise zur Bezeichnung der zweiten Terz den Horizontalstrich ein; A. von Öttingen („Harmoniesystem in dualer Entwickelung") ließ die Hauptmannsche Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben, die ja bekanntlich zur Andeutung verschiedener Oktavlagen dient, ganz fallen und griff gleich zu den Horizontalstrichen, indem er die *Oberterz* mit einem Strich *über*, die *Unterterz* mit einem Strich *unter* dem Buchstaben anzeigte. Diese viel glücklichere Bezeichnungsweise adoptierte Helmholtz in den neuen Auflagen seines Werks, leider aber mit umgekehrter Unterscheidung der Stellung der Striche. Da aber Helmholtz' Werk verdientermaßen eine außerordentliche Verbreitung gefunden hat, so halte auch ich die Helmholtzsche und nicht die Öttingensche Bezeichnungsweise fest. Es ist also $\underline{\text{e}}$ die Oberterz (4 : 5) von c, sofern es um $\frac{80}{81}$ tiefer ist als e; $\overline{\text{as}}$ ist die Unterterz (5:4) von c, sofern es um $\frac{80}{81}$ höher ist als as; die Oberterz von $\underline{\text{e}}$ aber ist $\underline{\underline{\text{gis}}}$ (das gegenüber der 8. Quint gis um zwei didymische Kommata tiefer ist), und die Unterterz von $\overline{\text{as}}$ ist $\overline{\overline{\text{fes}}}$ (um zwei didymische Kommata höher als fes, die 8. Unterquinte von c). Es leuchtet sofort ein, welch ungeheurer Fortschritt die Tonbestimmung nach Terzschritten ist, denn Töne wie fisis, ja schon his kommen als Quintverwandte (13. resp. 12. Quinte von c) kaum in Betracht (weil sie vom Zentrum unseres Tonvorstellens viel zu weit abliegen), wohl aber als Terzverwandte: $\underline{\underline{\text{his}}}$ ist die Terz von $\underline{\text{gis}}$, $\underline{\underline{\text{fisis}}}$ die Terz von $\underline{\underline{\text{dis}}}$ (welches Terz von $\underline{\text{h}}$, der Terz von g, ist) usf. Wir müssen daher außer den ersten auch die zweiten und dritten Ober- und Unterterzen in Betracht ziehen; dabei beschränken wir uns zunächst auf diejenigen der Stammtöne c d e f g a h (nebst den einfachen Terzen von b, es und fis) und rücken wiederum die Werte sämtlich zwischen c = 1 und c′ = $^1/_2$. Wir geben der besseren Übersicht wegen die Werte nun gleich mit in Dezimalen:

c = 1

$\overline{\text{c}}$ (Unterterz von e) $\frac{64}{81}\cdot\frac{5}{4}=\frac{320}{324}=\frac{80}{81}=0{,}98765$ (didym. Komma)

$\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$ (3. Unterterz v. c′) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{128}=0{,}97657$ (kleine Diesis)

$\underline{\underline{\text{cis}}}$ (2. Oberterz v. F) $=\frac{3}{2}\cdot\frac{4^2}{5^2}=\frac{48}{50}=\frac{24}{25}=0{,}96$ (kleines Chroma)

$\underline{\text{cis}}$ (Oberterz v. A) $=\frac{32}{27}\cdot\frac{4}{5}=\frac{128}{135}=0{,}94815$ (großes Chroma)

$\overline{\text{des}}$ (Unterterz von f) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{16}=0{,}9375$ (Leittonschritt)

$\overline{\overline{\text{des}}}$ (2. Unterterz v. a) $=\frac{16}{27}\cdot\frac{5^2}{4^2}=\frac{25}{27}=0{,}92592$

$\underline{\underline{\underline{\text{cisis}}}}$ (3. Oberterz v. D) $=\frac{16}{9}\cdot\frac{4^3}{5^3}=\frac{1024}{1125}=0{,}91022$

$\underline{\text{d}}$ (Oberterz von B) $=\frac{9}{8}\cdot\frac{4}{5}\frac{36}{40}=\frac{0}{10}=0{,}9$ (kleiner Ganzton)

$$\overline{\overline{\text{eses}}}\ (\text{2. Unterterz v. b}) = \frac{9}{16} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{225}{256} = 0{,}87891 \ (\text{verminderte Terz})$$

$$\overline{\text{d}}\ (\text{Unterterz von fis}) = \frac{512}{729} \cdot \frac{5}{4} = \frac{640}{729} = 0{,}87791$$

$$\overline{\overline{\overline{\text{eses}}}}\ (\text{3. Unterterz v. d}') = \frac{4}{9} \cdot \frac{5^3}{4^4} = \frac{125}{144} = 0{,}86808$$

$$\underline{\underline{\text{dis}}}\ (\text{2. Oberterz von G}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{64}{75} = 0{,}85333 \ (\text{überm. Sekunde})$$

$$\underline{\text{dis}}\ (\text{Oberterz v. H}) = \frac{256}{243} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1024}{1215} = 0{,}84282$$

$$\overline{\text{es}}\ (\text{Unterterz von g}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0{,}83333 \ (\text{kleine Terz})$$

$$\overline{\overline{\text{es}}}\ (\text{2. Unterterz v. h}) = \frac{128}{243} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{200}{243} = 0{,}82306$$

$$\underline{\underline{\underline{\text{disis}}}}\ (\text{3. Oberterz v. E}) = \frac{128}{81} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{4096}{5075} = 0{,}82223$$

$$\underline{\text{e}}\ (\text{Oberterz v. c}) = \frac{4}{5} \ \ldots\ldots\ldots = 0{,}8 \ (\text{Terz})$$

$$\overline{\overline{\text{fes}}}\ (\text{2. Unterterz v. c}') = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{32} = 0{,}78112 \ (\text{verm. Quarte})$$

$$\overline{\overline{\overline{\text{fes}}}}\ (\text{3. Unterterz v. e}') = \frac{32}{81} \cdot \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{162} = 0{,}77161$$

$$\underline{\underline{\underline{\text{eis}}}}\ (\text{3. Oberterz von F}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{96}{125} = 0{,}768$$

$$\underline{\underline{\text{eis}}}\ (\text{2. Oberterz von A}) = \frac{32}{27} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{512}{675} = 0{,}75852 \ (\text{überm. Terz})$$

$$\overline{\text{f}}\ (\text{Unterterz v. a}) = \frac{16}{27} \cdot \frac{5}{4} = \frac{80}{108} = \frac{20}{27} = 0{,}74074$$

$$\overline{\overline{\overline{\text{geses}}}}\ (\text{3. Unterterz v. f}') = \frac{3}{8} \cdot \frac{5^3}{4^3} = \frac{375}{512} = 0{,}73242$$

$$\underline{\underline{\text{fis}}}\ (\text{2. Oberterz von B}) = \frac{9}{8} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{18}{25} = 0{,}72 \ (\text{kl. überm. Quarte})$$

$$\underline{\text{fis}}\ (\text{Oberterz von d}) = \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{45} = 0{,}71111 \ (\text{gr. überm. Quarte})$$

$$\overline{\text{ges}}\ (\text{Unterterz von b}) = \frac{9}{16} \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{64} = 0{,}70313 \ (\text{kl. verm. Quinte})$$

$\overline{\overline{\text{ges}}}$ (2. Unterterz von d′) $= \frac{4}{9} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{36} = 0{,}69444$ (gr. verm. Quinte)

$\underline{\underline{\underline{\text{fisis}}}}$ (3. Oberterz v. G) $= \frac{4}{3} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{256}{375} = 0{,}68267$

$\underline{\text{g}}$ (Oberterz von es) $= \frac{27}{32} \cdot \frac{4}{5} = \frac{27}{40} = 0{,}675$

$\underline{\underline{\text{fisis}}}$ (2. Oberterz v. H) $= \frac{256}{243} \cdot \frac{4^2}{5^3} = \frac{4096}{6075} = 0{,}67424$

$\overline{\text{g}}$ (Unterterz von h) $= \frac{128}{243} \cdot \frac{5}{4} = \frac{160}{243} = 0{,}65844$

$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$ (3. Unterterz v. g′) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{192} = 0{,}65104$

$\underline{\underline{\text{gis}}}$ (2. Oberterz von c) $= \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64$ (übermäßige Quarte)

$\overline{\text{as}}$ Unterterz von c′) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ (kleine Sexte)

$\underline{\underline{\underline{\text{gisis}}}}$ (3. Oberterz v. A) $= \frac{32}{27} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{2048}{3375} = 0{,}60682$

$\underline{\text{a}}$ (Oberterz von f) $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ (große Sexte)

$\overline{\overline{\text{heses}}}$ (2. Unterterz v. f′) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{75}{128} = 0{,}58594$ (verm. Septime)

$\overline{\overline{\overline{\text{heses}}}}$ (3 Unterterz v. a′) $= \frac{8}{27} \cdot \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{216} = 0{,}57870$

$\underline{\underline{\underline{\text{ais}}}}$ (3. Oberterz von B) $= \frac{9}{8} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{72}{125} = 0{,}576$

$\underline{\underline{\text{ais}}}$ (2. Oberterz von d) $= \frac{8}{9} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{128}{225} = 0{,}56890$ (überm. Sexte)

$\overline{\text{b}}$ (Unterterz v. d′) $= \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}555555$

$\overline{\overline{\text{b}}}$ (2. Unterterz v. fis′) $= \frac{256}{729} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{400}{729} = 0{,}54871$

$\underline{\underline{\underline{\text{aisis}}}}$ (3. Oberterz v. H) $= \frac{256}{243} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{16384}{30375} = 0.53939$

$\underline{\text{h}}$ (Oberterz von g) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}53333$ (große Septime)

$\overline{\text{ces}}'$ (Unterterz v. es′ $= \frac{27}{64} \cdot \frac{5}{4} = \frac{135}{256} = 0{,}52734$ (verm. Oktave)

$\overline{\overline{\text{ces}}}'$ (2. Unterterz v. g′) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{48} = 0{,}52083$

$\overline{\overline{\overline{\text{ces}}}}'$ (3. Unterterz v. h′) $= \frac{64}{243} \cdot \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{243} = 0{,}51440$

$\underline{\underline{\underline{\text{his}}}}$ (3. Oberterz von c) $= \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125} = 0{,}512$

$\underline{\underline{\text{his}}}$ (2. Oberterz v. e) $= \frac{64}{81} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{1024}{2025} = 50568$

c′ (Oktave) $= \frac{1}{2}$ . . . . $= 0{,}5$

Ein Blick auf diese Tabelle genügt, um die Wichtigkeit der Einführung des Terzintervalls als $^4/_5$ in die Tonbestimmung darzutun; denn wie einfach fallen hier die Verhältnisse der (in Klammer benannten) wichtigeren Intervalle aus, gegenüber den pythagoräischen Bestimmungen:

diatonischer Halbton pythagoräisch	$= \frac{243}{256}$	hier $= \frac{15}{16}$	
chromatischer Halbton	″ $= \frac{2048}{2178}$	″ $= \frac{24}{25}$	oder $\frac{128}{135}$
übermäßige Sekunde	″ $= \frac{16384}{19683}$	″ $= \frac{64}{75}$	
kleine Terz	″ $= \frac{27}{32}$	″ $= \frac{5}{6}$	
übermäßige Quarte	″ $= \frac{512}{729}$	″ $= \frac{18}{25}$	oder $\frac{32}{45}$
verminderte Quinte	″ $= \frac{729}{1024}$	″ $= \frac{45}{64}$	oder $\frac{25}{36}$
übermäßige Quinte	″ $= \frac{4096}{6561}$	″ $= \frac{16}{25}$	
kleine Sexte	″ $= \frac{81}{128}$	″ $= \frac{5}{8}$	
große Sexte	″ $= \frac{16}{27}$	″ $= \frac{3}{5}$	

verminderte Septime pythagoräisch $= \frac{19683}{32768}$ hier $= \frac{75}{128}$

übermäßige Sexte " $= \frac{32768}{59049}$ " $= \frac{128}{225}$

große Septime " $= \frac{128}{243}$ " $= \frac{8}{15}$

Daß aber die Bestimmungen mit Hilfe des Terzverhältnisses erhebliche Abweichungen der Tonhöhebestimmung ergeben, mag man ersehen aus Vergleichung der in Dezimalen ausgedrückten Werte beider. Dabei stellt sich z. B. heraus, daß pythagoräisch der chromatische Halbton größer ist als der diatonische, didymisch dagegen der diatonische größer als der chromatische, ebenso ist pythagoräisch die verminderte Quinte kleiner als die übermäßige Quarte, und die übermäßige Sexte größer als die kleine Septime, während die didymischen Bestimmungen das Gegenteil ergeben.

Daß dennoch das pythagoräische System auch heute noch Anhänger hat, ist nur im Hinblick auf die gleichschwebende zwölfstufige Temperatur begreiflich, welche die pythagoräischen Werte allerdings weniger alteriert als die didymischen. Die Notwendigkeit, trotz unserer auf die gleichschwebende Temperatur durchaus angewiesenen Musikpraxis, doch die aus der Kombination der Quint- und Terzbestimmung sich ergebenden Werte als die grundlegenden und der Auffassung der Tonverhältnisse entsprechenden anzuerkennen, kann uns freilich erst der zweite und dritte Teil unserer Untersuchungen ergeben.

§ 3. Logarithmische Bestimmung der Tonhöhendifferenzen.

Um die Unterschiede der Größe der verschiedenen Intervallbestimmungen schneller zu erkennen, nahmen wir bereits im vorigen Paragraphen unsere Zuflucht zu den Dezimalzahlen an Stelle der natürlichen Brüche. Aber auch diese (die Dezimalzahlen) sind noch recht unbequem zu handhaben, wenn es sich darum handelt, kompliziertere Intervalle zu bestimmen, und zwingen zu multiplizieren oder zu dividieren, wo das Gemeinbewußtsein nur addiert oder subtrahiert. Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel wie die große Septime (didymisch) als Terz der Quinte (c — g — h), so ist es gewiß dem Gefühl des nicht mathematisch geschulten Musikers befremdlich, daß er, um das Verhältnis der großen Septime (c h) zu finden, nicht die Verhältnisse $^2/_3$ (Quinte) und $^4/_5$ (Terz) addieren, sondern vielmehr sie multiplizieren muß:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

In solchen einfachen Fällen kann man ebensogut mit den natürlichen als mit den Dezimalbrüchen hantieren:

$$0{,}66666.. \times 0{,}8 = 0{,}53333$$

bei komplizierteren ist letzteres vorzuziehen, aber auch noch kompliziert und zeitraubend genug, so daß man lieber Logarithmen als Hilfsmittel der Berechnung heranzieht. Bekanntlich braucht man, um zwei Zahlen miteinander zu multiplizieren, nur deren Logarithmen zu addieren und dann den Numerus des Resultats zu suchen, z. B.

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}66666 & = 0{,}8239044 - 1 \\ \times \log 0{,}8 & = 0{,}9030900 - 1 \\ \hline \text{num. } & 1{,}7269944 - 2 = 0{,}53333 \end{array}$$

Man kann aber die große Bequemlichkeit der logarithmischen Rechnungsweise noch weiter ausnutzen, indem man die Tonwerte selbst in Logarithmen ausdrückt; dann gewinnt man den Vorteil, daß man nur zwei Werte zu addieren braucht, um einen dritten zu finden, der der Verbindung der beiden Intervalle entspricht. Wollen wir z. B. die Werte unserer obigen Tabelle in (gemeinen Briggschen) Logarithmen ausdrücken, so wird der Ton c als log 1 = 0,000000 erscheinen, c′ aber als 0,6989700 — 1; alle andern Werte würden dann zwischen diesen sich einschalten, und die sämtlichen Verhältnisse würden durch Differenzen ersetzt sein.

Um aber unsere weiter zu berechnenden Tabellen dem heutigen Usus besser anzupassen, legen wir nicht wieder die Saitenlängen, sondern vielmehr die Schwingungszahlen zugrunde, d. h. wir drücken die Oktave anstatt durch $^1/_2$ durch 2 aus, also die Quinte nicht durch $^2/_3$, sondern durch $^3/_2$ usw.

Es hat das den Vorzug, daß wir statt der negativen Logarithmen (für echte Brüche) positive (für unechte Brüche) erhalten. Die sämtlichen bisher entwickelten Werte zwischen Oktave und Einklang fallen nun zwischen die Logarithmen 0,0000000 und 0,3010300 (= log 2). Während bei den Dezimalbrüchen die Gleichheit von Intervallen wie z. B. c : d und $\underline{\text{a}}$: $\underline{\text{h}}$ nur durch Division erweisbar ist (0,53330 : 0,6 = 0,88888), liegt sie bei den Logarithmen als Differenz offen zutage!

Ton	Schwingungsquotient	Logarithmus
c	1	0,0000000
$\overline{\text{c}}$	$\frac{81}{80}$	0,0053950
His	$\frac{531441}{524288}$	0,0058826
$\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$	$\frac{128}{125}$	0,0103000
$\underline{\underline{\text{cis}}}$	$\frac{25}{24}$	0,0177288
des	$\frac{256}{243}$	0,0226337
$\underline{\text{cis}}$	$\frac{135}{128}$	0,0231238
$\overline{\text{des}}$	$\frac{16}{15}$	0,0280287
cis	$\frac{2187}{2048}$	0,0285188
$\overline{\overline{\text{des}}}$	$\frac{27}{25}$	0,0334238
hisis	$\frac{1162261467}{1073741792}$	0,0344047
$\underline{\underline{\text{cisis}}}$	$\frac{1125}{1024}$	0,0408525
eses	$\frac{65536}{59049}$	0,0452674

Ton	Schwingungsquotient	Logarithmus
$\underline{\mathrm{d}}$	$\frac{10}{9}$	0,0457575
d	$\frac{9}{8}$	0,0511525
$\overline{\overline{\mathrm{eses}}}$	$\frac{256}{225}$	0,0560575
$\overline{\mathrm{d}}$	$\frac{729}{640}$	0,0565475
cisis	$\frac{4782969}{4194304}$	0,0570409
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{eses}}}}$	$\frac{144}{125}$	0,0614525
feses	$\frac{16777216}{14348907}$	0,0678503
$\underline{\underline{\mathrm{dis}}}$	$\frac{75}{64}$	0,0688813
es	$\frac{32}{27}$	0,0737862
$\underline{\mathrm{dis}}$	$\frac{1215}{1024}$	0,0742763
$\overline{\mathrm{es}}$	$\frac{6}{5}$	0,0771813
dis	$\frac{19683}{16384}$	0,0796714
$\overline{\overline{\mathrm{es}}}$	$\frac{243}{200}$	0,0845763
$\underline{\underline{\underline{\mathrm{disis}}}}$	$\frac{5075}{4096}$	0,0930761
fes	$\frac{8192}{6561}$	0,0964199
$\underline{\mathrm{e}}$	$\frac{5}{4}$	0,0969100
e	$\frac{81}{64}$	0,1023050
$\overline{\overline{\mathrm{fes}}}$	$\frac{32}{25}$	0,1072100

Ton	Schwingungsquotient	Logarithmus
disis	$\frac{43046721}{33554432}$	0,1081885
fes	$\frac{162}{125}$	0,1126050
eis	$\frac{125}{96}$	0,1146388
geses	$\frac{2097152}{1594323}$	0,1190491
eis	$\frac{675}{512}$	0,1200338
f	$\frac{4}{3}$	0,1249387
f	$\frac{27}{20}$	0,1303338
eis	$\frac{177147}{131072}$	0,1308150
geses	$\frac{512}{375}$	0,1352387
fis	$\frac{25}{18}$	0,1426675
ges	$\frac{1024}{729}$	0,1475725
fis	$\frac{45}{32}$	0,1480525
ges	$\frac{64}{45}$	0,1529675
fis	$\frac{729}{512}$	0,1534575
ges	$\frac{36}{25}$	0,1583525
eisis	$\frac{387420489}{268435448}$	0,1593509
fisis	$\frac{375}{256}$	0,1657913
asas	$\frac{262144}{177147}$	0,1702167

Ton	Schwingungsquotient	Logarithmus
$\underline{\text{g}}$	$\frac{40}{27}$	0,1706962
$\underline{\underline{\text{fisis}}}$	$\frac{3025}{2048}$	0,1711863
g	$\frac{3}{2}$	0,1760913
$\overline{\text{g}}$	$\frac{243}{160}$	0,1814863
fisis	$\frac{1594323}{1048576}$	0,1820016
$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$	$\frac{192}{125}$	0,1863912
$\underline{\underline{\text{gis}}}$	$\frac{25}{16}$	0,1938200
as	$\frac{128}{81}$	0,1987250
$\overline{\text{as}}$	$\frac{8}{5}$	0,2041200
gis	$\frac{6561}{4096}$	0,2046101
$\underline{\underline{\underline{\text{gisis}}}}$	$\frac{3375}{2048}$	0,2169438
heses	$\frac{32768}{19683}$	0,2213586
$\underline{\text{a}}$	$\frac{5}{3}$	0,2218487
a	$\frac{27}{16}$	0,2272438
$\overline{\overline{\text{heses}}}$	$\frac{128}{75}$	0,2321487
gisis	$\frac{14348907}{8388608}$	0,2328908
$\overline{\overline{\overline{\text{heses}}}}$	$\frac{216}{125}$	0,2375438
$\underline{\underline{\underline{\text{ais}}}}$	$\frac{125}{72}$	0,2395775

Ton	Schwingungsquotient	Logarithmus
ceses′	$\frac{8388608}{4782969}$	0,2440488
$\underline{\underline{\text{ais}}}$	$\frac{225}{128}$	0,2449725
b	$\frac{16}{9}$	0,2498775
$\overline{\text{b}}$	$\frac{9}{5}$	0,2552725
ais	$\frac{59049}{32768}$	0,2557626
$\overline{\overline{\text{b}}}$	$\frac{729}{400}$	0,2606575
$\underline{\underline{\underline{\text{aisis}}}}$	$\frac{30375}{16384}$	0,2680964
ces′	$\frac{4096}{2187}$	0,2725111
$\underline{\text{h}}$	$\frac{15}{8}$	0,2730013
$\overline{\text{ces}'}$	$\frac{256}{135}$	0,2779062
h	$\frac{243}{128}$	0,2782963
$\overline{\overline{\text{ces}'}}$	$\frac{48}{25}$	0,2833012
aisis	$\frac{129140163}{67108864}$	0,2842868
$\overline{\overline{\overline{\text{ces}'}}}$	$\frac{243}{125}$	0,2886963
$\underline{\underline{\underline{\text{his}}}}$	$\frac{125}{64}$	0,2897300
deses′	$\frac{1048576}{531441}$	0,2951142
$\underline{\underline{\text{his}}}$	$\frac{2025}{1024}$	0,2961250
c′	$\frac{2}{1}$	0,3010300

Hier ist z. B. der Wert des didymischen Kommas = 0,0053950 (c : $\bar{c}$); denselben wird man überall finden, wenn man bei zwei um ein solches Komma unterschiedenen Tönen den Logarithmus des tieferen von dem des höheren Tones abzieht. Das pythagoräische Komma = 0,008826 (His : c) wird man ebenso überall zwischen Tönen wiederfinden, die zwölf Quinten voneinander abstehen (des : cis) usw.*)

Die gewaltige Überlegenheit der logarithmischen Tonhöhenbestimmung gegenüber der mit Dezimalen ist sofort einleuchtend, da sie deren einzigen Vorzug, die Reihenfolge der Werte bezüglich der Höhenlage scharf kenntlich zu machen, teilt, übrigens aber das Rechnungswesen ganz außerordentlich erleichtert, indem sie an die Stelle der Division der Quotienten jederzeit die Subtraktion der Logarithmen, an Stelle der Multiplikation der Quotienten die Addition der Logarithmen und an Stelle der Potenzierung der Quotienten die Multiplikation der Logarithmen setzt. In einem freilich stehen die Logarithmen ebenso wie die Dezimalen (ja noch mehr) hinter den durch gemeine Brüche ausgedrückten Quotienten zurück, nämlich, daß sie die Einfachheit oder Kompliziertheit des Verwandtschaftsverhältnisses der Töne nicht erkennen lassen. Man vergleiche folgende Werte (ich wähle die, welche für die Dezimalen günstig sind):

	Dezimalen	Logarithmen
$\underline{d}$ (kl. Ganzton)	$^9/_{10} = 0{,}9$	0,0457575
$\underline{e}$ (gr. Terz)	$^4/_5 = 0{,}8$	0,0969100
f (Quarte)	$^3/_4 = 0{,}75$	0,1249387
$\underline{a}$ (gr. Sexte)	$^3/_5 = 0{,}6$	0,2218487
c (Oktave)	$^1/_2 = 0{,}5$	0,3010300

Die Quinte ($^2/_3$), kleine Terz ($^5/_6$), der große Ganzton ($^8/_9$), die große Septime ($^8/_{15}$) haben in Dezimalbestimmung

---

*) Etwaige kleine Differenzen in den beiden letzten Dezimalen sind ohne Belang, da sie nur Tausendstel eines Ganztonintervalls treffen. Dieselben finden sich besonders bei solchen Tönen, deren Quotient durch einen sehr großen Bruch ausgedrückt ist, der nur annähernd berechnet wurde (z. B. aisis, deses u. a.).

irrationale Zählwerte, während kompliziertere Intervalle wie das kleine Chroma ($\frac{24}{25} = 0{,}96$), die kleine übermäßige Quarte ($\frac{18}{25} = 0{,}72$), die übermäßige Quinte ($\frac{16}{25} = 0{,}64$) u. a. einfachere rationale Werte zeigen. Die Logarithmen aber haben sämtlich irrationale Mantissen bis auf die Potenzen von 10, welche bekanntlich nur Nullen hinter der Charakteristik haben; der 10. Oberton, d. h. die Terz der dritten Oktave, also von C aus e″ würde den Logarithmus 1,000000 haben, während bis dahin die Mantisse stetig wachsen würde:

	Logarithmen	Quotienten	Dezimalen
C (Ausgangston)	= 0,0000000	1	1,0000
c (Oktave)	= 0,3010300	$^2/_1$	2,0000
g (Duodezime)	= 0,4771213	$^3/_1$	3,0000
c′ (Doppeloktave)	= 0,6020600	$^4/_1$	4,0000
e′ (Septdezime)	= 0,6989700	$^5/_1$	5,0000
g′ (6. Oberton)	= 0,7781513	$^6/_1$	6,0000
*b′ (7. Oberton)	= 0,8450980	$^7/_1$	7,0000
c″ (Tripeloktave)	= 0,9030900	$^8/_1$	8,0000
d″ (9. Oberton)	= 0,9542425	$^9/_1$	9,0000
e″ (10. Oberton)	= 1,0000000	$^{10}/_1$	1,00000

Dieses Weiterwachsen der Mantisse bis zum 10. Oberton steht in einem fühlbaren Mißverhältnis zu dem vom Musiker gefühlten Verhältnis der Töne; den 10. Oberton berechtigt nichts zu einer Ausnahmestellung. Wenn irgendein Ton Anspruch auf eine solche hat, so ist es vielmehr die Oktave, welche jedermann als dem Ausgangstone nächstverwandt anerkennt. Der Musiker empfindet, wenn er die Skala, gleichviel ob diatonisch oder chromatisch, hinaufgeht, daß mit der Oktave eine Art Kreislauf abgeschlossen ist, der von ihr aus von neuem beginnt. Deshalb hat schon Leonhard Euler („Tentamen novae theoriae musicae“ 1729) an Stelle der gemeinen Briggschen Logarithmen, welche alle Zahlenwerte als Potenzen von 10 geben, Logarithmen auf Basis 2 für das musikalische Rechnungswesen angewandt, in denen alle Werte als Potenzen von 2 erscheinen. Die Formel für das Auffinden dieser Logarithmen ist

$$2^x = a$$

d. h. 2 muß in die x^{te} Potenz erhoben werden, um den Wert des Quotienten a zu ergeben. Mit Hilfe Briggsscher Logarithmen rechnet man die Werte auf folgende Weise aus: wenn man z. B. den Logarithmus auf Basis 2 für die Quinte $= {}^3/_2$ sucht, so ist:

$$2^x = {}^3/_2 \qquad \text{also: } \log 3 = 0{,}4771213$$

$$\text{oder: } x = \frac{\log {}^3/_2}{\log 2} \qquad \begin{array}{r} -\log 2 = 0{,}3010300 \\ \hline \log {}^3/_2 = 0{,}1760913 \end{array}$$

$$0{,}1760913 : 0{,}3010300 = 0{,}584962.$$

Die Logarithmen auf Basis 2 ergeben für die Oktave die Charakteristik 1 mit der Mantisse 000000 und wachsen durch jede weitere Oktave wieder bis zu einer weiteren Einheit der Charakteristik, also:

$$\begin{aligned} C &= 0{,}00000.. \\ c &= 1{,}000000 \\ c' &= 2{,}00000 \\ c'' &= 3{,}00000 \end{aligned}$$

usf.

Allerdings bleibt auch bei diesen Logarithmen der Übelstand, daß Intervalle wie die Quinte, Terz, kleine Terz usf. irrationale Mantissen haben, wie bei den Briggsschen Logarithmen; aber der Umstand, daß alle im Oktavverhältnis stehenden Töne dieselbe Mantisse haben, ist doch ein gewaltiger Fortschritt gegenüber den in der letzten Tabelle entwickelten Werten. Unsere große Gesamttabelle im Anhang gibt außer den bisher entwickelten Tonwerten in ihrer verschiedenartigen Formulierung nach Saitenlängen, Schwingungszahlen in Dezimalen und Logarithmen auf Basis 10, Basis 2 und Basis $\sqrt[12]{2}$ (worüber weiterhin) noch eine größere Zahl weiterer denkbarer Tonwerte (z. B. auch die Terzen der pythagoräisch bestimmten, erhöhten und erniedrigten Stammtöne — $\underline{f}$ als Terz von des, $\overline{ais}$ als Terz von fis —, auch einige der wichtigsten über den 5. hinausliegenden primären Obertöne:

b^{7*}, fis^{11*}, a^{13*} und die Werte der zwölfstufigen und der 53stufigen gleichschwebenden Temperatur, deren Vortrefflichkeit gerade durch eine solche Zusammenstellung evident wird. Die Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$ werden wir bei der Besprechung der Temperaturen zu würdigen haben. Hier sei nur noch bemerkt, daß man wohl auch auf den Gedanken kommen könnte, anstatt der Oktave die Quinte einer logarithmischen Bestimmung zugrunde zu legen; dann würde man allerdings für Töne, die um wirkliche Quintintervalle voneinander abstehen, ganze Zahlen als Differenzen erhalten (mit der Mantisse 000000), aber nicht für die Oktaven gleiche, sondern verschiedene Mantissen. Die Formel wäre

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^x = a$$

d. h. es wäre dann der (gemeine Briggssche) Logarithmus jedes Quotienten durch den (Briggsschen) Logarithmus von $^3/_2$ zu dividieren. Die dadurch gefundenen Werte sind für die C-dur-Skala:

c = 0,000000
d = 0,290490 (gr. Sekunde $^9/_8$)
$\underline{e}$ = 0,550908 (große Terz $^5/_4$)
f = 0,709510 (Quarte $^4/_3$)
g = 1,000000 (Quinte $^3/_2$)
$\underline{a}$ = 1,260418 (Sexte $^5/_3$, Terz von f)
$\underline{h}'$ = 1,550908 (gr. Septime $^{15}/_8$, Terz von g)
c′ = 1,709510 (Oktave = Quarte von g)
d′ = 2,000000 (zweite Quinte)
usf.

Ebenso würden Logarithmen auf Basis $^5/_4$ nur für die Terzen (in wirklichen Terzabständen z. B. $\underline{\underline{\text{his}}}$ als 3. Terz von c = 3,000000) einfache Werte ergeben, nicht aber für die Oktaven und Quinten. Im Oktavverhältnis stehende Töne würden wieder ganz verschiedene Mantissen haben (ähnlich wie hier c und c′, d und d′).

§ 4. Die ungleichschwebenden Temperaturen.

Unsere im vorigen Paragraphen entwickelte Tabelle der Quint- und Terztöne weist bereits 85 verschiedene Werte innerhalb einer Oktave auf; wir werden aber weiterhin noch viel mehr Möglichkeiten erkennen (vgl. die Schlußtabelle). Eine einfache Melodiephrase wie

mag zunächst daran erinnern, wie solche verschiedenen Tonhöhenbestimmungen zu verstehen sind. Bei * * sehen wir $\overline{\text{des}}$ und $\underline{\text{cis}}$ bei + + $\underline{\underline{\text{dis}}}$ und $\overline{\text{es}}$ kurz nacheinander vorkommen; hier:

folgen bei * * * d $\underline{\text{d}}$ und d einander in kurzen Abständen. In Logarithmen auf Basis 10 sind die Werte dieser Töne

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\text{des}} = 0{,}0280287\\ \underline{\text{cis}} = 0{,}0231238\end{array}\right\}\ \text{Differenz} = 0{,}0049049\ \text{(etwa } ^1/_{10}\text{ Ganzton)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\text{es}} = 0{,}0771813\\ \underline{\underline{\text{dis}}} = 0{,}0688813\end{array}\right\}\ \text{Differenz} = 0{,}0117000\ \text{(etwa } ^1/_{6}\text{ Ganzton)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d} = 0{,}0511525\\ \underline{\text{d}} = 0{,}0457575\end{array}\right\}\ \text{Differenz} = 0{,}0053950\ \text{(etwa } ^1/_{10}\text{ Ganzton)}$$

d. h. sie weisen Differenzen auf, welche dem Ohr sehr wohl bemerklich sind; es leuchtet ein, daß ein für $\underline{\text{des}}$ gegebenes

$\overline{\text{cis}}$ zu hoch, ein für $\overline{\text{es}}$ gegebenes $\underline{\underline{\text{dis}}}$ zu tief erscheinen muß. Die Singstimme, deren Intonationen in jedem Moment der Korrektur des Ohrs unterworfen sind, wird diese Töne ohne weiteres korrekt unterscheiden, sobald die Tonphantasie sie sich richtig in ihrem Verwandtschaftsverhältnis vorstellt ($\overline{\text{des}}$ als Unterterz der Unterquint, $\underline{\text{cis}}$ als Terz der dritten Quint, $\underline{\underline{\text{dis}}}$ als zweite Terz der Oberquint, $\overline{\text{es}}$ als Unterterz der Oberquint, d als zweite Quint, $\underline{\text{d}}$ als Terz der zweiten Unterquint); auch Instrumente mit freier Intonation, wie die Violine, können die Werte sehr wohl unterscheiden. Dagegen sind aber Instrumente mit gebundener Intonation, d. h. einer beschränkten Anzahl abgestimmter Saiten oder Pfeifen oder Grifflöcher usw., darauf angewiesen, aus der Überfülle der Möglichkeiten eine Auswahl zu treffen, d. h. sich auf einen kleinen Kreis wirklich genau stimmender Werte zu beschränken, und auf die andern zu verzichten, oder aber an Stelle der vielen vom Ohr geforderten Werte eine Anzahl Mittelwerte zu setzen, deren jeder mehreren annähernd entspricht. Das erstere — die Beschränkung auf eine mäßig große Zahl genau stimmender Werte — war solange das natürliche und selbstverständliche, als die praktische Musikübung sich in einfachem Geleise bewegte, d. h. sich sowohl der Chromatik als reichlicherer Modulationen enthielt, also im klassischen Altertum vor der Blütezeit der Chromatik, und später wieder im Mittelalter vor Entwicklung der kontrapunktischen Musik. Wir haben zwar gesehen, daß auch die alten Griechen keineswegs in der Bestimmung der Werte ihrer diatonischen Skala übereinstimmten, daß die Pythagoräer die Tonverhältnisse durch Quotienten ausdrückten, die Aristoxener dagegen nach Differenzen (wozu nicht unbemerkt bleiben mag, daß vielleicht Aristoxenos eine Ahnung der Falschheit der Bestimmung der Terz als $\frac{81}{64}$ und des Halbtons als $\frac{256}{243}$ gehabt haben mag); man darf aber nicht vergessen, daß jenen Zeiten (auch dem Mittelalter) die Mittel genauer Kontrolle der Schwingungszahlen fehlten. Man wird schwerlich fehlschließen, wenn man annimmt, daß dem Kulturstand der siebentönigen Skalen das Terzintervall als solches verständlich war (obgleich es die

Theoretiker noch nicht definieren konnten); und ebenso wird man berechtigt sein, anzunehmen, daß mit dem Gebrauch erhöhter und erniedrigter Töne zwischen den Stammtönen (die auch die Griechen in den letzten Jahrhunderten vor Christus hatten) auch das Bewußtsein für den Unterschied dieser annähernd zusammenstimmenden Töne erwachte. Doch waren zur Zeit der Blüte Griechenlands die Musikinstrumente, verglichen mit den unseren, noch sehr einfach und wirklicher Chromatik nur in bescheidenem Rahmen fähig (nämlich unter Aufgabe der Diatonik, nicht in dieselbe eingeschaltet: waren auf den Zithern die Töne des mittleren Tetrachords in e f fis a gestimmt, so fehlte eben g!). Immerhin aber mag den Griechen wohl zu Bewußtsein gekommen sein, daß die durch Erhöhungen bewirkten Umstimmungen der dorischen (Grund-)Skala andere Tonwerte einführten als die durch Erniedrigungen bewirkten (vgl. Katechismus „Musikgeschichte" § 115), wie ja tatsächlich ihre Notierung dieselben streng unterschied (das Tonsystem der Griechen war 21 stufig, aber mit Identifikation der enharmonisch zusammenfallenden äußersten Tonarten hoch mixolydisch [6 ♯ oder 6 ♭] und tief hypolydisch [7 ♭ oder 5 ♯]. Instrumente, die z. B. cis neben des hätten geben können, hatte man nicht nötig, da man — soviel wir wenigstens wissen — stets nur die einer bestimmten Tonart angehörigen Töne brauchte, mit Möglichkeit der Modulation zur Subdominante durch die Trite synemmenon, oder aber mit den chromatischen oder enharmonischen engen Intervallen über der Hypate des dorischen Tetrachords. Der Gedanke einer Temperatur, d. h. einer Ersetzung der 21 Werte (7 Stammtöne, 7 erhöhte und 7 erniedrigte) durch 12 Mittelwerte konnte daher den Griechen noch gar nicht kommen.

Die älteste bekannte Temperatur — wenn wir von den Chinesen, die freilich sogar die zwölfstufige seit Urzeiten haben sollen, absehen — finden wir bei den Arabern bzw. Persern, denselben, welche zuerst die Terz theoretisch als Konsonanz begriffen (vgl. S. 12). Die arabisch-persische Temperatur — es handelte sich um die Bestimmung der Abstände der Bünde der Laute, also um eine wirkliche Festlegung der Werte auf einem Instrument mit teilweise gebundener Intonation — war für eine siebzehnstufige; man stimmte nämlich (natürlich in Quinten und Quarten hin- und hergehend) folgende Töne (in pythagoräischer Weise) rein:

h — e — a — d — g — c — f — b — es — as — des — ges — ces — fes — heses — eses — asas

und hatte damit nicht nur 16 reine Quinten, sondern auch 9 reine Terzen, da die 8. Unterquint fast genau der großen Oberterz entspricht, nämlich z. B. (von c aus) nach unsern Tabellen in Logarithmen auf Basis 10:

fes = 0,0964199 (= 8. Unterquint) } Differenz = 0,0004901
für e = 0,0969100 (= Oberterz) } (etwa $^1/_{100}$ Ton).

Die reinen Terzen sind h $\underline{\text{dis}}$ (es), e $\underline{\text{gis}}$ (as), a $\underline{\text{cis}}$ (des), d $\underline{\text{fis}}$ (ges), g $\underline{\text{h}}$ (ces), c $\underline{\text{e}}$ (fes), f $\underline{\text{a}}$ (heses), b $\underline{\text{d}}$ (eses), es $\underline{\text{g}}$ (asas); man hatte also von der Mitte (G-dur bzw. E-moll) aus einen Spielraum von je vier reinen Harmonien nach beiden Seiten:

es$^+$ — b$^+$ — f$^+$ — c$^+$ <— g$^+$ —> d$^+$ — a$^+$ — e$^+$ — h$^+$

oder:

^{0}g — ^{0}d — ^{0}a — ^{0}e <— ^{0}h —> ^{0}fis — ^{0}cis — ^{0}gis — ^{0}dis.

Darüber hinaus freilich hörten nach beiden Seiten die reinen Terzen auf, und man war genötigt, sich mit den pythagoräischen zu begnügen (as c, des f, ges b, ces es, fes as, heses des, eses ges, asas ces). Man beachte aber wohl, daß es hierbei auf einen geschlossenen Ring überhaupt nicht abgesehen war und nicht abgesehen sein konnte, sondern nur um freie Bewegung von einer Mitte aus nach zwei Seiten hin. Die hatte man gewiß zur Genüge.

Die Indier teilen theoretisch seit langer Zeit die Oktave in 22 Teile, was ebenfalls gute Resultate ergibt, besonders für die Terzen. Natürlich ist das so zu verstehen, daß das Griffbrett (etwa der Vina) den Abstand eines Tones von seiner Oktave durch Bünde in 22 gleiche Teile zerlegte, also z. B. von der ganzen Saite ($=\frac{44}{44}$) bis zur Hälfte ($\frac{22}{44}$) in 22 Stufen, deren jede $^1/_{44}$ der ganzen bzw. $^1/_{22}$ der halben

Saite kürzer war als der vorausgehende. Die dadurch gefundenen Werte sind in gemeinen Logarithmen (auf Basis 10):

(ganze Saite)	= 0,00000000	(= c)
1.	= 0,0099842	
2.	= 0,0202034	(= $\underline{\text{cis}}$ — 0,0031)
3.	= 0,0306688	(= $\overline{\text{des}}$ — 0,0026)
4.	= 0,0413927	
5.	= 0,0523881	(= d + 0,0012)
6.	= 0,0636691	
7.	= 0,0752510	(= $\overline{\text{es}}$ — 0,0019)
8.	= 0,0871502	
9.	= 0,0993947	(= e + 0,0024)
10.	= 0,1119738	
11.	= 0,1249388	(= f ganz rein!)
12.	= 0,1383027	
13.	= 0,1521910	(= $\overline{\text{ges}}$ — 0,00077 bzw. $\underline{\text{fis}}$ + 0,0041)
14.	= 0,1663314	
15.	= 0,1810547	(= g + 0,004963)
16.	= 0,19629947	
17.	= 0,210889	(= $\overline{\text{as}}$ + 0,0067)
18.	= 0,2285794	(= $\underline{\text{a}}$ — 0,0067)
19.	= 0,2455127	(= $\underline{\underline{\text{ais}}}$ + 0,0001 bzw. b — 0,0043)
20.	= 0,2632415	(= b + 0,0080)
21.	= 0,2817249	(= $\underline{\text{h}}$ + 0,0087)
22. (halbe Saite)	= 0,3010300	(= c′).

Wie man sieht, sind die resultierenden Werte nicht übel (freilich ist die Verstimmung der Quinte um $^1/_{10}$ Ganzton doch ziemlich erheblich.) Das System ist aber ein für einen Oktavumfang festliegendes, nur von c aus gute Werte ergebendes; z. B. ist die Quarte von d (5) nicht wie die von c rein, sondern (vgl. 14 und 15) um $^1/_6$ Ton zu tief oder $^1/_{10}$ Ton zu hoch. Man müßte, um von andern Tönen aus gute Werte zu erhalten, wieder deren Abstand von der Oktave in 22 gleiche Teile zerlegen, was natürlich in der Praxis undurchführbar ist. Die im Katechismus „Musikgeschichte" § 113 mitgeteilten Werte in Logarithmen auf Basis 2 ergeben sich, wenn man eine Teilung der Oktave in 22 gleiche Tonabstände für das indische System annimmt, die nur leider praktisch erst recht nicht durchführbar ist, da dem Ohr jeder Maßstab für die 22stel-Oktave fehlt. Immerhin muß aus obiger Aufweisung geschlossen werden, daß die Inder eine brauchbare diatonische Skala mit guten chromatischen Zwischenwerten besaßen, die als ungleichschwebend temperiert bezeichnet werden kann.

Die erste vollbewußte Aufstellung einer wirklichen Temperatur behufs Gewinnung brauchbarer Quinten und Terzen trotz Beschränkung auf eine kleine Anzahl von praktisch zur Verwendung kommenden Tonwerten gibt Arnold Schlick in seinem „Spiegel der Orgelmacher und Organisten" (1511). Derselbe ist bereits völlig vertraut mit dem Tonhöhen-Unterschiede der reinen Terz und der vierten Quint*) und wünscht die ihm unentbehrlich scheinenden reinen Terzen der wichtigsten Töne behufs Herstellung guter Zusammenklänge zu gewinnen durch geringe Verstimmung der Quinten, derart, daß er den Unterschied (das didymische Komma 80 : 81) auf vier Quinten verteilt, so daß also die Terz c : e dadurch rein wird, daß die Quinten c : g, g : d, d : a, und a : e je um ein Viertel Komma zu klein gestimmt werden. Drücken wir Schlicks Idee genau in Logarithmen auf Basis 2 aus, so sind seine Tonwerte: c, g — 0,00448 (= 1/4 Komma), d — 0,00896 (= 1/2 Komma), a — 0,01344 (= 3/4 Komma), $\underline{\text{e}}$ (rein), $\underline{\text{h}}$ — 0,00448, $\underline{\text{fis}}$ — 0,00896, $\underline{\text{cis}}$ — 0,01344; f + 0,00448, b + 0,00896, es + 0,01344. Fügt man oben oder unten eine weitere um 1/4 Komma verengte Quinte an, so erhält man $\underline{\underline{\text{gis}}}$ oder $\overline{\text{as}}$, die, wie wir aus der Haupt-

*) Der erste Theoretiker, welcher die Notwendigkeit einer Temperatur betonte, war der Spanier Bartolomeo Ramis (De musica tractatus, 1482). Derselbe stellte bereits die heute gültigen Intervalle der Durskala (c d $\underline{\text{e}}$ f g $\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{h}}$ c) fest und forderte für die Terz die Schwingungszahl 4 : 5, deren Differenz gegen die vierte Quinte (64 : 81) durch Temperatur ausgeglichen werden müsse. Die damit angeregte Streitfrage fand erst durch Zarlino endlich ihren Abschluß.

tabelle ersehen, um 0,03420, d. h. um fast zwei Komma gegen einander differieren. Da aber Schlick nicht beide nebeneinander haben kann (es handelt sich für ihn bereits um ein nur zwölfstufiges System als Ersatz für ein nicht zu habendes reicheres, so verlangt er für beide einen Mittelwert, der die Differenz auf zwei Quinten verteilt, also gis + 0,01710 oder was dasselbe ist as — 0,01710 (dieser aus Not gewählte schlechte letzte Mittelwert ist der berüchtigte „Wolf" der alten Temperaturen.) Schlicks Werte sind also in Logarithmen auf Basis 2:

c	= 0,00000
cis***	= 0,06336
d**	= 0,16096
***es	= 0,25853
e	= 0,32192 (rein)
*f	= 0,41951
fis**	= 0,48288
g*	= 0,58048
†as, gis†	= 0,66094
a***	= 0,74144
**b	= 0,83902
h*	= 0,90240

Die Hauptschwäche dieser Temperatur sind die beiden zu großen „Wolfquinten" cis*** : gis† und †as : ***es (= 0,59758 um 0,01262 zu groß); alle übrigen Quinten differieren nur um 0,00448 (= $^1/_{40}$ Ganzton) gegen die absolute Reinheit (die der gleichschwebenden zwölfstufigen Temperatur differieren dagegen nur um 0,00163); die Terzen ***es : g*, **b : d**, *f : a***, c e, g* : h*, d** : fis**, a*** : cis*** sind absolut rein. †as : c und e : gis† sind = 0,33906 (um 0,01714 zu groß), h* : ***es, fis** : **b und cis*** : *f sind gar = 0,35614 (um 0,03422 zu groß). Brauchbar sind also nur die Durakkorde auf es, b, f, c, g, d, a und die terzverwandten Mollakkorde (°g, °d, °a, °e, °h, °fis, °cis). Der damalige Stand des Transpositionswesens konnte sich aber mit diesem Material wohl genügen lassen; man konnte damit nicht nur in sämtlichen Kirchentönen, sondern auch deren Transpositionen in die Unter- und Oberquinte, ja in die zweite Unter- und Oberquinte, mit befriedigender Reinheit der Harmonie sich bewegen (das gis freilich fehlte doch wohl empfindlich in den äolischen Kadenzen).

Die gänzliche Unbrauchbarkeit der beiden Wolfquinten und der Terzen †as : c und e : gis† führte die nächste Folgezeit dazu, den letzten Ton der Reihe lieber ganz rein als gis zu stimmen (Pietro Aron [1523], Lodovigo Fogliani [1529]). Man gewann dadurch zugleich noch die Quint cis*** : gis, ohne eben viel zu verlieren (die Quint gis : *es = 0,61466 war nun freilich gar um 0,02974 = $^1/_6$ Ton zu groß und die Terz gis : c = 0,35653 um 0,03461 = fast $^1/_5$ Ton zu groß, also gar nicht mehr zu brauchen. Diese Art der Temperatur wird von den Engländern die mitteltönige genannt (meantone temperament), weil der Wert des Ganztones derselben (0,16096) zwischen dem großen und kleinen Ganztone der reinen Stimmung genau die Mitte hält:

reiner gr. Ganzton	= 0,16992	d**	= 0,16096
d**	= 0,16096	r. kl. Ganzton	= 0,15200
Differenz:	0,00896	Differenz:	0,00896

(vgl. J. Ellis „On the history of musical pitch“ 1881).

Eine andere ebenfalls schon Zarlino bekannte, also in die erste Hälfte des 16. Jahrhunderts gehörige Art der Temperatur erreicht auf einem andern Wege ähnliche Werte, nämlich durch Stimmen reiner kleinen Terzen (das Stimmen nach reinen kleinen Terzen kann auf der Orgel mit Hilfe der Kombinationstöne sehr leicht durchgeführt werden, da z. B. e′ : g′ rein ist, wenn der Kombinationston C deutlich hörbar ist). Stimmt man nun z. B. a : c′ als reine kleine Terz (6 : 5) und temperiert die dazwischen liegenden drei Quinten (c — g — d — a) gleichmäßig, so verteilt man das Komma, um welches drei Quinten größer sein würden als eine kleine

Terz (immer wieder das syntonische 80 : 81, in Logarithmen auf Basis 2 = 0,01792) auf diese drei Quinten, d. h. jede Quinte wird um 0,00597 zu klein:

$$
\begin{aligned}
&c && = 0{,}00000 \\
&g^* && = 0{,}58492 - 0{,}00597 = 0{,}57695 \\
&d^{**} && = 0{,}16992 - 0{,}01194 = 0{,}15798 \\
&\underline{a} && = 0{,}75488 - 0{,}01792 = 0{,}73696 \text{ rein} \\
&\underline{e}^* && = 0{,}32192 - 0{,}00597 = 0{,}31595 \\
&\underline{h}^{**} && = 0{,}90689 - 0{,}01194 = 0{,}89495 \\
&\underline{\underline{fis}} && = 0{,}49185 - 0{,}01792 = 0{,}47393 \text{ rein} \\
&\underline{\underline{cis}}^* && = 0{,}05889 - 0{,}00597 = 0{,}05292 \\
&{}^*f && = 0{,}41504 + 0{,}00597 = 0{,}40907 \\
&{}^{**}b && = 0{,}83007 + 0{,}01194 = 0{,}84201 \\
&\overline{es} && = 0{,}26303 + 0{,}01792 = 0{,}26303 \text{ rein} \\
&{}^*\overline{as} && = 0{,}67807 + 0{,}00597 = 0{,}68404
\end{aligned}
$$

Hier sind $^*f : {}^*\overline{as}$, $c : \overline{es}$, $g^* : {}^{**}b$, $d^{**} : {}^*f$, $\underline{a} : c$, $\underline{e}^* : g^*$, $\underline{h}^{**} : d^{**}$, $\underline{\underline{fis}} : \underline{a}$ und $\underline{\underline{cis}}^* : \underline{e}^*$ neun reine Terzen; die Quinten von $^*\overline{as}$ aufwärts bis $\underline{\underline{cis}}^*$ sind sämtlich = 0,57695, d. h. um 0,00597 zu klein (etwa $^1/_{30}$ Ganzton), der „Wolf" ist die Quinte $\underline{\underline{cis}}^* : \overline{as}^*$ = 0,63112 (um nicht weniger als 0,04616, d. h. $^1/_4$ Ton zu groß!); die großen Terzen $\overline{as}^* : c$, $\overline{es} : g^*$, $^{**}b : d^{**}$, $^*f : \underline{a}$, $c : \underline{e}^*$, $g^* : \underline{h}^{**}$, $d^{**} : \underline{\underline{fis}}$, $\underline{a} : \underline{\underline{cis}}^*$, sind = 0,31595, d. h. um $^1/_3$ Komma (= 0,00597 = $^1/_{30}$ Ganzton) zu klein; schlecht sind die großen Terzen $\underline{e}^* : {}^*\overline{as}$, $\underline{h}^{**} : es$, $\underline{\underline{cis}} : {}^{**}b$ und $\underline{\underline{cis}}^* : {}^*f$ = 0,36909 ($^1/_4$ Ton zu groß) und die kleinen Terzen $^{**}b : \underline{\underline{cis}}^*$, $\overline{es} : \underline{\underline{fis}}$ und $^*\overline{as} : \underline{h}^{**}$ = 0,21089 ($^1/_4$ Ton zu klein). Die Ganztöne dieser Temperatur sind = 0,15798, d. h. stehen dem kleinen Ganztone (0,152004) nahe, so daß der Name „mitteltönig" für diese Temperatur nicht zur Anwendung kommen konnte. Bedenkt man das beschränkte Modulationswesen der Zeit, so kann man begreifen, daß auch diese Temperatur als allenfalls brauchbar gelten konnte; die mitteltönige Temperatur verdient aber wegen der wesentlich reineren Quinten den Vorzug, auch ist nicht recht einzusehen, warum die großen Terzen gegen die kleinen zurücktreten. Die mitteltönige Temperatur, welche bis ins 18. Jahrhundert, d. h. bis lange nach Aufkommen der gleichschwebenden Temperatur sich in Gunst erhielt und in Spanien noch heute nicht verschwunden sein soll, wurde 1577 von Francisco Salinas endgültig aufgezeigt und begründet, ist aber wie gesagt schon bei Arnold Schlick ziemlich klar entwickelt.

Der erste Theoretiker, der den Widerspruch vollständig begriff, der darin liegt, wenn eine Temperatur eine Kategorie von Intervallen zuungunsten der übrigen bevorzugt, ist Josesso Zarlino (Istitutioni harmoniche, 1558). Derselbe stellte daher die Forderung auf, man solle jede Quinte um $^2/_7$ eines didymischen Kommas (d. h. etwa $^1/_{30}$ Ton) zu eng stimmen; dann wird die vierte Quinte zur um $^1/_7$ Komma verkürzten Terz ($e^{-8/7} = \underline{e}^{-1/7}$):

$$
\begin{aligned}
c \quad &= 0{,}00000\\
g^{-2/7} &= 0{,}58496 - 0{,}00512 = 0{,}57984\\
d^{-4/7} &= 0{,}16992 - 0{,}01024 = 0{,}15978\\
a^{-6/7} &= 0{,}75488 - 0{,}01536 = 0{,}73952\\
\underline{e}^{-1/7} &= 0{,}32192 - 0{,}00256 = 0{,}31936\\
\underline{h}^{-3/7} &= 0{,}90689 - 0{,}00768 = 0{,}89921\\
\underline{fis}^{-5/7} &= 0{,}49185 - 0{,}01280 = 0{,}47905\\
\underline{\underline{cis}} \quad &= 0{,}05889 \text{ rein!}\\
[\underline{\underline{gis}}^{-2/7} &= 0{,}64385 - 0{,}00512 = 0{,}63873]\\
f^{+2/7} &= 0{,}41503 + 0{,}00512 = 0{,}42015\\
b^{+4/7} &= 0{,}83007 + 0{,}01024 = 0{,}84031\\
es^{+6/7} &= 0{,}24511 + 0{,}01536 = 0{,}26047\\
as^{+1/7} &= 0{,}67807 + 0{,}00256 = 0{,}06863
\end{aligned}
$$

Wir sehen, auch Zarlinos Temperatur fehlte der Wolf nicht ($\underline{\underline{cis}} : \underline{as}^{+1/7}$ oder $\underline{\underline{gis}}^{-2/7} : es^{+6/7} = 0{,}62174$, d. h. um 0,03678 $= {}^1/_5$ Ton zu groß); im übrigen sind die Werte sämtlich akzeptable, die Quinten zwar etwas unreiner als in der mitteltönigen Temperatur, dafür aber auch nicht durch reine große oder kleine Terzen bloßgestellt; die großen Terzen sind nur $^1/_{70}$ Ganzton zu klein, die kleinen Terzen um $^1/_{50}$ Ganzton zu klein, der Ganzton ist gegen den großen Ganzton um $^1/_{16}$ Ton zu klein, etwas größer als der kleine. Wenn trotz dieser guten Seiten Zarlinos Temperatur gegen die mitteltönige nicht aufkommen konnte, so liegt der Grund leichtverständlicherweise darin, daß es für ihre Durchführung durchaus an akustischen Hilfsmitteln fehlte. Weder reine große noch reine kleine Terzen noch reine Quinten, nur reine Halbtöne der Stimmung 24 : 25, für welche die Kombinationstöne kaum mehr Hilfe leisten können, sind darin zu finden. Es bleibt daher als einziges Hilfsmittel für die Herstellung einer solchen Temperatur das Abzählen der Schwebungen (worüber weiterhin); sobald man aber erst dieses Mittel zu handhaben versteht, liegt die Durchführung einer wirklich gleichschwebenden Temperatur nahe genug, um definitiv auf den Wolf verzichten zu können. In der Tat sind denn nun auch die nächsten Temperaturversuche, die unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen, Annäherungen an die wirklich gleichschwebende Temperatur. Es sind das die Temperaturen von Andreas Werckmeister und J. G. Neidhardt. Werckmeister, den Meckenhäuser den „ersten Eisbrecher der gleichen Temperatur" nennt, fordert in seiner Schrift „Musikalische Temperatur" (1691) die Verteilung des pythagoräischen (!) Kommas auf vier der zwölf Quinten des Zirkels, nämlich auf:

c g, g d, d a und h fis,

so daß jede von diesen um $^1/_4$ Komma zu klein ist, alle übrigen dagegen rein. Diese Temperatur ist allerdings auch nicht radikal gleichschwebend, da sie eine größere Zahl reiner Quinten (a e, e h, fis cis, cis gis, gis dis, es b, b f) enthält, hat aber den Vorzug leichter Durchführbarkeit, sobald man die Schwebungen zu Hilfe nimmt (was Werckmeister vorausgesetzt). Schwebungen sind die wogenden oder besser stoßweisen Verstärkungen, welche der Klang erfährt, wenn zwei nicht ganz genau zusammen stimmende Töne zusammen hervorgebracht werden. Macht z. B. ein Ton in der Sekunde 420 Schwingungen und der andere in derselben Zeit 421, so wird das Maximum der Stärke jeder 420. Schwingung des einen Tones mit dem der 421. des andern zusammenfallen und als Stoß empfunden werden, d. h. in jeder Sekunde wird man eine solche Schwebung hören. Hat nun weiter das eingestrichene a die Schwingungszahl 420 (was etwa für Werckmeisters Zeit zutreffend sein mag), so würde die reine Unterquint von a, also d = 280 Schwingungen in der Sekunde machen. Stimmt man das d dagegen unbedeutend zu hoch, so daß es gegen das reine d in der Sekunde eine Schwebung hören läßt, so bildet es gegen das a mit seinen 420 Schwingungen eine etwas zu kleine Quinte 281 : 420. Die Quinte ist also um 281 : 280 zu eng, d. h. um etwa $^1/_4$ des pythagoräischen Kommas (log auf Basis 2 von 281 : 280 = 0,00444; $^1/_4$ pythagoräisches Komma genau: $\frac{0{,}019544}{4} = 0{,}00488$). Will man das Resultat noch genauer haben, so beobachtet man die Schwebungen der Quinte selbst (welche durch die nicht genaue Übereinstimmung des 2. Obertons von a mit dem 3. von d entstehen); das d von 281 Schwingungen hat dann zur Duodezime ein a′ von 843 Schwingungen, während der 2. Oberton des a′ von 420 nur 840 macht, so daß für jede Sekunde drei Schwebungen hörbar werden. Will man nun die Differenz etwas größer, so daß das Resultat genauer wird ($^1/_4$ Komma), so stimmt man d so hoch, daß seine Duodezime 4 Schwebungen in der Sekunde macht.

Die den theoretischen Aufstellungen Werckmeisters entsprechenden Tonwerte sind in Logarithmen auf Basis 2 folgende:

$$
\begin{aligned}
c &= 0{,}0000\\
{}^{*}g &= 0{,}58496 - 0{,}00488 = 0{,}58008\\
{}^{**}d &= 0{,}160164\\
{}^{***}a &= 0{,}74024\\
{}^{***}e &= 0{,}32520\\
{}^{***}h &= 0{,}91017\\
{}^{****}fis\ (= ges) &= 0{,}49024\\
des &= 0{,}07520\\
as &= 0{,}66016
\end{aligned}
$$

es = 0,24512
b = 0,83008
f = 0,41504

d. h. die Quinten sind bis auf die vier sich in das Komma teilenden durchaus rein; die vier um $^1/_4$ Komma (= $^1/_{35}$ Ganzton) zu kleinen fallen aber darum nicht zu sehr auf, weil sie nicht durch reine Terzen bloßgestellt sind. Die Terzen f a, c e sind = 0,32520 (um 0,00328 zu groß), ges b, des f und as c sind pythagoräisch = 0,33994 (um 0,01802 zu groß), es g ist = 0,33506 (um 0,00488 besser als die vorige), b d, g h und d fis sind = 0,33018 (um 0,00976 besser als die pythagoräische, doch immer noch um 0,00816 zu groß), a cis, e gis und h dis sind wieder mit es g gleicher Größe (= 0,33506). Bemerkenswert ist die konsequente Mischung reiner und mehr oder minder abweichender Werte; ein „Wolf" ist nicht mehr vorhanden, und die abliegenden Tonarten sind kaum schlechter — freilich auch nicht besser — als die Grundskala, insofern also wirklich ein bedeutsamer Schritt zur gleichschwebenden Temperatur. Der praktische Zweck der Verteilung der ganzen Kommas auf nur vier Quinten ist wie gesagt nur der der leichteren Durchführbarkeit; denn natürlich ist das Abzählen der Schwebungen, wenn es gewissenhaft geschieht, eine mühsame Sache, und es ist eine Erleichterung, wenn man dasselbe nur bei 4 statt bei 12 Quinten anzuwenden hat. (Es handelt sich natürlich immer nur um die Stimmung der Werte innerhalb einer Oktave; alle andern werden als reine Oktaven dieser eingestimmt.) D. G. Türk begeht in seiner „Anleitung zu Temperaturberechnungen" (1806) den Irrtum, daß er annimmt, Werckmeister wolle das „ditonische" (syntonische, didymische) Komma auf vier Quinten verteilt sehen: das hätte gar keinen Sinn, vielmehr bliebe dann ein heulender Wolf, der durch Werckmeisters Bestimmung vollständig beseitigt ist. Gerade in der Eliminierung des *pythagoräischen* Kommas beruht vielmehr der Fortschritt Werckmeisters.

Der Werckmeisterschen ähnlich, aber glücklicher und einen weiteren Fortschritt zur gleichschwebenden bedeutend, ist die

Temperatur Neidhardts (in der Schrift „Gänzlich erschöpfte mathematische Abteilungen", 1732). Dieselbe teilt das pythagoräische (nicht, wie auch hier Türk mißversteht, das didymische) Komma in zwölf Teile will aber diese noch nicht gleichmäßig auf die 12 Quinten des Zirkels verteilt sehen (vor solcher Forderung schreckte er wohl zurück), sondern läßt c g, g d, d a und a e je um $^1/_6$ Komma zu klein stimmen, e h und h fis, as es und es b um $^1/_{12}$ zu klein und b f, fis cis (des) und f c rein. Die Werte sind in Logarithmen auf Basis 2:

$$
\begin{aligned}
\text{c} &= 0{,}00000\\
{}^{*}\text{g} &= 0{,}58496 - \frac{0{,}01954}{6}\,[= 0{,}00326] = 0{,}58170\\
{}^{**}\text{d} &= 0{,}16340\\
{}^{***}\text{a} &= 0{,}74510\\
{}^{****}\text{e} &= 0{,}32580\\
{}^{****\dagger}\text{h} &= 0{,}90914\\
{}^{****\dagger\dagger}\text{fis} &= 0{,}49247\\
\text{f} &= 0{,}41504\\
\text{b}^{\dagger} &= 0{,}83007\\
\text{es}^{\dagger\dagger} &= 0{,}24674\\
\text{as}^{\dagger\dagger} &= 0{,}66341\\
\text{des}^{\dagger\dagger} &= 0{,}07844\\
\text{ges}^{\dagger\dagger} &= 0{,}49247 = {}^{****\dagger\dagger}\text{fis}.
\end{aligned}
$$

Der Fortschritt gegenüber Werckmeister ist in die Augenspringend; anstatt viel ziemlich schlechter Quinten haben wir vier um $^1/_6$ Komma verstimmte und vier um $^1/_{12}$ Komma verstimmte und nur drei ganz reine. Die Terz c e ist = 0,32580, d. h. um 0,00458 zu groß, g h ist 0,32418 (um 0,00163 besser), d fis = 0,32907 (um 0,00715 zu groß), a cis und e gis sind = 0,33333 (genau entsprechend den Terzen der gleichschwebenden Temperatur), h dis, ges b, des f und as c sind = 0,33760 (nur um 0,00234 kleiner als die pythagoräische Terz), es g, b d und f a endlich kommen mit 0,33822 der pythagoräischen Terz noch näher. Da hier nur drei Quinten nicht temperiert sind, so ist nur noch ein

Schritt zur Forderung gleichmäßiger Temperierung aller 12 Quinten des Zirkels, deren Vernünftigkeit wohl schon länger eingesehen worden ist (Mersenne gibt bereits eine Berechnung ihrer Verhältnisse [„Harmonie universelle“ 1636] und behauptet, aber offenbar nicht mit Recht, daß sie die gebräuchlichste sei. J. S. Bach und Ph. Em. Bach traten zuerst energisch für dieselbe ein; dennoch dauerte es bis in unser Jahrhundert hin, ehe dieselbe allgemein akzeptiert wurde, und es versuchten sich noch eine ganze Reihe Theoretiker mit ungleichschwebenden Temperaturen verschiedener Art. So temperierte der berühmte Orgelbauer Gottfried Silbermann (1683 bis 1753) eine Anzahl Orgeln derart, daß er von es zu gis aufsteigend jede Quinte um $^1/_6$ des pythagoräischen Kommas zu klein stimmte; dadurch blieb für die Quinte gis—es ein Überschuß von $^5/_6$ des pythagoräischen Kommas, d. h. sie wurde = 1,60126, eine um 0,01630 ($^1/_{10}$ Ton) zu große Quinte, der schlimmste Wolf, der in irgendeiner Temperatur vorkommt. Ein Baron von Wiese schlug nach Marpurgs Mitteilung („Neue Methode“ usw., 1779) vor, alle Quinten rein zu stimmen und nur auf h fis und b f das pythagoräische Komma zu verteilen (für jede $^1/_2$ Komma Verkleinerung), wodurch also zwei Wölfe entstanden! Eine andere nach Türk „Anleitung“ usw.) in verschiedenen Büchern zu findende Temperatur (deren Autor nicht genannt ist) bringt gar vier solcher Wölfe, indem sie alle Quinten rein stimmt, nur g d, h fis und b f um etwa ein Komma zu klein und as es um zwei Komma (!) zu groß — die ärgste von allen Verirrungen!

§ 5. Auswahlsysteme (partielle reine Stimmung).

Eine besondere Gruppe bilden diejenigen Temperaturen, welche anstatt einer Ausgleichung der Differenzen zwischen den zwölften Quinten und den Oktaven oder zwischen den vierten Quinten und den Terzen, also statt die Beseitigung des pythagoräischen oder didymischen Kommas anzustreben, vielmehr eine kleine Anzahl rein gestimmter Werte hinstellen, welche zugleich alle andern mit vertreten sollen. Systeme dieser Art sind natürlich überhaupt eigentlich **keine Temperaturen.** Wir beginnen mit denjenigen, welche gewöhnlich für Temperaturen ausgegeben worden sind, nämlich den nur zwölfstufigen, deren besonders das vorige Jahrhundert eine größere Anzahl aufweist. Die folgende soll von **Kepler** herrühren, also aus dem 17. Jahrhundert stammen:

$$\text{c},\ \underline{\text{cis}},\ \text{d},\ \overline{\text{es}},\ \underline{\text{e}},\ \text{f},\ \underline{\text{fis}},\ \text{g},\ \underline{\text{gis}},\ \text{a},\ \overline{\text{b}},\ \text{h},\ \text{c}'$$

(vgl. dazu unsere große Schlußtabelle, welche die Quotienten, Logarithmen usw. aufweist). Hier sind reine Quintenreihen, f : c : g : d : a, ferner $\underline{\text{e}} : \underline{\text{h}} : \underline{\text{fis}} : \underline{\text{cis}} : \underline{\text{gis}}$ und $\overline{\text{es}} : \overline{\text{b}}$; dafür ist aber a : $\underline{\text{e}}$ um ein ganzes syntonisches Komma (0,01792 = $^1/_9$ Ganzton) zu klein und $\underline{\text{gis}} : \overline{\text{es}}$ ist = 0,60126 (um 0,01630 zu groß). Die Terzen $\overline{\text{es}}$: g, $\overline{\text{b}}$: d, c : $\underline{\text{e}}$, g : $\underline{\text{h}}$, d : $\underline{\text{fis}}$, a : $\underline{\text{cis}}$ sind vollständig rein; f : a und $\underline{\text{e}} : \underline{\text{gis}}$ sind pythagoräische Terzen (um das syntonische Komma zu groß) und $\underline{\text{cis}}$: f und $\underline{\text{gis}}$: c sind gar = 0,33822 (noch um 0,01630 größer als die pythagoräischen Terzen) und $\underline{\text{h}} : \overline{\text{es}}$ und $\underline{\text{fis}} : \overline{\text{b}}$ sind gar = 0,35614 (um 0,03422 = 2 Kommata zu groß). Dieses System gestattet also nur in der nächsten Nähe der Grundskala einigermaßen reine Harmonien (c : $\underline{\text{e}}$: g, g : $\underline{\text{h}}$: d, d : $\underline{\text{fis}}$: a, $\overline{\text{es}}$: g : $\overline{\text{b}}$, c : $\overline{\text{es}}$: g, g : $\overline{\text{b}}$: d, $\underline{\text{e}}$: g : $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{h}}$: d : $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\text{fis}}$: a : $\underline{\text{cis}}$); für C-dur ist aber nicht einmal die Subdominantharmonie gut (f : a : c pythagoräisch), für A-moll fehlt gar eine brauchbare tonische Quinte (a : c : $\underline{\text{e}}$).

Der Mathematiker **Leonhard Euler** („Tentamen novae theoriae musicae", 1729) schlägt folgende Auswahl vor:

$$\text{c},\ \underline{\underline{\text{cis}}},\ \text{d},\ \underline{\underline{\text{dis}}},\ \underline{\text{e}},\ \text{f},\ \underline{\text{fis}},\ \text{g},\ \underline{\underline{\text{gis}}},\ \underline{\text{a}},\ \underline{\underline{\text{ais}}},\ \underline{\text{h}},\ \text{c}'.$$

Darin sind reine Quinten: f : c : g : d, $\underline{\text{e}} : \underline{\text{h}} : \underline{\text{fis}}$ und $\underline{\underline{\text{cis}}} : \underline{\underline{\text{gis}}} : \underline{\underline{\text{dis}}} : \underline{\underline{\text{ais}}}$; dagegen sind d : $\underline{\text{a}}$ und $\underline{\text{fis}} : \underline{\underline{\text{cis}}}$ um ein syntonisches Komma (80 : 81) zu klein und $\underline{\underline{\text{ais}}}$: f ist = 0,60126 (um 0,01630 zu groß). Die Terzen f : $\underline{\text{a}}$, c : $\underline{\text{e}}$, g : $\underline{\text{h}}$, d : $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\text{a}}$: $\underline{\underline{\text{cis}}}$, $\underline{\text{e}}$: $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\text{h}}$: $\underline{\underline{\text{dis}}}$ und $\underline{\text{fis}}$: $\underline{\underline{\text{ais}}}$ sind rein, $\underline{\underline{\text{cis}}}$: f, $\underline{\underline{\text{gis}}}$: c, $\underline{\underline{\text{dis}}}$: g und $\underline{\underline{\text{ais}}}$: d sind = 0,35614 (um 2 Komma zu groß), so daß die Harmonien F-, C-, G-, D-, A-, E-, H-, Fis-Dur und A-, E-, H-, Fis-, Cis-, Dis-Moll rein zu haben sind.

Den meisten Staub hat die Kirnbergersche Temperatur aufgewirbelt, nämlich speziell die seinen Namen tragende (Kirnberger versuchte außerdem mehrere andere Teilungen des pythagoräischen Kommas; vgl. Allgem. Mus.-Ztg. 1871, S. 573), deren Wesen darin besteht, daß er sieben Quinten rein stimmte, nämlich:

des, as, es, b, f, c, g, d,

dann d : $\underline{\text{fis}}$ als reine Terz einfügte und weiter von $\underline{\text{fis}}$ in reinen Quinten rückwärts ging $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{e}}$ und endlich mit Einstimmung des a* als Mittel zwischen a und $\underline{\text{a}}$ schloß, so daß also sowohl d : a* als a* : $\underline{\text{e}}$ um $^1/_2$ syntonisches Komma zu klein wurden. Die sich ergebenden Töne waren also:

c, des, d, es, $\underline{\text{e}}$, f, $\underline{\text{fis}}$, g, as, a*, b, $\underline{\text{h}}$, c';

dadurch entstand vor allem noch eine um ein ganzes syntonisches Komma (0,01792) zu kleine Quinte (fis : des). Hier sind die Terzen c : $\underline{\text{e}}$, d : $\underline{\text{fis}}$ und g : $\underline{\text{h}}$ die einzigen reinen: des : f, as : c, es : g, b : d sind pythagoräische (um 80 : 81 zu groß), f : a* ist um $^1/_2$ syntonisches Komma zu groß (= 0,33088), a* : des ist = 0,32927 (um 0,00736 zu groß) und $\underline{\text{e}}$: as, $\underline{\text{h}}$: dis, fis : $\underline{\text{b}}$ sind = 0,33823 (um 0,01630 zu groß). Gute Harmonien sind nur c : $\underline{\text{e}}$: g, g : $\underline{\text{h}}$: d, $\underline{\text{e}}$: g : $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{h}}$: d : $\underline{\text{fis}}$, so daß kaum zu begreifen ist, wie Kirnbergers unglückliche Rechenexempel ernsthaft gegenüber der mitteltönigen und gar der gleichschwebenden Temperatur in Frage kommen konnten. Was all diesen Versuchen zugrunde liegt, ist der Wunsch, der eigentlichen Temperierung aus dem Wege zu gehen und lieber im engeren Kreise reinere Harmonien zur Verfügung zu haben, als im weitesten unreine. Deshalb versuchte man auch schon früh, auf Tasteninstrumenten (Orgel und Klavier) eine größere Zahl von reinen Werten einzuführen, um trotz reiner Stimmung doch nicht in der Modulation und Tonartenwahl allzu beschränkt zu sein. Man hatte sehr wohl begriffen, daß der reinen Vokalmusik eine Temperierung durchaus fern liegt, und daß auch die Streichinstrumente von ihr nichts wissen, sondern die Tonverhältnisse bringen können, wie das Ohr sie verlangt. So erwähnt denn schon Arnold Schlick (1511) einer vor 1500 erbauten Orgel (Portativ) kleinen mit geteilten Obertasten. Da Schlick bereits die mitteltönige Temperatur kennt (s. oben), so scheint es, daß diese geteilten Obertasten eine Anzahl weiterer reiner Terzen gegeben haben, etwa derart, daß die Quintenreihe der mitteltönigen Temperatur ($\underline{\text{as}}$—$\underline{\underline{\text{gis}}}$) noch auf beiden Seiten einen Zuwachs von zwei um $^1/_4$ des didymischen Kommas verkleinerten Quinten erhielt:

$$\text{**}\underline{\text{ges}},\ \text{*}\underline{\text{des}},\ \underline{\text{as}},\ \text{***es},\ \text{**b},\ \text{*f},\ \text{c},\ \text{g*},\ \text{d**},\ \text{a***},\ \underline{\text{e}},\ \underline{\text{h}}\text{*},$$
$$\underline{\text{fis}}\text{**},\ \underline{\text{cis}}\text{**},\ \underline{\underline{\text{gis}}},\ \underline{\underline{\text{dis}}}\text{*},\ \underline{\underline{\text{ais}}}\text{**}.$$

Dann war der Wolf $\dagger\underline{\text{as}}\simeq\underline{\underline{\text{gis}}}\dagger$ beseitigt, da $\underline{\text{as}}$ ganz rein als Unterterz von c, und $\underline{\underline{\text{gis}}}$ ganz rein als Oberterz von $\underline{\text{e}}$ gestimmt wurde, und man hatte auch die Terzen $\underline{\text{h}}\text{*} : \underline{\underline{\text{dis}}}\text{*}$, $\underline{\text{fis}}\text{**} : \underline{\underline{\text{ais}}}\text{**}$, $\text{**}\underline{\text{ges}} : \text{**b}$ und $\text{*}\underline{\text{des}} : \underline{\text{as}}\text{*}$ rein. Die Werte der somit zu den oben aufgeführten kommenden sechs neuen Töne (wogegen $\dagger\underline{\text{as}}\simeq\underline{\underline{\text{gis}}}\dagger$ wegfällt) sind:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\text{gis}}} &= 0{,}64385\\
\underline{\underline{\text{dis}}}\text{*} &= 0{,}22433\\
\underline{\underline{\text{ais}}}\text{**} &= 0{,}80481\\
\underline{\text{as}} &= 0{,}67807\\
\text{*}\underline{\text{des}} &= 0{,}09758\\
\text{**}\underline{\text{ges}} &= 0{,}51709.
\end{aligned}$$

Auf einem so gestimmten Instrument sind alle Durakkorde von Ges-dur bis zu Fis-dur und alle Mollakkorde von Es-moll bis Dis-moll in befriedigender Reinheit zu haben, wofür in jener Zeit kaum ein Bedürfnis vorhanden war. Für uns heute aber würde es doch nicht genügen, weil die Tonarten mit vielen Kreuzen oder Been öfters eine Vertauschung der enharmonisch einander nahestehenden Werte wie fis und ges, b und ais usw. bedingen würden, also eine wirkliche enharmonische Verwechselung. Ebenso konstruierte Orgeln scheint es im 16. und 17. Jahrhundert mehr gegeben zu haben (Salinas spielte auf einer derartigen zu Florenz, und „Father Smith" (2. Hälfte des 17. Jahrhunderts) baute mehrere dergleichen; vgl. den Artikel „Temperament" in G. Groves „Dictionary of music").

Nicolo Vicentino (1546), der erste der „Chromatiker" (Katechismus „Musikgeschichte" § 134), kam durch das Bestreben, das chromatische und enharmonische Tongeschlecht der Griechen (vgl. S. 10) wieder lebendig zu machen, zur Konstruktion einer noch viel komplizierteren Klaviatur für sein „Archicembalo", welches die Oktave in 31 gleiche Diesen zerlegte, von denen fünf einen Ganzton und drei einen Halbton ausmachen sollten. Die 32 Werte dieser Oktaventeilung sind in Logarithmen auf Basis 2:

1. 0,0000 = c.
2. 0,0322 (annähernd die kleine Diesis deses)
3. 0,0645 („ das kleine Chroma cis)
4. 0,096 („ der Leittonschritt des)
5. 0,1290 („ cisis)
6. 0,1613 Ganzton (mitteltönig)
7. 0,1935 (annähernd eses)
8. 0,2298 („ dis)
9. 0,2581 („ es)
10. 0,2903 („ disis)
11. 0,3226 („ e)

12. 0,35490 (annähernd fes)
13. 0,38716 („ eis)
14. 0,41942 („ f)
15. 0,45168 („ geses)
16. 0,48394 („ fis)
17. 0,51620 („ ges)
18. 0,54846 („ fisis)
19. 0,5809 („ g)
20. 0,6131 („ asas)
21. 0,6452 („ gis)
22. 0,6775 („ as)
23. 0,7098 („ gisis)
24. 0,7420 („ a)
25. 0,7743 („ heses)
26. 0,8065 („ ais)
27. 0,8388 („ b)
28. 0,8711 („ aisis)
29. 0,9033 („ h)
30. 0,9356 („ ces)
31. 0,9678 („ his)
32. 1,0000 (= c′).

Tatsächlich ist diese Temperatur eine gleichschwebende 31stufige. Die Werte sind keineswegs alle gleich gut und halten denen der zwölfstufigen gleichschwebenden Temperatur nicht die Wage; die Terzen sind zwar besser als in dieser, dafür aber die Quinten schlechter (um 0,004, d. h. fast ein Viertel Komma zu klein). Über die Anlage der Klaviatur

Vincentinos und seiner Nachfolger Galeazzo Sabbatini und Vito Trasuntino gibt ein erhaltenes Instrument des letzteren („Clavemusicum omnitonium“ von 1606, im städtischen Museum zu Bologna) Aufschluß. Dasselbe hat die Untertastenreihe in der gewöhnlichen Art, teilt aber jede Obertaste nach hinten in vier kurze Teile und schiebt zwischen e f und h c eine kurze zweiteilige Obertaste ein.

Ein wirkliches Auswahlsystem ist dagegen das des Zarlino („Istitutioni harmoniche“ II, 47) mit nur 17 Stufen, nämlich:

c, $\underline{\underline{\text{cis}}}$, $\underline{\text{d}}$, d, es, $\overline{\text{es}}$, $\underline{\text{e}}$, f, $\underline{\underline{\text{fis}}}$, $\underline{\text{fis}}$, g, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\text{a}}$, $\overline{\text{b}}$, b, $\underline{\text{h}}$, c′.

Die Vorzüge solcher Auswahlsysteme hoben wir schon hervor, nämlich die leichte Durchführbarkeit des Abstimmens der gewählten Intervalle direkt nach den Forderungen des Ohrs. Einer Aufführung der logarithmischen Werte dieses Systems bedarf es nicht, da dieselben aus der Haupttabelle zu ersehen sind. Wir haben nur zu prüfen, wie es um deren Fähigkeit der Vertretung der fehlenden steht. Dasselbe enthält die reinen Quintenreihen: es b f c g d, d $\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{e}}$ $\underline{\text{h}}$, $\underline{\underline{\text{fis}}}$ $\underline{\underline{\text{cis}}}$ $\underline{\underline{\text{gis}}}$ und $\underline{\text{es}}$ $\underline{\text{b}}$; ihnen stehen gegenüber die um das ganze syntonische Komma verstimmten Quinten $\underline{\text{h}}$ $\underline{\underline{\text{fis}}}$ und d $\underline{\text{a}}$, von denen aber die zweite jederzeit durch Vertauschung von d mit $\underline{\text{d}}$ in eine reine verwandelt werden konnte, sowie ferner die Quinte $\underline{\underline{\text{gis}}} : \overline{\text{es}} = 0{,}61916$, ein böser Wolf (um 0,03420 = 2 Komma zu groß), d. h. auch Zarlino rechnet damit, daß diese Quinte nie gebraucht wird. Reine Terzen sind: $\overline{\text{es}}$ g, $\overline{\text{b}}$ d, f $\underline{\text{a}}$, c $\underline{\text{e}}$, g $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{d}}$ $\underline{\underline{\text{fis}}}$, $\underline{\text{a}}$ $\underline{\underline{\text{cis}}}$, $\underline{\text{e}}$ $\underline{\underline{\text{gis}}}$; dagegen sind $\underline{\text{h}} : \overline{\text{es}}$, $\underline{\underline{\text{fis}}} : \text{b}$, $\underline{\underline{\text{cis}}} : \text{f}$ und $\underline{\underline{\text{gis}}} : \text{c} = 0{,}35614$ (fast um 2 Komma zu groß) und $\underline{\underline{\text{fis}}} : \overline{\text{b}}$ ist auch noch fast ein Komma zu groß. Reine Harmonien sind der $\overline{\text{Es}}$-, B-, F-, C-, G-, $\underline{\text{D}}$-, A-, E-Dur-Akkord und der C-, G-, $\underline{\text{D}}$-, $\underline{\text{A}}$-, $\underline{\text{E}}$-, $\underline{\underline{\text{Fis}}}$-, $\underline{\underline{\text{Cis}}}$-Moll-Akkord. Höheren Anforderungen genügt also auch dieses System nicht. Zarlinos Klaviatur teilt die Obertasten $\overset{\frown}{\text{Dis Es}}$, $\overset{\frown}{\text{Fis Ges}}$ und $\overset{\frown}{\text{Ais B}}$ derart, daß deren zurückliegende Hälfte etwas erhöht ist, und ebenso ist die Taste D für d und $\underline{\text{d}}$ geteilt.

Michael Prätorius (Syntagma musicum 1619, II, S. 63) erwähnt ein von Elsaß in Wien um 1590 gebautes „Universalklavicymbal", das nicht nur „alle Semitonia als b, cis, es, fis, gis durch und durch duplieret", sondern auch zwischen e und f, h und c je eine Taste eingeschoben hatte, so daß es bis zur Oktave 19 Stufen hatte. Leider wissen wir deren Stimmung nicht genauer; es könnten etwa die Töne c, $\underline{\text{cis}}$, $\overline{\text{des}}$, d, $\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\overline{\text{es}}$, $\underline{\text{e}}$, $\underline{\underline{\text{eis}}}$, f, $\underline{\text{fis}}$, $\overline{\text{ges}}$, g, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\overline{\text{as}}$, a, $\underline{\underline{\text{ais}}}$ b, h, c gewesen sein, d. h. eine Zusammenstellung, welche für die einfachsten Transpositionen der Grundskala gute Resultate ergab. Die Klaviatur konnte übrigens mittels einer mechanischen Vorrichtung so verschoben werden, daß c die Stimmung $\underline{\text{cis}}$, $\overline{\text{des}}$, d, $\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\overline{\text{es}}$ oder $\underline{\text{e}}$ hatte — dann aber stand es, wenn nicht vielleicht doch eine wirkliche Temperatur vorlag (etwa wie die oben für Schlicks Positiv angenommene), schlecht um die durch die Transposition gewonnenen Tonarten. Ich gebe die Stimmung der diatonischen Skalen:

c, d, $\underline{\text{e}}$, f, g, $\underline{\text{a}}$, $\underline{\text{h}}$, c (rein)
$\overline{\text{des}}$, $\overline{\text{es}}$, f, $\overline{\text{ges}}$, $\overline{\text{a}}$, b, c, $\overline{\text{des}}$ (rein)
$\underline{\text{cis}}$, $\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\underline{\underline{\text{eis}}}$, $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\underline{\text{ais}}}$, c, $\underline{\text{cis}}$, ($\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, c falsch)
d, $\underline{\text{e}}$, $\underline{\text{fis}}$, g, $\underline{\text{a}}$, $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{cis}}$, d ($\underline{\text{e}}$, $\underline{\text{a}}$ falsch)
$\overline{\text{es}}$, f, g, $\overline{\text{as}}$, b, c, d, $\overline{\text{es}}$ (f, b falsch)
$\underline{\text{e}}$, $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\text{a}}$, $\underline{\text{h}}$, $\underline{\text{cis}}$, $\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\underline{\text{e}}$ (cis falsch)

Wollte man $\underline{\underline{\text{cis}}}$ statt $\underline{\text{cis}}$, $\underline{\underline{\text{fis}}}$ statt $\underline{\text{fis}}$, oder $\underline{\text{dis}}$ statt $\underline{\underline{\text{dis}}}$ und $\underline{\underline{\text{gis}}}$ statt $\underline{\underline{\text{gis}}}$ wählen, so wäre damit nichts geholfen.

Übrigens kam man schon früh auf die Idee, anstatt einer Vermehrung der Tastenzahl eine Vorrichtung zum Um-stimmen einzelner Tasten mittels Hebel (natürlich durch alle Oktaven zugleich, wie bei der Pedalharfe) anzubringen. Solche hatten z. B. die oben erwähnten Orgeln des „Vater Smith", sowie ein von Robert Smith („Harmonics" usw., Cambridge 1759) beschriebenes Harpsichord mit doppeltem Saitenbezug, das vermittels sechs Hebel (einen für je zwei eine Quinte voneinander abstehende Töne) alle Töne um eine Diesis verschieben konnte. Die Hauptbesaitung hatte die mitteltönige Temperatur (s. oben): die Umstimmung stellte also etwa folgende weiteren Werte zur Verfügung:

Hauptstimmung		Umstimmung
***es	. . .	dis*
**b	. . .	ais**
*f	. . .	eis***
c	. . .	his
g*	. . .	fisis*
d**	. . .	cisis**
a***	. . .	*heses
e	. . .	fes
h*	. .	***ces
fis**	. . .	**ges
cis***	. . .	*des
gis	. . .	as

Damit wäre eine Kette von nicht weniger als 23 völlig gleich temperierten (um $^1/_4$ des syntonischen Kommas zu kleinen) Quinten mit 20 absolut reinen Terzen gewonnen gewesen und der Wolf zwischen cisis** und *heses hinausgerückt (= 0,63548). War die Stimmungsweise wirklich die hier angenommene, so verdient die Anlage höchste Anerkennung.

Noch weiter — wenn auch nicht so weit wie Vincentino, Sabbatini und Trasuntino, deren Klaviaturen aber nicht dem praktischen Bedürfnis des Ohrs, sondern historisierender theoretischer Spekulation ihre Entstehung verdankten, ging M. Mersenne („Harmonie universelle“ 1636), der Zarlinos Auswahlsystem in umsichtiger Weise erweiterte. Sein 31stufiges Klavier mag mit dem 31stufigen Archicembalo Vincentinos in der Hauptsache übereingekommen sein; wichtiger ist ein 26stufiges mit den Tonwerten:

$$
\begin{array}{cc|cc|cc|ccc|cc|cc|c}
 & \overline{\text{des}} & & \underline{\underline{\text{dis}}} & \overline{\text{es}} & & & \underline{\text{fis}} & \overline{\overline{\text{ges}}} & & \overline{\text{as}} & & \underline{\underline{\text{ais}}} & \overline{\text{b}} & \\
\underline{\underline{\text{cis}}} & & \text{d} & & \text{es} & \underline{\underline{\underline{\text{eis}}}} & \underline{\underline{\text{fis}}} & \overline{\text{ges}} & & \underline{\text{g}} & \underline{\text{gis}} & & \underline{\underline{\underline{\text{ais}}}} & \text{b} & \underline{\underline{\text{his}}} \\
\text{c} & & \underline{\text{d}} & & & \underline{\text{e}} & \text{f} & & & \text{g} & & \underline{\text{a}} & & \underline{\text{h}} & \text{c}'.
\end{array}
$$

Die reinen Quintenreihen sind:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \overline{\text{ges}} & \overline{\text{des}} & \overline{\text{as}} & \overline{\text{es}} & \overline{\text{b}} \\
\text{es} & \text{b} & \text{f} & \text{c} & \text{g} & \text{d} \\
\underline{\text{g}} & \underline{\text{d}} & \underline{\text{a}} & \underline{\text{e}} & \underline{\text{h}} & \underline{\underline{\text{fis}}} \\
 & \underline{\underline{\text{fis}}} & \underline{\underline{\text{cis}}} & \underline{\underline{\text{gis}}} & \underline{\underline{\text{dis}}} & \underline{\underline{\text{ais}}} \\
 & \underline{\underline{\underline{\text{ais}}}} & \underline{\underline{\underline{\text{eis}}}} & \underline{\underline{\underline{\text{his}}}}; & &
\end{array}
$$

$\overline{\overline{\text{ges}}}$ steht allein. Reine Terzen sind alle hier senkrecht untereinander zu findenden Tonpaare (z. B. $\begin{matrix}\text{es,} \\ \underline{\text{g}}\end{matrix}$ $\begin{matrix}\overline{\text{ges}} \\ \text{b}\end{matrix}$ usw.), also nicht weniger als 19. Reine Harmonien sind: $\overline{\text{Ges}}$-, $\overline{\text{Des}}$-, $\overline{\text{As}}$-, $\overline{\text{Es}}$-, Es-, B-, F-, C-, G-, $\underline{\text{G}}$-, $\underline{\text{D}}$-, $\underline{\text{A}}$-, $\underline{\text{E}}$-, $\underline{\text{H}}$-, $\underline{\underline{\text{Fis}}}$-, $\underline{\underline{\text{Cis}}}$-Dur und Es-, B-, F-, C-, G-, $\underline{\text{G}}$-, $\underline{\text{D}}$-, $\underline{\text{A}}$-, $\underline{\text{E}}$-, $\underline{\text{H}}$-, $\underline{\underline{\text{Fis}}}$-, $\underline{\underline{\text{Cis}}}$-, $\underline{\underline{\text{Gis}}}$-, $\underline{\underline{\text{Dis}}}$-, $\underline{\underline{\underline{\text{Ais}}}}$- und $\underline{\underline{\underline{\text{Eis}}}}$-Moll. Da die Klaviatur übersichtlich angeordnet war (die Grundskala — nur mit $\underline{\text{d}}$ statt d — zuvorderst, dem Spieler am nächsten, alle anderen Werte der

Tonhöhe nach rechts ansteigend geordnet), so kann ihr Spiel nicht allzu schwierig gewesen sein.

Eine noch viel größere Zahl reiner Tonwerte gab G. B. Doni seinem dreimanualigen Klavicymbal („Compendio del trattato de' generi e de' modi della musica" 1635), dessen Zweck wohl kein anderer war, als dem am Cembalo sitzenden Dirigenten die Schwierigkeiten der Chiavi trasportate (Chiavette, vgl. Katechismus Musikgeschichte § 131) aus dem Wege zu räumen. Die Chiavette forderte eine um eine Terz höhere oder tiefere Tongebung als die Notierung sie aufwies, aber unter Wahrung der durch die Notierung gegebenen Intervallgrößen, also Transposition in die Ober- oder Unterterz; die Sänger brauchten nur sich in der notierten Tonart befindlich zu denken (der Sinn für die absolute Tonhöhe war wohl bei ihnen noch nicht sehr ausgebildet), der begleitende Spieler aber mußte natürlich wirklich transponieren. Doni gab daher der untersten Klaviatur Normalstimmung (die er die dorische nannte); die zweite stand eine große Terz höher, die dritte abermals eine große Terz höher, oder verglichen mit der Oktave eine große Terz tiefer. Doni nannte die Stimmung des zweiten Manuals die phrygische, und die des dritten die lydische (was mit der Benennung der Transpositionsskalen der Griechen übereinstimmen sollte, aber tatsächlich nicht stimmt; vgl. Katechismus Musikgeschichte, § 115. Jedes der drei Manuale aber hatte 20 Stufen innerhalb der Oktave mit der Stimmung:

$$\underline{\underline{\text{cis}}} \quad \underline{\underline{\text{dis}}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\text{fis}}} \quad \underline{\underline{\text{gis}}} \quad \text{a} \quad \text{h}$$

$$\underline{\text{d}} \quad \overline{\text{es}} \quad \underline{\text{fis}} \quad \overline{\text{as}} \quad \underset{(=\,\underline{\underline{\text{ais}}})}{\text{b}} \quad \underline{\underline{\text{his}}}$$

$$\text{c} \quad \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f} \quad \text{g} \quad \underline{\text{a}} \quad \underline{\text{h}} \quad \text{c}$$

Eine Hereinbeziehung von Tönen der anderen Klaviaturen in eine derselben war von Doni also nicht intendiert; das somit vorliegende nur 20stufige Klavier hat folgende reinen Quinten (horizontal) und reinen Terzen (vertikal):

$\overline{\text{as}}$ $\overline{\text{es}}$

b f c g d a e h

$\underline{\text{d}}$ $\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{e}}$ $\underline{\text{h}}$ $\underline{\text{fis}}$

$\underline{\underline{\text{fis}}}$ $\underline{\underline{\text{cis}}}$ $\underline{\underline{\text{gis}}}$ $\underline{\underline{\text{dis}}}$

$\underline{\underline{\text{his}}}$

Auch dieses System ist nur gut zu nennen, wenn man auf die Beschränkung der Modulationswege dieser Zeit Rücksicht nimmt.

Rein sind die Harmonien der Tonarten:

C-dur: c d $\underline{\text{e}}$ f g $\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{h}}$ c.

G-dur: g a $\underline{\text{h}}$ c d $\underline{\text{e}}$ $\underline{\text{fis}}$ g.

F-dur: f g $\underline{\text{a}}$ b c $\underline{\text{d}}$ $\underline{\text{e}}$ f

nebst ihren Parallelen, $\underline{\text{A}}$-moll, $\underline{\text{E}}$-moll und $\underline{\text{D}}$-moll, sowie außerdem $\underline{\text{A}}$-dur und $\underline{\text{E}}$-dur und $\underline{\underline{\text{Cis}}}$-moll; ausgedrückt im Geiste der Zeit: die Kirchentonarten waren rein ausführbar in der Normal-Tonlage, in der Transposition mit einem ♭, mit einem ♯ und mit 3 oder 4 Kreuzen. Die beiden letzteren kamen aber nicht in Betracht, da ja für sie gerade die anderen Manuale da waren. Somit erscheinen eine Anzahl Töne des Systemes ziemlich überflüssig ($\underline{\underline{\text{fis}}}$, $\underline{\underline{\text{ais}}}$ (b), $\underline{\underline{\text{his}}}$).

Nach Donis Bericht konstruierte Pietro della Valle gar ein solches Instrument mit fünf Manualen („Pentarmonico“), also mit vier Transpositionen.

Die neueste Zeit hat solchen Experimenten ein für allemal ein Ende gemacht, da rechnerisch festgestellt worden ist, daß für eine freie Beweglichkeit durch alle Tonarten nur Systeme von 41 oder 53 Stufen innerhalb der Oktave besser sind als das zwölfstufige gleichschwebend temperierte (Paul v. Jankó hat nachgewiesen, daß die Teilung in 41 Stufen ebenfalls schon erheblich besser ist als die in 12).

§ 6. Die 12stufige und die 53stufige gleichschwebende Temperatur.

Das Prinzip der gleichschwebenden Temperaturen ist nach den vorausgehenden Erörterungen klar; es bricht mit dem Versuche, auf Kosten anderer eine Anzahl Werte gut zu geben, und setzt für alle musikalisch möglichen Werte eine Anzahl wirklicher Mittelwerte ein. Die 12stufige gleichschwebende Temperatur setzt die Oktave der zwölften Quinte gleich, d. h. nimmt jede Quinte um $^1/_{12}$ des pythagoräischen Kommas zu klein, so daß die zwölfte Quinte wirklich mit der Oktave übereinstimmt. Da nun das pythagoräische Komma etwa $= {}^{12}/_{11}$ des syntonischen ist, so werden die Terzen der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur $= 4\ \mathrm{Q} - {}^3/_{11}$ 4/11
des syntonischen Komma, anstatt $= 4\ \mathrm{Q} - {}^{11}/_{11}$ des pythagoräischen, d. h. um $^8/_{11}$ des syntonischen Komma zu groß. 7/11
Die Werte sind:

$$c = 0{,}00000$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{cis}\\ \mathrm{des}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{12}\ \mathrm{O.} = 0{,}08333 \text{ für: } \begin{cases} \underline{\underline{\mathrm{cis}}} = 0{,}05889 \\ \underline{\mathrm{cis}} = 0{,}07681 \\ \overline{\mathrm{des}} = 0{,}09311 \end{cases}$$

$$\mathrm{d} = \frac{2}{12}\ \mathrm{O.} = 0{,}16666 \text{ für: } \begin{cases} \underline{\mathrm{d}} = 0{,}15200 \\ \mathrm{d} = 0{,}16992 \\ \overline{\overline{\mathrm{eses}}} = 0{,}18622 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{dis}\\ \mathrm{es}\end{matrix}\right\} = \frac{3}{12}\ \mathrm{O.} = 0{,}25 \text{ für: } \begin{cases} \underline{\underline{\mathrm{dis}}} = 0{,}22881 \\ \overline{\mathrm{es}} = 0{,}26303 \end{cases}$$

$$\mathrm{e} = \frac{4}{12}\ \mathrm{O.} = 0{,}33333 \text{ für: } \begin{cases} \underline{\mathrm{e}} = 0{,}32192 \\ \overline{\overline{\mathrm{fes}}} = 0{,}35614 \end{cases}$$

$$\mathrm{f} = \frac{5}{12}\ \mathrm{O.} = 0{,}41666 \text{ für: } \begin{cases} \underline{\underline{\mathrm{eis}}} = 0{,}39874 \\ \mathrm{f} = 0{,}41503 \\ \overline{\mathrm{f}} = 0{,}43295 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{fis}\\\text{ges}\end{matrix}\right\} = \frac{6}{12}\,\text{O.} = 0{,}5 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\underline{\text{fis}}} & = 0{,}47393 \\ \underline{\text{fis}} & = 0{,}49185 \\ \overline{\text{ges}} & = 0{,}50814 \\ \overline{\overline{\text{ges}}} & = 0{,}52606 \end{cases}$$

$$\text{g} = \frac{7}{12}\,\text{O.} = 0{,}58333 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\text{g}} & = 0{,}56704 \\ \text{g} & = 0{,}58496 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{gis}\\\text{as}\end{matrix}\right\} = \frac{8}{12}\,\text{O.} = 0{,}66666 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\text{gis}} & = 0{,}64385 \\ \overline{\text{as}} & = 0{,}67807 \end{cases}$$

$$\text{a} = \frac{9}{12}\,\text{O.} = 0{,}75 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\text{a}} & = 0{,}73696 \\ \text{a} & = 0{,}75488 \\ \overline{\overline{\text{heses}}} & = 0{,}77118 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{ais}\\\text{b}\end{matrix}\right\} = \frac{10}{12}\,\text{O.} = 0{,}83333 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\text{ais}} & = 0{,}81378 \\ \text{b} & = 0{,}83007 \\ \overline{\text{b}} & = 0{,}84799 \end{cases}$$

$$\text{h} = \frac{11}{12}\,\text{O.} = 0{,}91666 \quad \text{für:} \begin{cases} \underline{\text{h}} & = 0{,}90689 \\ \overline{\text{ces}} & = 0{,}92318 \end{cases}$$

$$\text{c}' = 1{,}00000.$$

Die beigefügten Werte der wichtigsten Intervalle machen weitere Kommentare fast überflüssig; diese 12 Werte — ihre Durchführbarkeit mittels Abzählens der Schwebungen vorausgesetzt — sind in der Tat vorzügliche Mittelwerte und insbesondere der mitteltönigen Temperatur, welche so lange ihrer Durchführung im Wege gestanden, weit überlegen; denn z. B. ist das $\underline{\text{cis}}$*** der mitteltönigen Temperatur für $\underline{\text{cis}}$ besser, aber für $\underline{\text{cis}}$ und $\overline{\text{des}}$, um welche es sich (von C dur aus gerechnet) in erster Linie handelt, schlechter, für $\overline{\text{des}}$ geradezu unbrauchbar (um 0,06 zu tief); ***es mitteltönig ist für $\overline{\text{es}}$ besser als der Wert der 12 st. gleichschwebenden Temperatur, aber für $\underline{\underline{\text{dis}}}$ um 0,03 zu hoch; $\underline{\underline{\text{fis}}}$** mitteltönig ist für $\underline{\text{fis}}$ und $\underline{\underline{\text{fis}}}$ besser, für $\overline{\text{ges}}$ und $\overline{\overline{\text{ges}}}$ aber schlechter als der Wert der 12 st. gleichschwebenden Temperatur; †$\overline{\text{as}}$ ($\underline{\underline{\text{gis}}}$†) mitteltönig ist ungefähr dem Werte der gleichschwebenden Temperatur entsprechend; a*** mitteltönig ist für $\underline{\text{a}}$ besser als der 12 st. gleichschwebende Wert, aber für $\overline{\overline{\text{heses}}}$ recht schlecht, **b mitteltönig ist für $\overline{\text{b}}$ gut, für b und gar $\underline{\text{ais}}$ recht schlecht, während der gleichschwebende Wert überall in der Mitte liegt.

Unsere Schluß=Tabelle gibt die Werte der gleichschwebenden Temperatur nicht nur wie hier in Logarithmen auf Basis 2, sondern auch in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$, welche in umfassenderer Weise zuerst von Heinrich Bellermann in seiner Schrift „Die Größe der musikalischen Intervalle" (1873) berechnet und 1890 von Paul von Jankó besonders empfohlen worden sind (Mus. Wochenblatt XXI, Nr. 30). Den Vorzug der Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$ gegenüber dem auf Basis 2 vermag ich nicht recht einzusehen; denn es kann kaum irgendwie von besonderem Interesse sein zu wissen, wieviel temperierte Halbtöne (Zwölfteloktaven) ein Intervall enthält, da der temperierte Halbton keinerlei Anspruch auf den Titel eines natürlich gegebenen Grundmaßes hat. Nur die extremen Vorkämpfer des sogenannten „chromatischen Systems", welche sich gegenüber der Bestimmung der Tonwerte nach Verwandtschaftsgraden (O, Q, T) negativ und feindlich verhalten, wollen alle Intervalle mit dem Zollstock des indifferenten Halbtones gemessen haben: gerade sie mögen aber aus unserer Gesamttabelle ersehen, daß die Logarithmen auf Basis 2 allen Anforderungen, die man für die Tonbestimmung an Logarithmen überhaupt stellen kann, vollkommen genügen. Ja, wenn die Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$ auch innerhalb der 12 Halbtonintervalle gleiche Mantissen für die wichtigsten zu vertretenden Zwischenwerte aufwiesen, so könnte man ihnen eine höhere Berechtigung zuerkennen; das tun sie aber ganz und gar nicht.

Die 12 Werte der gleichschwebenden zwölfstufigen Temperatur in Logarithmen auf Basis 2 findet man, indem man den Logarithmus der Oktave (1,00000) durch 12 teilt (1 : 12 = 0,08333...). Die Werte in Logarithmen auf Basis 2 verwandelt man ohne weiteres in solche auf Basis $\sqrt[12]{2}$, wenn man sie mit 12 multipliziert ($0{,}08333 \times 12 = 1{,}00000$).

Die Vortrefflichkeit der 53stufigen Temperatur wurde zuerst von dem Mathematiker Nicholas Mercator, nicht aber, wie man anzunehmen scheint, von dem großen Geographen Gerhard Mercator, erkannt. Letzterer starb 1594, konnte also Mersennes Arbeiten nicht mehr kennen. Nun finde ich aber bei William Holder „A treatise of the natural grounds and principles of harmony“ (1731) S. 79 folgenden Passus:

„Mersennus finds by his calculation $58^1/_4$ Comma's and somewhat more in one octave: but the late *Nicholas Mercator* a modest person and a learned and judicious mathematician in a manuscript of his, of which I have had a sight, makes this remark upon it: *In solvendo hoc problemate aberrat Mersennus.* And he, *working by the logarithms* finds out but 55 and a little more; and from thence has deduced an ingenious invention *of finding and applying a least common measure to all harmonic intervals, not precisely perfect, but very near to it.* ***Supposing a comma to be $^1/_{53}$ part of diapason*** for better accommodation rather than according to the tone partition $^1/_{55}$, wich $^1/_{53}$ he calls an *artificial comma* not exact, but differing from the true natural comma about $^1/_{20}$ part of a comma and $^1/_{1000}$ of diapason (which is a difference imperceptible), then the intervals within diapason will be measured by comma's according the following table“.

Comma	$= ^1/_{53}$	Tone minor	$= ^8/_{53}$
Diesis	$= ^2/_{53}$	Tone major	$= ^9/_{53}$
Semit. minor	$= ^3/_{53}$	3d minor	$= ^{14}/_{53}$
Semit. medius	$= ^4/_{53}$	3d major	$= ^{17}/_{53}$
Semit. major	$= ^5/_{53}$	4th	$= ^{22}/_{53}$
Semit. maxim.	$= ^6/_{53}$	Tritone	$= ^{26}/_{53}$

Semidiapente	$= {}^{27}/_{53}$	7th minor	$= {}^{45}/_{53}$
5th	$= {}^{31}/_{53}$	7th major	$= {}^{48}/_{53}$
6th minor	$= {}^{36}/_{53}$	Octave	$= {}^{53}/_{53}$
6th major	$= {}^{39}/_{53}$		

This I thought fit on this occasion to import to the reader, having leave so to do from Mr. Mercators friend. to whom he presented the said manuscript."

Dieser Mercator, ein Zeitgenosse Holders (um 1725), gibt, wie wir sehen werden, die richtigen Maße in 53stel Oktaven für die kleine und große Terz, während Athanasius Kircher (Musurgia [1650], S. 135) fälschlich die kleine Terz $= {}^{13}/_{53}$ und die große Terz $= {}^{18}/_{53}$ bestimmt. N. Mercator scheint also trotz dem Vorgange anderer in der Teilung der Oktave in 53 Kommas das Verdienst zu gebühren, daß er zuerst erkannt hat, daß durch sie die Terzen rein werden (was er, wie Holder erzählt, mit Hilfe der Logarithmen herausbekam).

Ein Komma (nämlich ein syntonisches, didymisches) ist aber in der Tat der 55. Teil der Oktave und läßt nur einen geringen Rest ($0{,}00140 = {}^{1}/_{13}$ Komma); der Unterschied von ${}^{1}/_{55}$ Oktave ($= 0{,}018181$) und ${}^{1}/_{53}$ Oktave ($= 0{,}018868$) ist aber sogar noch kleiner als ${}^{1}/_{20}$ Komma, nämlich $= 0{,}000687$ ($\times 20 = 0{,}012740 = {}^{2}/_{3}$ Komma), d. h. ${}^{1}/_{25}$ Komma und ${}^{1}/_{1375}$ Oktave!

Die Werte der 53stufigen Temperatur können aber natürlich nicht durch gleichmäßige Temperierung von 53 Quinten hergestellt werden — eine solche Anforderung ist ein Unding; vielmehr stellt sich bei schärferer Betrachtung der Tabellen heraus, daß die achte Oberquinte von c (= gis pythagoräisch, also $= 0{,}67969$) in der Tonhöhe fast exakt übereinstimmt mit der kleinen Sexte (Unterterz $\overline{\text{as}} = 0{,}67807$); doch ist zwischen beiden immer noch Raum für den Mittelwert der 53stufigen Temperatur (${}^{36}/_{53} = 0{,}67924$). Schreitet man daher z. B. von $\underline{\underline{\text{dis}}}$ aus fortgesetzt in Quinten aufwärts derart, daß man jede 8. Quint zur Unterterz zurückdeutet und demgemäß rein stimmt, so daß also das Verfahren ganz dem der mitteltönigen Temperatur ähnlich ist, nur daß eine Terz auf acht statt auf vier Quinten kommt (aber eine Terz nach der entgegengesetzten Seite), so ergibt sich für die 53 Stufen die Reihe:

dis	ais	eis	his	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	(∼ h)
h	fis	cis	gis	dis	ais	eis	his	fisis	(∼ g)
g	d	a	e	h	fis	cis	gis	dis	(∼ es)
es	b	f	c	g	d	a	e	h	(∼ ces)
ces	ges	des	as	es	b	f	c	g	(∼ asas)
asas	eses	heses	fes	ces	ges	des	as	es	(∼ feses)
feses	ceses	geses	deses	asas	eses				

Der Ton der 53. Stufe eses (= 0,20414) ist dem Ausgangstone dis (= 0,21089) so nahestehend (Differenz 0,00675 = $^1/_3$ Komma), daß beide als identisch angesehen werden können (die Quinte asas : dis = 0,59172 ist der „Wolf" dieses Systems, um 0,00675 zu groß). Dr. Shohé Tanaka, der japanische Musikgelehrte, dessen „Studien auf dem Gebiete der reinen Stimmung" (1890) mir für die vorliegende Arbeit mehrfach zustatten kamen, nennt die Vertauschung der achten Oberquint mit der Unterterz schismatische Verwechslung, und die Gleichsetzung der 53. Stufe mit dem Ausgangstone Kleisma (Verschluß).

Um diese 53stufige Skala rein zu stimmen, bedarf es weiter nichts als der möglichst genauen temperierten Einstimmung einer Acht-Quinten-Reihe (z. B. es b f c g d a e h = ces); die übrigen Reihen werden dann akustisch rein als Ober- und Unterterzen der gefundenen gestimmt.

Das durch diese 53 Werte gegebene System ist tatsächlich unbegrenzt; denn es fehlen nur scheinbar Werte wie fis cis gis oder ges ces oder , c f usw. Da nämlich

$\overline{\text{h}}$ = ces ist, so ist auch weiter $\overline{\text{ges}}$ = fis, $\overline{\text{des}}$ = cis usw. Wir erweitern die Tabelle auf mehr als das doppelte, indem wir die nächsten enharmonisch identifizierten Töne mittels kleismatischer und schismatischer Verwechslung) übereinander setzen:

Kleisma { (eses heses fes ces ges des as es b . . . .
dis ais eis his fisis cisis gisis disis { aisis (eisis hisis fisis . . . . .
Schisma . . . .
h fis cis gis dis ais
Schisma { (ces ges des as es b
. . . .

---

eis his fisis } . . . . .
Schisma
f c) g { d a e h fis cis gis dis (ais eis his fisis cisis gisis
. . . . asas eses heses fes ces ges des as { es b f c g d a
Schisma
. . . . { feses ceses geses deses asas eses heses

---

disis aisis . . . .
e { h (fis cis gis dis ais eis his fisis . . . .
fes { ces ges des as es b f c { g (d a e h fis cis
. . . . ♭♭♭h feses ceses geses deses) { asas eses heses fes ces ges des

---

gis dis . . . .
as { es b f c . . . .
♭♭♭h { feses ceses geses deses asas eses } heses fes ces usw.
. . . . fis cis gis) dis } Kleisma
. . . .

Die Werte der 53stufigen Temperatur, wie sie theoretisch sich durch Teilung der Oktave in 53 gleiche Teile ergeben, stellen wir in der folgenden Tabelle mit den sich durch die hier aufgewiesene Stimmungsweise ergebenden (!!) zusammen, und fügen die Werte der zwölfstufigen gleichschwebenden Temperatur zur Vergleichung bei:

	rein	53 stufig geteilt	53 stufig gestimmt (!)	12 stufige Werte
c	= 0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\overline{\text{c}}$	= 0,01792	0,018868	0,01711 (**** $\overline{\text{c}}$)	
$\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$	= 0,03421	0,03773	0,03421 ($\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$)	
$\underline{\underline{\text{cis}}}$	= 0,05889	0,05660	0,05909 ($\underline{\underline{\text{cis}}}$*)	
$\underline{\text{cis}}$	= 0,07681	0,07547	0,07620 (des*****)	
			. . . .	0,08333
$\overline{\text{des}}$	= 0,09311	0,09434	0,09331 (*******cis	
$\overline{\overline{\text{des}}}$	= 0,11102	0,11320	0,11043 (***$\overline{\overline{\text{des}}}$)	
$\underline{\underline{\underline{\text{cisis}}}}$	= 0,13570	0,13207	0,13529 ($\underline{\underline{\text{d}}}$******)	
$\underline{\text{d}}$	= 0,15200	0,15094	0,15240 ($\underline{\text{d}}$**)	
			. . . .	0,166666
d	= 0,16992	0,16981	0,16951 (**d)	
$\overline{\overline{\text{eses}}}$	= 0,18622	0,18868	0,18663 (******$\overline{\text{d}}$)	
$\overline{\overline{\overline{\text{eses}}}}$	= 0,20414	0,20754	0,20373 (**$\overline{\overline{\overline{\text{eses}}}}$)	**Kleisma**
$\underline{\underline{\underline{\text{dis}}}}$	= 0,21089		0,21150 ($\underline{\underline{\underline{\text{dis}}}}$***)	
$\underline{\underline{\text{dis}}}$	= 0,22881	0,22641	0,22860 ($\underline{\underline{\text{es}}}$*******)	
es	= 0,24511	0,2452	0,24572 (es***)	
$\underline{\text{dis}}$	= 0,24673			
			. . . .	0,25
$\overline{\text{es}}$	= 0,26303	0,26415	0,26283 (*es)	
$\overline{\overline{\overline{\text{feses}}}}$	= 0,27932	0,28302	0,27995 (*****es)	
$\overline{\overline{\text{es}}}$	= 0,28095			

	rein	53stufig geteilt	53stufig gestimmt (!)		12stufige Werte
$\underline{\underline{\underline{\text{disis}}}}$	= 0,30563	0,30188	0,30481	($\underline{\underline{\text{e}}}$****)	
$\underline{\text{e}}$	= 0,32192	0,32075	0,32192	($\underline{\text{e}}$)	
			. . . .		0,33333
e	= 0,33994	0,33962	0,33903	(****e)	
$\overline{\overline{\text{fes}}}$	= 0,35614	0,35849	0,35615	($\overline{\overline{\text{fes}}}$)	
$\underline{\underline{\underline{\text{eis}}}}$	= 0,38082	0,37736	0,38102	($\underline{\underline{\underline{\text{eis}}}}$*)	
$\underline{\underline{\text{eis}}}$	= 0,39874	0,39622	0,39812	($\underline{\text{f}}$*****)	
f	= 0,41503	0,41509	0,41524	(f*)	
			. . . .		0,416666
$\overline{\text{f}}$	= 0,43295	0,43396	0,43235	(***$\overline{\text{f}}$)	
$\overline{\overline{\overline{\text{geses}}}}$	= 0,44925	0,45283	0,44947	(********$\overline{\overline{\text{f}}}$)	
$\underline{\underline{\text{fis}}}$	= 0,47393	0,47170	0,47433	($\underline{\underline{\text{fis}}}$**)	
$\underline{\text{fis}}$	= 0,49185	0,49056	0,49144	(ges*****)	
			. . . .		0,5
$\overline{\text{ges}}$	= 0,50814	0,50943	0,50855	(******fis)	
$\overline{\overline{\text{ges}}}$	= 0,52606	0,52830	0,52567	(**$\overline{\overline{\text{ges}}}$)	
$\underline{\underline{\underline{\text{fisis}}}}$	= 0,55074	0,54717	0,55053	($\underline{\underline{\text{g}}}$*******)	
$\underline{\text{g}}$ $\underline{\underline{\underline{\text{fisis}}}}$	= 0,56704 = 0,56866	0,56604	0,56764	($\underline{\text{g}}$***)	
			. . . .		0,58333
g	= 0,58496	0,58490	0,58476	(*g)	
$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$ $\overline{\text{g}}$	= 0,60125 = 0,60288	0,60377	0,60187	(*****$\overline{\text{g}}$)	
$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$	= 0,61917	0,62264	0,61897	(*$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$)	
$\underline{\underline{\text{gis}}}$	= 0,64385	0,64152	0,64385	($\underline{\underline{\text{gis}}}$)	
$\underline{\text{gis}}$	= 0,66177	0,66038	0,66096	(as****)	
			. . . .		0,66666
$\overline{\text{as}}$	= 0,67807	0,67924	0,67807	($\overline{\text{as}}$)	

	rein	53 stufig geteilt	53 stufig gestimmt	12 stufige Werte
$\overline{\overline{\text{as}}}$	= 0,69599	0,69811	0,69519 (****as)	
$\underline{\underline{\underline{\text{gisis}}}}$	= 0,72067	0,71698	0,72000 (a*****)	
$\underline{\text{a}}$	= 0,73696	0,73585	0,73716 ($\overline{\text{a}}$*)	
			. . . .	0,75
a	= 0,75488	0,75472	0,75427 (***a)	
$\overline{\overline{\overline{\text{heses}}}}$	= 0,77118	0,77359	0,77139 (*******$\overline{\text{a}}$)	
$\underline{\underline{\underline{\text{ais}}}}$	= 0,79586	0,79245	0,79626 ($\underline{\underline{\text{ais}}}$**)	
$\underline{\underline{\text{ais}}}$	= 0,81378	0,81132	0,81336 ($\underline{\text{b}}$******)	
b	= 0,83007	0,83019	0,83048 (b**)	
			. . . .	0,83333
$\overline{\text{b}}$	= 0,84799	0,84906	0,84759 (**$\overline{\text{b}}$)	
$\overline{\overline{\overline{\text{ceses}}}}$	= 0,86428	0,86793	0,86471 (******$\overline{\overline{\text{b}}}$)	
{ $\underline{\underline{\text{h}}}$	= 0,88897 }	0,88679	0,88957 ($\underline{\underline{\text{h}}}$***)	
{ $\underline{\underline{\underline{\text{aisis}}}}$	= 0,89059 }			
h	= 0,90689	0,90566	0,90668 (ces*******)	
			. . . .	0,91666
{ $\overline{\text{ces}}$	= 0,92318 }	0,92453	0,92379 (*****h)	
{ h	= 0,92481 }			
$\overline{\overline{\text{ces}}}$	= 0,94110	0,94340	0,94091 (*$\overline{\overline{\text{ces}}}$)	
$\underline{\underline{\underline{\text{his}}}}$	= 0,96578	0,96227	0,96578 ($\underline{\underline{\text{his}}}$)	
{ ($\underline{\text{c}}$	= 0,98208 }	0,981138	0,98288 ($\underline{\text{c}}$****)	
{ $\underline{\underline{\text{his}}}$	= 0,98370 }			
c	= 1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Ich habe hier die Stimmung der 53 Stufen von c aus derart durchgeführt, daß die schismatischen Verwechslungen die Töne $\underline{\text{e}}$, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\underline{\text{his}}}$, $\overline{\text{as}}$, $\overline{\overline{\text{fes}}}$ und $\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$ ergeben, so daß c als wirklich in der Mitte stehend erscheint. Wie unsere obige

Paralleltabelle (S. 61) ausweist, macht es für das Endergebnis keinen Unterschied, wo man umdeutet, weil tatsächlich das Ganze eine Kette von Quinten der Größe 0,58476 ist.

Das Resultat dieser Stimmungsweise ist äußerst frappierend. Selbst Dr. Shohé Tanaka scheint nicht bemerkt zu haben, daß dasselbe die Ergebnisse der exakten Teilung in 53stel der Oktave weit an Reinheit übertrifft (er würde es bemerkt haben, wenn er die Logarithmen-Bestimmung zu Hilfe genommen hätte). Der Wolf $\overline{\overline{\mathrm{eses}}} \simeq \underline{\underline{\mathrm{dis}}}$ (= 0,00777) ist durch Wahl eines Mittelwertes für diese Stufe leicht ganz unmerklich zu machen. Da, wie oben bereits betont, nur acht Quinten vorsichtig zu temperieren sind, alle andern Töne aber als reine Terzen und Oktaven einzustimmen, so ist dieses System wirklich ohne namhafte Schwierigkeiten durchzuführen, sogar leichter als das zwölfstufige gleichschwebend temperierte, bei dem der Überschuß von 12 Quinten über die Oktave (das pythagoräische Komma) gleichmäßig auf 12 Quinten zu verteilen ist.

Die Schwierigkeiten des 53stufigen Systems liegen vielmehr in der Spieltechnik der Instrumente, auf denen es durchgeführt würde. 53 Tasten innerhalb der Oktave statt 12 ist natürlich ein gar gewaltiger Unterschied; auch bei vernünftigster Anordnung der Tonwerte wird deren richtige Wahl in jedem Moment große Anforderungen an die theoretische Bildung des Spielers stellen.

General Peronnet Thompson ließ sich als erster (1863) eine enharmonische Orgel konstruieren mit 40 Pfeifen für die Oktave, aber mit drei Manualen und zusammen 65 Tasten für die Oktave; nach Helmholtz („Lehre von den Tonempfindungen", 4. Aufl. S. 664) kann man darauf in 21 Tonarten reine Harmonien haben.

Der Amerikaner H. W. Poole konstruierte (1867) eine Orgel mit 78 Pfeifen für die Oktave unter Anwendung der schismatischen Verwechslung ($\mathrm{fes} : \underline{\mathrm{e}}$), welche auch die natürlichen Septimen (7. Obertöne) aller Grundtöne angibt; ursprünglich (1853) hatte dieselbe einen Mechanismus zur Umstimmung der Töne durch Registerzüge, den Mr. Poole aber durch Einfügung einer praktisch angelegten Klaviatur, auf der man in allen Tonarten mit demselben Fingersatze spielen kann, beseitigte (Helmholtz, a. a. O. S. 664).

Helmholtz selbst ließ sich von Schiedmayer in Stuttgart (um 1863) ein Harmonium erbauen, das auf zwei Manuale verteilt 32 Tonwerte aufwies, nämlich die Töne der Akkordkette:

fes $\underline{\text{as}}$ ces $\underline{\text{es}}$ ges $\underline{\text{b}}$ des $\underline{\text{f}}$ as $\underline{\text{c}}$ es $\underline{\text{g}}$ b . . . . fis $\underline{\text{ais}}$ cis $\underline{\text{eis}}$

Das obere Manual hat die Tonwerte:

as $\underline{\text{c}}$ es $\underline{\text{g}}$ b $\underline{\text{d}}$ f $\underline{\text{a}}$ c

und:

e $\underline{\text{gis}}$ h $\underline{\text{dis}}$ fis $\underline{\text{ais}}$ cis $\underline{\text{eis}}$

das untere die Tonwerte:

fes $\underline{\text{as}}$ ces $\underline{\text{es}}$ ges $\underline{\text{b}}$ des $\underline{\text{f}}$

und:

$\underline{\text{a}}$ c $\underline{\text{e}}$ g $\underline{\text{h}}$ d $\underline{\text{fis}}$ a $\underline{\text{cis}}$

Die Auswahl beruht auf der schismatischen Verwechslung (e = fes), durch welche die 17 Werte jedes Manuals auf 13 zusammenschrumpfen:

1. Manual.

$\underline{\text{as}}$ $\underline{\text{es}}$ $\underline{\text{b}}$ f

c g d a

$\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{e}}$ (fes) $\underline{\text{h}}$ (ces) $\underline{\text{fis}}$ (ges) $\underline{\text{cis}}$ (des)

übersichtlicher:

$\underline{\text{cis}}$ (des) $\underline{\text{es}}$ $\underline{\text{fis}}$ (ges) $\underline{\text{as}}$ b

c d $\underline{\text{e}}$ (fes) $\underline{\text{f}}$ $\underline{\text{g}}$ $\underline{\text{a}}$ a $\underline{\text{h}}$ (ces) c

2. Manual.

$\underline{\text{c}}$ $\underline{\text{g}}$ $\underline{\text{d}}$ $\underline{\text{a}}$

as ($\underline{\text{gis}}$) es ($\underline{\text{dis}}$) b ($\underline{\text{ais}}$) f ($\underline{\text{eis}}$) c

e h fis cis

übersichtlicher:

cis es ($\underline{\text{dis}}$) fis as ($\underline{\text{gis}}$) b ($\underline{\text{ais}}$) $\underline{\text{c}}$

c $\underline{\text{d}}$ e f ($\underline{\text{eis}}$) $\underline{\text{g}}$ $\underline{\text{a}}$ h c

Die Gesamtheit der Töne beider Manuale ist aber nur 21, nämlich (als Ausschnitt unserer obigen Paralleltabelle, S. 61):

$$\underline{\text{f}}\ \underline{\text{c}}\ \underline{\text{g}}\ \underline{\text{d}}\ \underline{\text{a}} \left\{ \begin{array}{l} \text{fes ces ges des as es b f c g d a e h fis cis} \\ \underline{\text{e}}\ \underline{\text{h}}\ \underline{\text{fis}}\ \underline{\text{cis}}\ \underline{\text{gis}}\ \underline{\text{dis}}\ \underline{\text{ais}}\ \underline{\text{eis}} \end{array} \right.$$

(d. h. 17 Durakkorde und 17 Mollakkorde rein [nicht wie Helmholtz zählt nur 15], aber nicht 17 in Quintenverkettung, sondern 3 Paar um ein Komma verschieden gestimmte: c _ g neben $\underline{\text{c}}$ e $\underline{\text{g}}$ usw.). Dieses Instrument ist aber weder geeignet noch auch berechnet für eine freie Bewegung durch das gesamte Tongebiet, sondern nur für akustische Untersuchungen bestimmt.

Reicher ist die Auswahl des von Georg Appun für Gustav Engel gebauten Harmoniums mit 36 in derselben Weise gestimmten Quinten (Ausschnitt aus unserer Paralleltabelle von $\underline{\underline{\text{eis}}}$ bis hinauf zu eis (f) oder was dasselbe ist, die Töne umfassend:

$\underline{\underline{\text{eis}}}$ $\underline{\underline{\text{his}}}$ $\underline{\underline{\text{fisis}}}$ $\underline{\underline{\text{cisis}}}$ $\underline{\underline{\text{gisis}}}$ $\underline{\underline{\text{disis}}}$ $\underline{\underline{\text{aisis}}}$ ($\simeq$ $\underline{\text{h}}$)

$\underline{\underline{\text{h}}}$ $\underline{\underline{\text{fis}}}$ $\underline{\underline{\text{cis}}}$ $\underline{\underline{\text{gis}}}$ $\underline{\underline{\text{dis}}}$ $\underline{\underline{\text{ais}}}$ $\underline{\underline{\text{eis}}}$ $\underline{\underline{\text{his}}}$ $\underline{\underline{\text{fisis}}}$ ($\simeq$ $\underline{\text{g}}$)

$\underline{\text{g}}$ $\underline{\text{d}}$ $\underline{\text{a}}$ $\underline{\text{e}}$ $\underline{\text{h}}$ $\underline{\text{fis}}$ $\underline{\text{cis}}$ $\underline{\text{gis}}$ $\underline{\text{dis}}$ ($\simeq$ es)

es b f c g d a e h ($\simeq$ ces)

$\overline{\text{ces}}$ $\overline{\text{ges}}$ $\overline{\text{des}}$ $\overline{\text{as}}$ $\overline{\text{es}}$ $\overline{\text{b}}$ $\overline{\text{f}}$

Das Instrument hat zwei Manuale, deren unteres die Quinten c.... eis ($\overline{\text{f}}$) auf die zwölf Tasten gewöhnlicher

Anordnung bringt; zwölf Druckknöpfe gestatten deren enharmonische Umstimmung, derart, daß f an Stelle von eis ($\overline{\text{f}}$) tritt, b an Stelle von ais ($\overline{\text{b}}$) usw., so daß die Quintenreihe c ... eis ($\overline{\text{f}}$) durch deses ($\underline{\underline{\text{his}}}$) .... f ersetzt wird; das zweite Manual aber bringt die restierenden Töne $\underline{\underline{\text{his}}}$ (e♭♭♭) .... $\underline{\underline{\text{eis}}}$ (geses). Mit andern Worten: das Hauptmanual ist pythagoräisch gestimmt und hat bereits (wenn man die schismatische Verwechselung in Betracht zieht) eine Anzahl reiner Unterterzen $\left[\frac{\text{c}}{\text{as}}\ \frac{\text{g}}{\text{es}}\ \frac{\text{d}}{\text{b}}\ \frac{\text{a}}{\text{f}}\right]$; die reinen Oberterzen sind leicht durch die Knöpfchen zu gewinnen.

Dies Instrument vermag in der Tat hoch gespannten Anforderungen zu genügen. Es kommt ungefähr überein mit dem von mir (Musiklexikon, Artikel „Temperatur") vorgeschlagenen dreimanualigen, auf dem die Stimmung der drei Manuale gegeneinander um je ein syntonisches Komma differiert, während jedes Manual für sich die gewöhnliche zwölfstufige gleichschwebende Temperatur hat. Man wird auf einem solchen dreimanualigen Instrument jederzeit die reinen Oberterzen aus der obersten, die reinen Unterterzen aus der unteren Klaviatur entnehmen und als Hauptmanual das mittlere betrachten. Natürlich ließe sich dasselbe Resultat sogar noch bequemer erreichen, wenn man die beiden Komma-Umstimmungen durch Knöpfe auf den Tasten eines einzigen Manuals bewirkte oder aber durch Umstimmungsknöpfe hinter den Tasten. Die Werte dieses 36 stufigen Systems sind:

Grundwerte	Oberterzen	Unterterzen
1. 0,00000 (c)		
		2. 0,01140
	3. 0,07192 (für $\underline{\underline{\text{cis}}}$ und $\overline{\text{cis}}$)	
4. 0,833333		
		5. 0,09473 ($\overline{\text{des}}$)
	6. 0,15525 ($\underline{\text{d}}$)	
7. 0,16666 (d)		
		8. 0,17807 ($\overline{\overline{\text{eses}}}$)
	9. 0,23858 ($\underline{\underline{\text{dis}}}$)	

Grundwerte	Oberterzen	Unterterzen
10. 0,25		
		11. 0,26140 (es)
	12. 0,32192 (e)	
13. 0,33333		
		14. 0,34473 (fes)
	15. 0,40525 (eis)	
16. 0,41666 (f)		
		17. 0,42807 (1)
	18. 0,48859 (fis)	
19. 0,5		
		20. 0,51140 (Zes)
	21. 0,57192 (A)	
22. 0,58333 (g)		
		23. 0,59473 (as)
	24. 0,65525 (gis)	
25. 0,66666		
		26. 0,67807 (as)
	27. 0,73859 (a)	
28. 0,75 (a)		
		29. 0,76140 (b)
	30. 0,82192 (ais)	
31. 0,83333 (d)		
		32. 0,84473 (b)
	33. 0,90526 (h)	
34. 0,91666		
		35. 0,92807 (ces)
	36. 0,98859 (his)	
37. 1,00000 (c)		

Die Werte sind durchweg brauchbare, vor allem sind alle Terzen wirklich rein und die Quinten nur um 0,00159 zu klein, und die Wahl der Ergänzungswerte ist überaus leicht, übersichtlich (Hauptreihe pythagoräisch reine Quintbestimmung, Mittelreihe Oberterzen, letzte Reihe Unterterzen).

Den ganzen Apparat der 53 Tonstufen brachte zuerst

R. H. M. Bosanquet (London 1875) in einem einzigen Manual an, bedurfte aber, um dasselbe spielbar zu machen, sogar 84 Tasten innerhalb der Oktave (zwei Angriffsstellen für die Mehrzahl der Tasten).

In der neuen soeben (1913) erschienenen Schrift „Das duale Harmoniesystem“ (Leipzig, C. F. W. Siegel) entwirft A. v. Öttingen ein den höchsten Anforderungen entsprechendes „duales Reininstrument“, auf dessen Anlage hier nicht näher eingegangen werden kann. Das Instrument wird aber demnächst gebaut werden.

Dr. Shohé Tanaka griff mit seinem „Enharmonium“ wieder auf ältere Transponier-Mechanismen zurück. Seine Klaviatur, die zur Beherrschung des gesamten Tongebietes in reiner Stimmung bestimmt ist und ihre Aufgabe in sehr anerkennenswerter Weise löst, sieht den Klaviaturen eines Zarlino usw. wieder sehr ähnlich. Er teilt die cis- und fis-Taste in je drei Teile ($\underline{\underline{\text{cis}}}$, $\underline{\text{cis}}$, $\underline{\text{d}}$ und $\underline{\underline{\text{fis}}}$, $\underline{\text{fis}}$, $\underline{\text{g}}$), die dis-, gis- und b-Taste in 2 Teile ($\underline{\underline{\text{dis}}}$, e; $\underline{\underline{\text{gis}}}$, a und $\underline{\underline{\text{ais}}}$, b) und schiebt zwischen $\underline{\text{e}}$ und f eine kurze Taste für $\underline{\underline{\text{eis}}}$ ein. Vermittels eines Kniehebels werden sämtliche Töne der zweiten Terzreihe ($\underline{\underline{\text{cis}}}$, $\underline{\underline{\text{dis}}}$, $\underline{\underline{\text{fis}}}$, $\underline{\underline{\text{gis}}}$, $\underline{\underline{\text{ais}}}$) enharmonisch vertauscht mit Unterterzen ($\overline{\text{des}}$, $\overline{\text{es}}$, $\overline{\text{ges}}$, $\overline{\text{as}}$, $\overline{\text{b}}$), so daß also tatsächlich folgende Kette von 26 Tönen zur Verfügung steht:

$\underline{\underline{\text{fis}}}$	$\underline{\underline{\text{cis}}}$	$\underline{\underline{\text{gis}}}$	$\underline{\underline{\text{dis}}}$	$\underline{\underline{\text{ais}}}$	$\underline{\underline{\text{eis}}}$	
$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{e}}$	$\underline{\text{h}}$	$\underline{\text{fis}}$	$\underline{\text{cis}}$	$\underline{\text{gis}}$
b	f	c	g	d	a	e
$\overline{\text{ges}}$	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{es}}$	$\overline{\text{b}}$	$\overline{\text{f}}$	

Weiter hat aber Herr Tanaka eine Transponiervorrichtung angebracht, durch welche die Klaviatur aus dieser C-dur-Stimmung um 6 Quintschritte nach oben oder nach unten verschoben werden kann.

5	3	1	6	4	2	0	2	4	6	1	3	5
des	es	f	ges	as	b	c	d	e	fis	g	a	h
⟵												⟶

Dazu bedarf es natürlich des ganzen Apparats der 53 stufigen Temperatur, aber nur in der Windlade, nicht in der Klaviatur. Man denke sich das einfach so, daß die Klaviatur bei jeder Transposition ein anderes begrenztes Stück unserer Tabelle S. 60 beherrscht, das äußerlich (in den Umrißlinien) dem hier für C-dur gegebenen genau entspricht. Natürlich muß man, wenn man weiter nach rechts oder links vordringen will, als jene Tabelle gestattet, die schismatischen Umdeutungsstellen verschieben, wofür unsere Paralleltabelle den Anhalt gibt.

Ich verstehe in Tanakas C-dur-Stimmung nur eins nicht, nämlich, warum er die Töne, welche die Brücke von einer Quintenreihe zur andern bilden (die schismatisch doppeldeutigen), ausgelassen hat (h ces, dis es, $\underline{\underline{\text{his}}}$ und $\underline{\underline{\text{fisis}}}$ g). Diese vier Stufen hätten seine Quintenreihe zu einer ununterbrochenen gemacht: $\underline{\underline{\text{fis}}}$ $\underline{\underline{\text{cis}}}$ .... $\underline{\underline{\text{fisis}}}$ $\underline{\underline{\text{g}}}$ $\underline{\text{d}}$ .... $\underline{\text{gis}}$ $\underline{\text{dis}}$ es b .... e h $\overline{\text{ces}}$ ... $\overline{\text{f}}$; übersichtlich:

	$\underline{\underline{\text{fis}}}$	$\underline{\underline{\text{cis}}}$	$\underline{\underline{\text{gis}}}$	$\underline{\underline{\text{dis}}}$	$\underline{\underline{\text{ais}}}$	$\underline{\underline{\text{eis}}}$	$\underline{\underline{\text{his}}}$	$\underline{\underline{\text{fisis}}}$	($\overline{\simeq}$ $\underline{\text{g}}$)
$\underline{\text{g}}$	$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{e}}$	$\underline{\text{h}}$	$\underline{\text{fis}}$	$\underline{\text{cis}}$	$\underline{\text{gis}}$	$\underline{\text{dis}}$	($\overline{\underline{\simeq}}$ es)
es	b	f	c	g	d	a	e	h	(= $\overline{\text{ces}}$)
$\overline{\text{ces}}$	$\overline{\text{ges}}$	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{es}}$	$\overline{\text{b}}$	$\overline{\text{f}}$			

d. h. hier wären 21 statt 17 Dur- und ebensoviel Mollakkorde rein zur Verfügung (ohne Transposition). Die vier dafür notwendigen weiteren Tastenteilungen hätten der Klaviatur kein wesentlich anderes Aussehen gegeben.

Übrigens verdient die geistreiche Konstruktion dieses Instruments volle Anerkennung; es ist von allen bisher versuchten unzweifelhaft das vollkommenste zur Demonstration der Vorzüge der reinen Stimmung gegenüber der stark temperierten unsers Zwölfhalbtonsystems. Ob aber nicht trotzdem das letztere allen Versuchen, die reine Stimmung in die Instrumentalpraxis überzuführen, standhalten wird, wird abzuwarten sein. Man muß wohl unterscheiden zwischen der Fähigkeit des Ohrs, Tonhöhenunterschiede zu erkennen, und dem Bedürfnis, diese Unterscheidung überall gemacht zu sehen; da hilft eine andere Fähigkeit des Ohrs: annähernd übereinstimmende Intervalle für dieselben zu halten, wenn dafür logische Gründe vorhanden sind, über die Mängel der Praxis hinweg. Mit dieser verlassen wir aber den Boden der mathematischen Tonbestimmung und treten auf den der Tonpsychologie über.

Zwischen beiden Gebieten liegt das der Physiologie der Tonempfindungen, dem wir uns zunächst zuzuwenden haben.

II. Kapitel.

Tonkomplexe (physikalisch-physiologisch).

§ 7. Kommensurable Schwingungsformen.

Wir haben im ersten Kapitel dieses Buches lediglich die mathematische Bestimmung der Tonverhältnisse ins Auge gefaßt, dabei voraussetzend, daß das musikalische Ohr bestimmte Anforderungen stellt, und nur den Wegen nachgehend, auf welchen die Praxis diesen Anforderungen zu genügen gesucht hat.

Jetzt geben wir diesen der geschichtlichen Entwicklung folgenden Standpunkt auf und stellen uns auf den Boden der heutigen exakten Wissenschaft, um zu fragen, wie es kommt, daß das Ohr die Terz als 4:5 gestimmt wissen will und nicht als 64:81, wie es überhaupt geschehen kann, daß die im ersten Kapitel betrachteten Einzeltonwerte etwas anderes werden als Einzelerscheinungen, isolierte Fakta; wie sie schon als Tatsachen der Erscheinungswelt zueinander in Beziehung stehen (2. Kapitel) und weiter im Ohr und im Geiste des Menschen in innigere Beziehungen gesetzt werden (3. Kapitel).

Schon die Völker alter Vorzeit haben bemerkt, daß die mechanischen Bedingungen für die Hervorbringung von Tönen, welche das Ohr als miteinander vereinbar, ähnlich, verwandt anerkennt, gewisse einfache Verhältnisse aufweisen; daß bei gleichbleibender Spannung einer Saite deren Hälfte die Oktave, den „ähnlichsten" (am vollkommensten konsonierenden) höhern Ton gibt, daß $^2/_3$ der Saite die reine Quinte, den zwischen Oktave und Hauptton liegenden leichtest verständlichen Ton ergeben usf. Ebenso bemerkte man schon früh, daß ein und derselbe klangfähige Körper, besonders eine in einer Röhre eingeschlossene Luftsäule, wie sie alle unsere und alle alten und uralten Blasinstrumente aufweisen, imstande ist, eine Reihe verschieden hoher Töne hervorzubringen, die aber untereinander in bestimmten einfachen Verhältnissen stehen. Bleiben wir hierbei zunächst stehen, so ergibt eine Schallröhre wie z. B. die des Horns oder der Trompete oder auch einer Orgelpfeife bei schärferem Anblasen anstatt des tiefsten Tones, welcher ihr Grundton genannt wird und den wir allgemein mit C bezeichnen wollen, dessen Oktave c, weiter seine Duodezime g, seine Doppeloktave c′, seine Septdezime e′ usw., also Töne, welche eigentlich nur eine $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ so lange Schallröhre erfordern, oder, was dasselbe ist, welche 2-, 3-, 4-, 5 mal so viel Schwingungen in derselben Zeit ausführen. Schwingende Saiten zeigen ähnliche Erscheinungen, nämlich zunächst darin, daß sie, sobald ein Ton von einem ähnlichen Verhältnis (Oktave, Duodezime, Doppeloktave, Septdezime usw.) zum Eigenton der Saite durch eine andere Tonquelle hervorgebracht wird, mittönen und eben diesen Ton angeben (wo ein solcher erregender Ton fehlt, kann die ganze Saite diese höhern Töne nur geben, wenn durch Berührung bestimmter Teilpunkte [$^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ usw.] die Saite gezwungen wird, sich zu teilen). Das Überblasen der Blasinstrumente und das Mittönen der Saiten, wenn solche zu ihnen in einfachem Verhältnis stehende höhere Töne sie erregen, offenbart uns ein hochwichtiges Gesetz, nämlich, daß

in gewissen einfachen Beziehungen stehende Töne (nämlich zunächst solche, die das Ohr als konsonante erkennt) **bis zu einem gewissen Grade gemeinsame mechanische Entstehungs- und Verlaufsbedingungen haben.**

Der Beobachtung, daß solche Töne, deren mechanische Entstehungs- und Verlaufsbedingungen mehr oder minder vollkommen übereinstimmen, auch vom Ohr in dieser ihrer

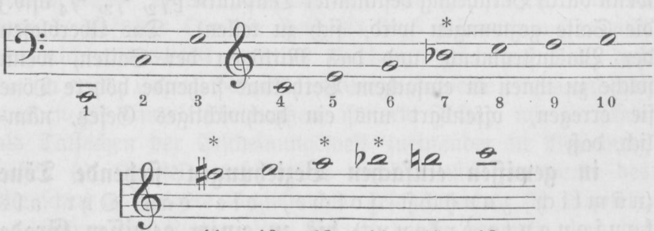
Zusammengehörigkeit oder Vereinbarkeit begriffen werden, läßt ferner darauf schließen, daß

diese Gemeinsamkeit der mechanischen Entstehungs- und Verlaufsbedingungen in den Organen, welche zuletzt die Töne (Klänge) in Empfindungen umsetzen und dem Bewußtsein zuführen, wieder zur Geltung kommt.

Ausgehend von diesem bisher nicht genügend in den Vordergrund gestellten, vielleicht in dieser Schärfe überhaupt noch nicht formulierten Fundamentalsatze wird sich uns das Gebiet der sogenannten akustischen Phänomene leicht übersichtlich gestalten, und gewisse Probleme werden ihrer Lösung nähergerückt erscheinen.

Die Tatsache, daß Schallröhren nicht nur durch Überblasen, und Saiten nicht nur durch Mittönen höhere Töne ergeben als ihren sogenannten Grundton, sondern vielmehr eben diese Töne, deren mechanische Entstehungs- und Verlaufsbedingungen mit denen des Grundtons in noch näher zu erörternder Weise zusammenfallen, jederzeit, wenn auch in geringerer Stärke, *mit hören lassen*, ist eine weitere sehr wichtige Bekräftigung unsers Fundamentalsatzes.

Die Reihe der solchergestalt über einen gegebenen Grundton begleitend erscheinenden Bei- oder *Obertöne* (Naturskala, Sons harmoniques, Aliquot-Töne) ist z. B. für C bis zum 16. Teiltone:

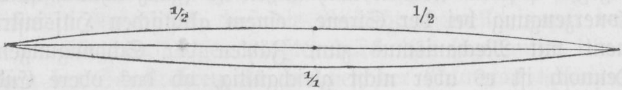


(die mit * bezeichneten Töne erscheinen gegenüber den uns geläufigen Werten unseres Tonsystems etwas zu tief).

Die „Gemeinsamkeit der mechanischen Entstehungs- und Verlaufsbedingungen" hat man sich so zu denken, daß z. B.

die Saite C, wie das Phänomen des Mittönens unwiderleglich dartut, imstande ist, den Ton c ertönen zu lassen, da sie mit ihrer ganzen Länge zweimal die Länge der für c erforderlichen Saite darstellt. Wenn C bei Erklingen von c mittönt, so schwingt es tatsächlich in zwei Hälften, zwischen denen (in der Mitte der Saite) deutlich ein ruhender Scheidepunkt (Knotenpunkt) bemerkbar ist, wie man sich leicht durch Aufsetzen eines spanischen Reiterchens (geknickten Papierstreifchens) überzeugen kann. Ebenso teilt sich C, wenn es von einem erklingenden g in Mitschwingung versetzt wird, in drei gleiche Teile (mit 2 Knotenpunkten), von c′ erregt in vier, von e′ erregt in fünf Teile usf.

Aber **das Schwingen der Saite in solchen Teilen schließt ihr Schwingen in der ganzen Länge nicht aus, und das Schwingen in der ganzen Länge schließt ebensowenig das Schwingen in solchen Teilen aus,** wie die Wahrnehmbarkeit der Obertöne im Klange der ganzen Saite unwiderleglich erweist. Wird die ganze Saite durch Schlag, Anreißen oder Streichen zum Tönen gebracht, so läuft von der Angriffsstelle aus eine erregende Welle durch die ganze Saite und erzeugt nicht nur Schwingungen der ganzen Saite, sondern auch solche ihrer zwei Hälften, drei Drittel usf. Man muß sich die Schwingungen der beiden Hälften usw. als leichtere Kräuselungen den Schwingungen der ganzen Saite eingebildet oder superponiert denken:



d. h. während eines Hin- und Hergangs (Pendelschwingung) der ganzen Saite macht jede der zwei Hälften zwei Schwingungen, wobei der die größten Abweichungen aus der Gleichgewichts-(Rue-)Lage machende Mittelpunkt der Saite als Endpunkt beider Hälften anzusehen ist und als solcher gegenüber den doppelt so schnellen Bewegungen der halben Saiten als in Ruhe befindlich zu gelten hat. Ebenso sind die in der ganzen Saite eingebildeten Schwingungen der übrigen Aliquoten aufzufassen. Die mathematische Mechanik erklärt die Notwendigkeit der Entstehung der Nebenschwingungen der Aliquoten durch die Unregelmäßigkeit der durch Schlag, Stoß usw. erzeugten Bewegungsform der Saite.

Zur Erklärung der Aliquottöne im Klange der Blasinstrumente müssen wir etwas weiter ausholen. Bei der einfachsten Art derselben, den Flötenpfeifen (z. B. Prinzipalpfeifen der Orgel) wird die von der Pfeife eingeschlossene Luftsäule dadurch in Schwingungen versetzt, daß ein schmaler, bandförmiger Luftstrom gegen eine scharfe Kante (Oberlabium) getrieben wird und sich an derselben derart teilt, daß er halb in die Pfeife hineingetrieben wird, halb aber nach außen zerstiebt; die in die Pfeife tretende Luft bringt in derselben eine Verdichtung hervor, welche zurückdrückt und den ganzen bandförmigen Strom nach außen lenkt: dadurch aber wird nun, nachdem die Luft in der Peife sich wieder gegen die außen befindliche ausgeglichen hat, durch weiteres Hinausziehen von Luft aus der Pfeife (zufolge der Kohärenz der Luftteilchen) eine Verdünnung der Luft in der Pfeife bewirkt, welche nun wieder das ganze Luftband hineinzieht. So wechseln Verdünnung und Verdichtung stetig in der Pfeife, und jeder Verdichtung folgt die Abgabe eines Luftstoßes durch den Aufschnitt (Mund) der Pfeife. Nur diese Luftstöße sind das tonerzeugende dieser Klasse von Blasinstrumenten; das entgegengesetzte Ende der Pfeife (fälschlich „Mündung" genannt) gibt dagegen keinerlei Wellen nach außen ab (ganz ähnlich ist die Tonerzeugung bei der Sirene, einem akustischen Hilfsinstrument mit Mechanismus zum Zählen der Schwingungen). Dennoch ist es aber nicht gleichgültig, ob das obere Ende einer solchen Pfeife offen oder geschlossen (gedeckt) ist. Ist es offen, so liegt der Punkt stärkster Verdichtung in der Mitte der Pfeife (weil nach dem andern offenen Ende die Ausgleichung mit der äußeren Luft möglich ist). Ist es geschlossen, so ist am Deckel die Verdichtung am stärksten; da nun aber bei der gedeckten Pfeife die Verdichtungswelle einen doppelt so weiten Weg hat bis zum Aufschnitt, durch den sie den Luftstoß abgibt, als bei der offenen, so ist der Ton einer gedeckten Pfeife etwa eine Oktave tiefer als der einer offenen.

Die Schallgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Bewegung der Verdichtungswelle) ist bei gleicher Temperatur stets dieselbe (340 Meter in der Sekunde bei 16° Celsius); es wird daher bei einer gedeckten Pfeife von 8 Fuß Länge, wenn man für 340 Meter die früher allgemein übliche bequemere Bestimmung 1056 Fuß setzt, der Weg des Verdichtungsmaximums vom Mundstück bis zum Deckel und wieder zurück 16 Fuß und ebenso der des Minimums (Verdünnungsmaximums) 16 Fuß betragen, so daß die ganze Wellenlänge (Doppelschwingung von einem Maximum bis zum folgenden) 32 Fuß beträgt, d. h. es werden in der Sekunde 1056 : 32 = 33 Schwingungen stattfinden. Für die offene Pfeife ist der Weg nur halb so lang, d. h. sie wird 66 Schwingungen machen. Die Bewegung der Luftsäule ist aber ebensowenig eine einfache wie die der schwingenden Saite, woran wiederum die Art der Erzeugung der Schwingungen schuld sein mag. In die Wellen der ganzen Röhre sind wiederum Teilwellen der beiden Hälften, die drei Drittel usw., eingebildet (doch nur bei offenen Röhren; bei gedeckten fehlen die Halben, Viertel usw. [alle geradzahligen]), d. h. es schwingen auch diese Aliquoten selbständig, aber schwächer. Wir haben also auch hier wieder dasselbe Gesetz der *Einbildbarkeit der Schwingungsformen der vom Ohr als nächstverwandt anerkannten Töne in die Schwingungsform des Grundtones*. Evident wird die Möglichkeit der Teilung der Röhre in ihre Aliquoten (die ja zweifelhaft scheinen könnte in Anbetracht, daß die Verdichtungswelle immer den ganzen Weg zurücklegen müßte) durch das sogenannte Überblasen der Schallröhren, bei welchen der Grundton tatsächlich ganz verschwindet, und an seine Stelle einer der nächsten Obertöne als Hauptton erscheint. Schlägt z. B. eine gedeckte Orgelpfeife (etwa Quintatön) in die Duodezime über (den nächsten ihr zur Verfügung stehende Oberton), so ist das nur so zu erklären, daß der Doppelweg durch die Pfeife sich in drei Teile teilt, so daß gleichzeitig drei Maxima bzw. Minima in der Röhre sind. Bei Blasinstrumenten mit Rohr- oder membranösen Zungen wird wahrscheinlich das Überblasen dadurch bewirkt, daß die Zungen (Bänder) so straff gespannt werden, daß sie nicht die langsamen Schwingungen der ganzen Röhre, sondern nur die der geteilten mitmachen können (vgl. Katechismus Instrumentation S. 3—4). Die menschliche Singstimme hat die vollständige Reihe der Obertöne, überhaupt ist dieselbe Anordnung (bis auf den Ausfall der geradzahligen bei gedeckten Orgelpfeifen und den ihnen gleichzustellenden Klarinetten) bei den Klängen sämtlicher höherstehenden Musikinstrumente nachweisbar.

§ 8. Untertöne.

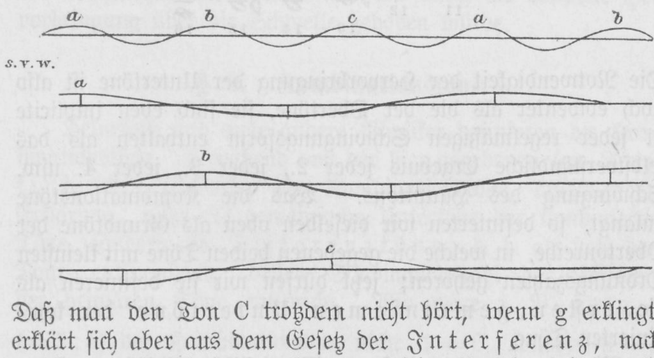
Sämtliche bisher aufgewiesenen akustischen Phänomene stimmen darin überein, daß sie die Einbildbarkeit der Aliquotschwingungen in die Totalschwingungen erweisen, d. h. bestätigen, daß die Bedingungen der Hervorbringung gewisser höheren Töne durch die eines Grundtons mitgegeben sind. Es fragt sich nun, ob auch das Gegenteil möglich ist, d. h. ob durch die Bedingungen der Hervorbringung höherer Töne auch tiefere mit erzeugt werden können oder müssen? Einige akustische Phänomene berechtigen zur Bejahung dieser Frage.

a) Setzt man eine schwingende Stimmgabel nicht fest, sondern nur lose auf einen Resonanzboden, so wird man, je nachdem wie lose man sie aufsetzt, statt des Eigentones der Gabel dessen Unteroktav oder Unterduodezime hören. Es ist das die einfache Folge einer nicht vollkommenen Übertragung der Schwingungen an den Resonanzboden: derselbe erhält dann nur jeden zweiten oder dritten Stoß der Gabel und kann dann natürlich nur den dieser doppelt oder dreimal so langsamen Schwingungsperiode entsprechenden Ton weitergeben. Ebenso sind alle ähnlichen Fälle des Umschlagens des Tons in die Unteroktav oder einen andern Ton der umgekehrten Obertonreihe zu erklären. Man nennt solche Töne Klirrtöne (auch die von Prof. Hermann Schröder [Mus. Wochenblatt 1888, S. 270] aufgewiesenen Untertöne auf der Violine sind auf dasselbe Prinzip zurückzuführen [gehemmte Schwingungen]).

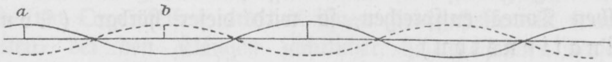
b) Nach Helmholtz (Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl. S. 74) haben Resonatoren (abgestimmte Hohlkugeln) nur unregelmäßige und sehr hohe Obertöne; dieselben geben aber dennoch ihren Eigenton an, wenn einer der nächsten harmonischen Obertöne desselben erklingt.

c) Erklingen zwei Töne gleichzeitig, die nach den Anforderungen der reinen Stimmung Obertönen eines und desselben Tones entsprechen, so wird dieser hörbar (Kombinationston).

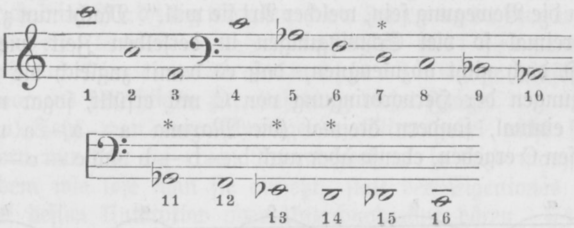
In allen diesen Fällen werden tiefere Töne durch höhere erzeugt; sie sind wiederum Beweise für die Gemeinsamkeit der Bedingungen ihrer Hervorbringung und ihres Verlaufs. Es ist nämlich ferner nicht außer acht zu lassen, daß jeder Ton die Bedingungen für Hervorbringung und Verlauf einer der Obertonreihe entgegengesetzten Untertonreihe tatsächlich erfüllt. Nach Helmholtz (L. v. d. T. 4. Aufl. S. 20) hängt die Tonhöhe nur von dem zeitlichen Abstand der einander folgenden Schwingungen ab; „innerhalb jeder einzelnen Periode kann die Bewegung sein, welcher Art sie will." Macht nun z. B. g dreimal so viel Schwingungen in derselben Zeit wie C, so ist doch nicht abzuleugnen, daß es damit zugleich die Bedingungen der Hervorbringung von C mit erfüllt, sogar nicht nur einmal, sondern dreimal (die Maxima a — a — a usw. müssen C ergeben, ebenso aber auch b — b — b und c — c — c):



Daß man den Ton C trotzdem nicht hört, wenn g erklingt, erklärt sich aber aus dem Gesetz der Interferenz, nach welchem zwei Schwingungsformen gleicher Periode und Amplitüde sich gegenseitig aufheben, wenn sie so nebeneinander verlaufen, daß die Maxima der einen und die Minima der andern zusammenfallen. Das ist aber in diesem Falle so. Noch leichter ist das zu erkennen, wenn man die Unteroktave ins Auge faßt (2. Oberton):



Da sieht man gleich, daß b nur das Negativ von a ist. Man kann daher unbedingt sagen: Jeder Ton bringt zugleich die Reihe seiner Untertöne hervor, dieselben müssen aber unhörbar bleiben, weil sie — mehrmals vertreten — sich selbst aufheben. Daß aber diese latente Existenz der Untertöne dennoch hörbare Folgen haben kann, beweisen die Kombinationstöne. Die Reihe der Untertöne ist, wie schon bemerkt, der der Obertöne vollkommen gegensätzlich, z. B. für c^3 (* zu hoch):



Die Notwendigkeit der Hervorbringung der Untertöne ist also noch evidenter als die der Obertöne, sie sind eben implicite in jeder regelmäßigen Schwingungsform enthalten als das selbstverständliche Ergebnis jeder 2., jeder 3., jeder 4. usw. Schwingung des Haupttons. Was die Kombinationstöne anlangt, so definierten wir dieselben oben als Grundtöne der Obertonreihe, in welche die gegebenen beiden Töne mit kleinsten Ordnungszahlen gehören; jetzt dürfen wir sie definieren als die ersten gemeinsamen Untertöne der kombinierten Töne.

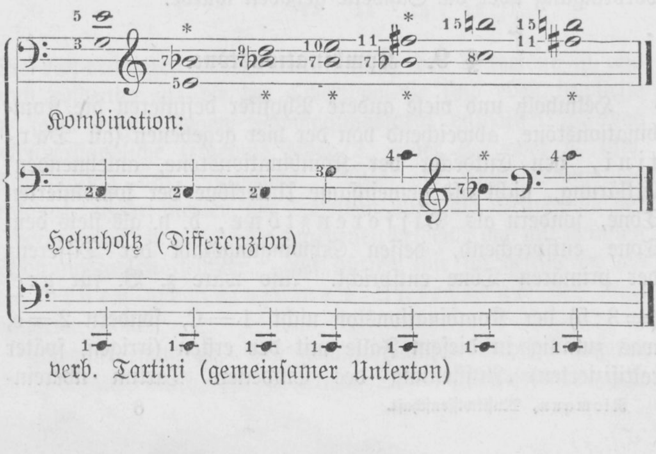
Nimmt man an, daß gewisse elastische Gebilde unseres Gehörorgans durch die einzelnen Schwingungsformen zum

Mitschwingen gebracht werden (Helmholtz, a. a. O. S. 225), so würde C als 3. Unterton von g nicht hörbar werden, weil die drei nebeneinander verlaufenden Schwingungsformen einander aufheben; ebenso würde es aber als 5. Unterton nicht hörbar werden können, weil die fünf Formen, in denen es e̲′ gibt, einander aufheben; also würde C, obgleich 8mal hervorgebracht, doch unhörbar bleiben. Nun fällt aber bei Kombination beider jedes fünfte Maximum von e̲′ zusammen mit jedem dritten Maximum von g, so daß in den Abständen der Zeiteinheiten von 3 Schwingungen von g bzw. 5 Schwingungen von e̲′ eine Superposition entsteht, welche C hörbar machen muß. Will man aber dagegen geltend machen, daß aus der Kombination der beiden Töne e̲′ und g doch kein hörbares C hervorgehen könne, da dasselbe in beiden einzeln durch Negation aufgehoben werde, so müßte man vielleicht das unbestreitbare Faktum, daß C dennoch hörbar wird, sobald g und e̲′ kombiniert worden, darauf beziehen, daß die Schwingungen von g und e̲′ nicht so gleichmäßig verlaufende sein können, daß eine vollständige Interferenz stattfände; daß aber das C sowohl bei g allein als bei e̲′ allein unter der Schwelle der Wahrnehmbarkeit bleibe und erst durch die doppelte Hervorbringung über die Schwelle gehoben würde.

§ 9. Kombinationstöne.

Helmholtz und viele andere Physiker definieren die Kombinationstöne, abweichend von der hier gegebenen (an Tartini, den Entdecker der Kombinationstöne, anlehnenden) Erklärung, nicht als gemeinsame Untertöne der kombinierten Töne, sondern als Differenztöne, d. h. als stets dem Tone entsprechend, dessen Schwingungszahl der Differenz der primären Töne entspricht. Also wäre z. B. für g : e̲′ (= 3 : 5) der Kombinationston nicht 1 = C, sondern 2 = c, was zufällig in diesem Falle mit der ersten (irrigen, später rektifizierten) Aufstellung des Entdeckers Tartini überein-kommt. Tartini stellte nämlich im „Trattato di musica“ (1754) den Ton 2 der Reihe als selbstverständlichen Kombinationston auf, verbesserte sich aber (De’ principj’ dell’ armonia 1767) mit der Entschuldigung, daß das eigenartige Timbre (qualità), nämlich die Einfachheit der Kombinationstöne leicht über deren Oktavlage täuschen könne (vgl. meine „Studien zur Geschichte der Notenschrift“ S. 102). Helmholtz stellte auch den Differenztönen eine zweite Art von (höheren) Kombinationstönen gegenüber, die er **Summationstöne** nannte. Mit Recht machte Arthur von Öttingen (Harmoniesystem in dualer Entwicklung, 1866) darauf aufmerksam, daß nicht die Summe, sondern das Produkt der relativen Schwingungszahlen (Ordnungszahlen als Obertöne) einem auffallend starken höheren Kombinationston entspricht, z. B. für g : e′ (3 : 5) nicht c″ (Summationston = 3 + 5 = 8), sondern h″ (Multiplikationston, v. Öttingens „phonischen Oberton“, 3 . 5 = 15). Hier mögen eine Anzahl Kombinationen mit den resultierenden Kombinationstönen folgen, und zwar nach beiden Angaben (Helmholtz und Tartini- v. Öttingen):

a) **Tiefere Kombinationstöne.**



b) Höhere Kombinationstöne.

Die Kombinationstöne sind leicht zu beobachten an Instrumenten mit aushaltendem Ton (Harmonium, Violine usw.). Man wird sich leicht überzeugen, daß die Multiplikationstöne stärker sind als die Summationstöne.

Daß die von Helmholtz als Differenztöne und Summationstöne bezeichneten Töne tatsächlich auch vorhanden sind, wenn auch in geringerer Stärke, ist allerdings gewiß. Von unserm Standpunkte aus sind dieselben aber nur einzelne aus einer großen Gruppe sekundärer Kombinationstöne, nämlich Kombinationstöne der Obertöne. Wir geben nun ein Beispiel, die Kombination g : e̲′: mit den nächsten sekundären Kombinationstönen:

Wie leicht zu ersehen, muß sich die ganze Reihe der Obertöne von C durch die Kombinationstöne der Obertöne von g und e′ ergeben. Es ist in der Tat leicht, eine größere Zahl höher als das Kombinationsintervall liegender Töne der Reihe selbst mit unbewaffnetem Ohr zu erkennen. Vgl. übrigens meine kleine Spezialuntersuchung „Die objektive Existenz der Untertöne in der Schallwelle“ (1875 in der Allgemeinen Deutschen Musikzeitung).

Die Kombinationstöne sind das einfachste Mittel, jedes beliebige natürliche Intervall wie 3:5, 3:7 5:7, 8:9, 9:10 rein zu stimmen; c″ : d″ ist rein gestimmt als 8 : 9, wenn der Kombinationston C ist, als 9 : 10 dagegen, wenn derselbe $_1$B ist. Um irrationale Intervalle, wie deren die Temperaturen erfordern, auch nur annähernd genau stimmen zu können, muß man seine Zuflucht zum Abzählen der Schwebungen nehmen.

§ 10. Schwebungen und tiefste Töne.

Helmholtz' „L. v. d. Tonempfindungen“ macht einen streng durchgeführten Unterschied zwischen Schwebungen und Kombinationstönen; ob mit Recht oder nicht, muß ich dahingestellt lassen. Jedenfalls erweisen auch seine Ausführungen, daß bei Kombination annähernd gleichgestimmter Töne die Anzahl der Schwebungen der relativen Einheit der Schwingungszahlen entspricht, daher den ersten gemeinsamen Unterton geben müßte, wenn derselbe nicht unterhalb der Schwelle der tiefsten wahrnehmbaren Töne läge. Nach Helmholtz liegen das Maximum von Schwebungen, die noch als solche empfunden werden (etwa 30 in der Sekunde), und der tiefste wahrnehmbare Ton (etwa 33 Schwingungen) dicht beieinander, wenn nicht ineinander. Die Schwebungen gehen, wenn ihre Zahl weiter wächst, in ein tiefes Summen über, d. h. werden ein sehr tiefer Ton; der Ton wird zum Dröhnen oder Knarren, wenn seine Schwingungszahl unter 30 sinkt. Da Helmholtz den Schwebungen in seinem Werke eine besonders bedeutsame Rolle zugewiesen hat — sie sind ihm Kennzeichen der Dissonanz (eine Definition, der schon Lotze in der „Geschichte der Ästhetik in Deutschland“ und v. Öttingen in dem „Harmoniesystem in dualer Entwicklung“ gegenübergetreten sind), so muß für ihn „G : ,D mit 48 : 72 Schwingungen, also 24 Schwebungen, eine starke Dissonanz sein, während es für den Musiker eine reine Quinte bleibt, die, mag sie noch so schwer aufzufassen sein (wegen der großen Tiefe), doch gewöhnlich Konsonanz sein wird (worüber im 3. Kapitel mehr).

Geben wir die Unterscheidung von Schwingungen und Schwebungen auf, zumal dieselbe auch im Rahmen der Helmholtzschen Untersuchungen insofern gegenstandslos ist, als jede Schwebung genau so ein tonerregender Bewegungsanstoß sein muß wie jede Schwingung, so können wir sagen: die Schwebungen repräsentieren die absolute Schwingungszahl eines Grundtones von sehr großer Tiefe. So wie das Intervall c′ : d′ als 8 : 9 gestimmt den Ton $_1$C als Kombinationston ergeben muß, welcher zirka 33 Schwingungen in der Sekunde macht (was für c′ : d′ die Schwingungszahlen 8 . 33 : 9 . 33 = 264 : 297 ergibt), so muß g′ : $\underline{\underline{\text{gis}}}$′ als 24 : 25 gestimmt (396 : 410$^1/_2$) den der relativen Einheit seines Quotienten $\left(\frac{396}{24}\right.$ oder $\left.\frac{410}{25}\right)$ entsprechenden Ton als Kombinationston ergeben, nämlich das bereits nicht mehr als Ton vernehmbare $_2$C mit 16$^1/_2$ Schwingungen. Stimmt man nun aber gar $\underline{\text{e}}$′ : e′ als 80 : 81 (330 : 334$^1/_8$), so muß der Kombinationston ebenso gleich der Differenz der Schwingungszahlen = 4$^1/_8$ = $_4$C sein, was ganz dasselbe ist, als wenn Helmholtz sagt, daß $\underline{\text{e}}$′ : e′ in der Sekunde 4$^1/_8$ Schwebungen hören lassen muß. Selbst auf die Gefahr hin, daß diese Deduktion nicht den höchsten Anforderungen der mathematischen Akustik entspräche (es pflichten ihr aber viele Akustiker bei), wäre sie wegen ihrer Einheitlichkeit und praktischen Verwendbarkeit für alles Stimmungs- und Temperaturwesen vorzuziehen*). Wer dem Rechnungswesen unsers ersten Kapitels

*) Helmholtz' Exemplifikationen (S. 285 d. L. v. d. T.) stimmen übrigens hierzu sehr gut h′ : c″ mit 33 Schwebungen (Kombinationston $_1$C) schwirrt merklich, ebenso $\underline{\text{h}}$″ : c‴ mit 66 Schwebungen, während b′ : c″ mit ebenfalls 66 (dessen Kombinationston aber fast eine Oktave

gefolgt ist, wird unschwer einsehen, von welcher Bedeutung das Einstimmen mittels der hörbaren und der zählbaren Kombinationstöne für die Herstellung von Instrumenten mit 26, 36 oder 53 Stufen in der Oktave sein muß. Nach W. Preyers Untersuchungen („Über die Grenzen der Tonwahrnehmung", 1876) vermögen geübte Musiker noch eine Tonhöhendifferenz von $^1/_2$ Schwingung in der zweigestrichenen Oktave zu unterscheiden; das würde für g'' mit 792 Schwingungen den logarithmischen Wert (auf Basis 2) 0,00090, d. h. kaum $^2/_3$ Schisma ergeben; dieses Intervall ist mit Hilfe der Schwebungen (aller zwei Sekunden eine Schwebung) einstimmbar, wenn auch nicht leicht — ich zweifle aber, daß ein Musiker, der nicht auch diese langsamen Schwebungen verfolgt, den Unterschied der Stimmung erkennen wird (sonst wären ja auch die Werte der 53stufigen Skala immer noch nicht rein zu nennen!).

§ 11. Breite der Tonhöhenlokalisation.

Über eine sehr wichtige Tatsache findet sich in den akustischen Lehrbüchern wenig oder nichts, nämlich darüber, daß unser Ohr sich abfinden läßt mit Tongebungen, die nicht wie der mathematische Punkt dimensionslos sind, sondern eine gewisse Breite nach oben und unten haben. Man denke z. B. an das Tutti der Violinen eines stark besetzten Orchesters, an das volle Werk der Orgel, an einen großen Chor mit 50 oder 100 dieselbe Stimme Singenden. Der einzelne Instrumentalist oder Sänger gibt nicht reine Tonverhältnisse, vielmehr sind oft große Differenzen zwischen zu hoch und zu tief Singenden und Spielenden, und doch erscheint die Tonhöhe als eine einheitliche; auch in der Orgel verschwindet die Verstimmung einzelner Töne oder gar Register. Helmholtz erweist (in Beilage XIV der L. v. d. T.), daß die Tonhöhe bei Schwebungen

---

näher am Intervall liegt) nicht schwirrt. Mit andern Worten: je weiter ein Intervall vom Grundton abliegt, destomehr hört unsere Fähigkeit auf, seine Beziehung zu diesem als solche zu verstehen, und wir hören statt des Tones mehr oder minder nur die schwirrende Bewegung. Deshalb ist auch e' : g'' (Kombinationston $_1$C = 33 Schwingungen der Schwebungen) von ganz anderer Wirkung!

einfacher Töne über den höheren Ton hinauf und unter den tieferen herunter schwankt; auch findet er (S. 279), daß langsame Schwebungen aufs Ohr durchaus keinen unangenehmen Eindruck machen, ja langgetragenen Akkorden etwas Feierliches geben können. Daß das Violintutti jedes Orchesters starke Schwebungen geben muß, ist kaum zweifelhaft; ob nicht auch da ein Auf- und Ab-Schwanken der Tonhöhe in engen Grenzen anstatt eines wirren Durcheinanders eintritt, ist wohl noch nicht hinreichend untersucht worden. Ganz rein gestimmte Quinten klingen bekanntlich stumpf gegenüber unbedeutend schwebenden. Das Tremolieren der menschlichen Singstimme, das viele gar sehr goutieren, und das auch am rechten Ort wirklich packen kann, ist auch ein Schwanken der Tonhöhe. Gottfried Silbermanns Cembal d'amour und alle bebenden Orgelstimmen wie Unda maris, Vox humana usw. sind Effekte, die direkt mit der unbedeutenden Verstimmung rechnen — sollte nicht für unser Tonempfinden wirklich eine gewisse Breite der Tonhöhenlokalisation anzunehmen sein, welche uns gestattet, den Ton als stehend und bleibend zu erkennen, obgleich er schwankt, und als rein, obgleich er nicht ganz rein ist?

Daß wir nicht bedingungslos auf die Wahrnehmung des akustischen Sachverhalts angewiesen sind, sondern, daß unser auffassender Geist sich souverän eklektisch verhält und — wofern es nicht gar zu arg durcheinander geht — hört, was er brauchen kann, ist eine der tröstlichen Tatsachen der musikalischen Ästhetik. Überblicken wir nur die kurze Zusammenstellung dieses Kapitels, so stehen wir vor einer Fülle von Begleiterscheinungen, welche gewollt oder nicht gewollt in Gesellschaft der durch die Notenschrift, durch die Idee des Komponisten geforderten Töne auftreten und, wenn sie alle wirklich aufgefaßt und zu Bewußtsein gebracht würden, ein stetes Charivari bedingen würden. Die neuere Akustik neigt vielfach dazu, die Leistungsfähigkeit des Ohres in bezug auf Tonhöhen*unterscheidung* zu überschätzen, seine Leistungsfähigkeit im *Überhören*, im Ausscheiden des Störenden, im Herausschälen des idealen Kerns aus dem Erdenschmutz dagegen zu unterschätzen. Die Versuche der Durchführung reiner Stimmung beweisen das. Sie gehen von dem Fehlschluß aus, daß unser Ohr durch die Beschäftigung mit ungenauen Tonwerten verdorben werde — was ganz unmöglich ist; das Ohr urteilt heute wie in aller Vergangenheit und Zukunft im Sinne reiner Harmonien, und daß es darin Fortschritte gemacht hat, beweist doch wohl die gewaltige Entwicklung der Harmonik in den letzten 200 Jahren. Die reine Stimmung würde, wenn sie nicht an der praktischen Undurchführbarkeit scheitern soll, eine gewaltige Einschränkung im Akkord- und Modulationswesen bedingen. Und was wäre dabei gewonnen: etwas sinnlicher Wohlklang der Einzelharmonien — auf Kosten tieferen, die Seele gewaltig packenden Ausdrucks!

§ 12. Klangfarbe.

Nicht eigentlich in den engen Kreis unserer die wissenschaftliche Begründung der Musiktheorie angehenden Betrachtung gehört die Erklärung des Wesens der Klangfarbe, über die wir uns deshalb ganz kurz fassen wollen. Nach Helmholtz' Darstellung gehören Konsonanz, Dissonanz und Klangfarbe zusammen; von Konsonanz und Dissonanz haben wir bisher beinahe noch gar nicht gesprochen (diese Begriffe gehören ins dritte Kapitel), und die Klangfarbe können wir nur mit einer Entschuldigung berühren. Die Klangfarbe ist nach Helmholtz abhängig von der Zusammensetzung der Klänge aus Einzeltönen (Obertönen). Gedeckte Orgelpfeifen und Klarinetten haben keine geradzahligen Obertöne, während alle andern Musikinstrumente die vollständige Reihe (wenn auch diese oder jene Töne mehr hervortretend) haben; sonach müßten sich aber Gedackt, Quintatön usw. und Klarinette viel ähnlicher, und gegenüber allen andern Instrumenten in der Klangfarbe viel verschiedener sein, als sie tatsächlich sind. Unbestreitbar ist allerdings, daß hohe Obertöne den Klang scharf und glänzend machen, und daß ihr Fehlen den Klang dunkel und weich macht; es scheint jedoch, daß es sich dabei viel mehr um unharmonische hohe Begleitgeräusche als um die eigentlichen harmonischen Obertöne handelt. Saiten-instrumente, Hörner, Trompeten, Posaunen und Flöten, Oboen, Fagotte haben sämtlich einen kräftigen, gesunden Klang und ermangeln nicht der ersten, den guten Kern des Klangs ausmachenden Teiltöne; und doch — welcher Unterschied in der Klangfarbe dieser aller! Stehen sich in der Klangfarbe nicht Flöte oder Oboe und Klarinette näher als Violine und Trompete? als Fagott und Posaune? Ohne Zweifel hatte Prof. K. von Schafhäutl recht, als er die Helmholtzsche Theorie der Klangfarbe, welche z. B. für Blasinstrumente gleicher Röhrenform und Anblaseweise gleiche Klangfarbe behauptet, einer strengen Kritik unterzog. Klavier bleibt Klavier (in der Klangfarbe), mag die Anschlagstelle für die Saite gelegt werden wie sie wolle. Aber eine Trompete ist keine Trompete, wenn sie aus Holz gemacht wird (womit nicht bestritten werden soll, daß das Volumen des Tones ein ähnliches werden wird). Die Orgelbauer wissen recht gut, daß zu einem guten Prinzipal nicht viel Blei verwendet werden darf, und daß Holz dafür statt des Zinns ein elender Notbehelf aus Sparsamkeitsgründen ist. Das Kratzgeräusch (in mäßigen Grenzen und ohne Überschlagen des Tons) gehört zu den Streichinstrumenten, das Klappern (wenigstens das Klappen) zum Klavier, das Schmettern der Blechstürze zu Horn und Trompete usw. Übrigens enthält Helmholtz' Werk über alles dieses selbst eine Fülle treffender Bemerkungen, die nur aber die Hauptdefinition stark in Frage stellen.

Wenn man die Helmholtzsche Erklärung der Klangfarbe in dieser Weise durch die Schafhäutls und anderer ergänzt, so scheint auch das große Rätsel nicht allzu schwer lösbar, warum der Zusammenklang mehrerer Instrumente verschiedener Farbe, wie z. B. Violine und Klavier oder Oboe und Horn, nicht zu einem dritten verschmilzt, sondern in der Auffassung getrennt bleibt, so daß man mehr oder minder gut jedes Instrument heraushören kann. Die die Klangfarbe ausmachenden Begleitgeräusche sind eben so heterogen, daß sie sich in keiner Weise so miteinander verbinden lassen wie die einfachen Töne des mittleren Tongebietes.

Die Kunst der Instrumentation beruht darin, die grellen Unterschiede im Zusammenklang zu überbrücken und in getrennter Anwendung charakteristisch zu verwenden.

III. Kapitel.

Tonvorstellungen (psychologisch).

§ 13. Tonverwandtschaft.

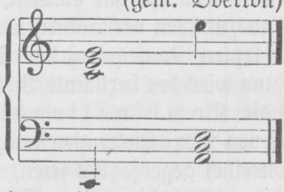
Aus dem zweiten Kapitel wissen wir, daß die Töne unserer Musikinstrumente keineswegs einfache Töne, sondern vielmehr aus einer großen Zahl einfacher Töne zusammengesetzte Klänge sind. Zunächst steht fest, daß fast alle musikalischen Klänge über dem stärksten und tiefsten Tone, nach welchem sie allgemein benannt werden, die vollständige Reihe der im vorigen Kapitel aufgewiesenen Obertöne (nach der Höhe zu immer schwächer werdend) enthalten. Man hat auf diese Erkenntnis die Lehre von der Verwandtschaft der Töne (Klänge) aufgebaut, und zwar war der erste, welcher versuchte, aus den akustischen Phänomen Nutzen für die Musiktheorie zu ziehen, der Franzose Jean Philippe Rameau (Traité de l'harmonie, 1722). Die Einführung der Mixturen in die Orgeln, die spätestens im fünfzehnten Jahrhundert erfolgte (die 1508 von Barthold Hering erbaute Orgel der Marienkirche zu Lübeck hatte bereits im Oberwerk: Mixtur, Rauschquinte und Scharf [Zimbel], im Rückpositiv: zwei Mixturen und Zimbal, und im Pedal: Mixturbaß und Dezembaß [Quint $10^2/_3$]), beweist bereits eine klare Erkenntnis des zusammengesetzten Wesens der Klänge, und auch die Bemühungen Arnold Schlicks um die Herstellung reiner Tonverhältnisse (vgl. oben § 4), setzen dieselbe voraus. Doch war der französische Akustiker Sauveur („Principes d'acoustique et de musique, 1700—1701, Application des sons harmoniques (!) à la composition des jeuy d'orgue", 1702) der erste, welcher diese Beobachtung wissenschaftlich formulierte. Rameau wies dann zuerst darauf hin, daß die ersten 6 Töne der Obertonreihe (anfänglich hörte er übrigens nur den 3. und 5.) den Durakkord des Grundtones ergeben. Die sehr mit Unrecht wenig beachtete Schrift Rameaus „Génération harmonique" (1737), an welcher die Physiker de Mairan und de Gamaches anscheinend starken Anteil haben, macht sodann einen sehr bemerkenswerten Versuch, auch das Problem der Mollkonsonanz zu lösen, welches im Traité von 1722 einige Verlegenheit bereitet hatte. Er spricht da geradezu aus, daß die *Kommensurabilität der Schwingungsverläufe die eigentliche Ursache der Konsonanz* ist*), und daß die Konsonanz ebenso wie in der Beziehung der Aliquoten auf die Einheit auch aus der der Vielfachen (der Saitenlänge) auf die Einheit zu suchen sei und findet in dem Phänomen des Mittönens dafür einen Beleg. Die sehr merkwürdige Schrift redet aber auch bereits ganz in der Weise Helmholtz' von der Analyse der Klänge durch einen Apparat in der Spitze der Schnecke und von den Schwebungen als Kennzeichen der Dissonanz. Da Rameau kein Gelehrter, sondern ein bedeutender Tondichter von gesundem Instinkt war, so hat er diese Ideen der beiden Physiker nicht voll auszunützen verstanden, und seine Konsonanzlehre entbehrt der letzten Konsequenz der Durchführung. In ganz ähnlichem Sinne wies der berühmte Violinist *Giuseppe* Tartini (1754) auf die *Kombinationstöne* als Beweismittel der Existenz von Tonbeziehungen nach unten, die denen nach oben (Obertonreihe) gegensätzlich seien, und betonte gleich Zarlino (1558) die vollständige Gegensätzlichkeit des Dur- und Mollprinzips, und von Neueren griff besonders Moritz Hauptmann (1853) diese Idee wieder auf: nichtsdestoweniger herrscht auch heute noch auf dem Gebiete der Musikwissenschaft die Ansicht, daß die Durharmonie von der Natur vorgebildet sei, die Mollharmonie dagegen nicht. Nach Helmholtz ist der Mollakkord ein getrübter Durakkord (Terz zu niedrig) oder aber etwas Zusammengesetztes aus Bestandteilen zweier Klänge (z. B. $\underline{a}$: c : $\underline{e}$ aus $\underline{a}$: $\underline{e}$, das dem $\underline{A}$-Klange, und c : $\underline{e}$, das dem $_1$C-Klange angehört; Dr. O. Hostinsky [„Die Lehre von den musikalischen Klängen", 1879] fügt ganz folgerichtig noch hinzu, daß $\underline{a}$: c dem $_1$F-Klange angehört, so daß also anstatt einer Klangeinheit eine Vertretung dreier Klänge im Mollakkord vorliegt!). Wenn die Tatsache, daß im einzelnen Klange die Elemente des Durakkordes enthalten

*) Vgl. meine „Geschichte der Musiktheorie", S. 457 ff.

sind, diese Elemente als zur Einheit des Klanges zusammengehörig erweist, so ist es doch ein vergebliches Beginnen, den Mollakkord von demselben Phänomen aus erklären zu wollen; das viel zu komplizierte Resultat ist ein dem Musiker durchaus ungenügendes, wie bereits Goethe mit seinem scharfen Verstande erkannte (vgl. Ferd. Hiller „Goethes musikalisches Leben", 1883).

Den geistreichsten Versuch, trotz der Beschränkung auf das Phänomen der Obertöne, doch eine Einheitsbeziehung für den Mollakkord zu gewinnen, machte Prof. Dr. Arthur v. Öttingen in seinem „Harmoniesystem in dualer Entwicklung" (1866), indem er darauf hinwies, daß der Durakkord aus Obertönen eines und desselben Grundtones bestehe, der Mollakkord dagegen seine Einheit in einem gemeinsamen Obertone finde:

(gem. Oberton)



(gem. Unterton)

Der Verfasser dieses Buches hat wiederholt unternommen, eine der Obertonreihe entgegengesetzte Untertonreihe als objektiv existierend oder subjektiv (im Ohre) entstehend nachzuweisen, und seine Nachweise haben die Beachtung der Vertreter der exakten Wissenschaft, wenn auch nicht unbedingte Zustimmung, gefunden. Er wurde dabei stets von der für jeden Musiker unumstößlich feststehenden Überzeugung geleitet, daß Dur und Moll koordinierte Begriffe sind, und daß es durchaus dem Bewußtsein des Musikers widerspricht, wenn Moll gleichsam zwischen Konsonanz und Dissonanz als eine Art Mittelglied eingeschoben wird. Die Schwebungen, welche die Mollterz gegen die Durterz des Grundtones macht (für c : $\overline{\text{es}}$: g die zwischen $\overline{\text{es}}^2$ und $\underline{\text{e}}^2$ bemerklichen) müssen nach Helmholtz' ganzer Darstellungsweise notwendig den Mollakkord zur Dissonanz stempeln.

Alle diese Versuche werden aber überflüssig und entbehrlich, wenn man einen Weg betritt, auf welchen, abgesehen von der ganz in Vergessenheit geratenen Rameauschen Schrift von 1737, zuerst Prof. Dr. Karl Stumpff im zweiten Bande seiner „Tonpsychologie" (1890) hinweist, nämlich, wenn man die Obertöne als Begründung für die Konsonanz des Durakkordes aufgibt und ein höheres Prinzip als bestimmend annimmt, dem gegenüber das Phänomen der Obertöne nur als eine Exemplifikation erscheint. Stumpff findet ein solches in der „Verschmelzung" der Töne. Nachdem dies erlösende Wort einmal ausgesprochen, wird es aus der musikwissenschaftlichen Terminologie nicht wieder verschwinden.

Stumpff unterscheidet zweierlei Skalen („Dimensionen") für die Vergleichung der Töne, deren eine sich nur auf den Unterschied der absoluten Tonhöhe, die andere dagegen auf die größere oder geringere harmonische Verwandtschaft bezieht; wir wollen sie einfach die melodische und die harmonische nennen, müssen aber dazu bemerken, daß die melodische in diesem Sinne keine Stufen hat, sondern eine fortlaufende Linie ist. Rein melodisch (d. h. in bezug auf ihre Tonhöhe) sind zwei Töne einander um so ähnlicher, je geringer der Unterschied ihrer Tonhöhe ist; für die harmonische Ähnlichkeit (d. h. die Verschmelzbarkeit) ist dagegen eine ganz andere Skala, nämlich die uns bereits in ihrer Zweiseitigkeit bekannte Naturskala maßgebend. Beide Skalen haben kaum etwas miteinander gemein; nur passiert natürlich die kontinuierliche melodische Skala die Stufen der harmonischen, und die Stufen der letzteren liegen als Punkte innerhalb jener.

In welcher Weise sich Tonschwingungen letzten Endes in Tonvorstellungen umsetzen*), wird wohl niemals aufgehellt werden. Angenommen, die de Mairan-Gamachessche bzw. die

---

* Bei meiner Promotion in Göttingen (1873) stellte mir Hermann Lotze, der einer meiner Examinatoren war, als Schlußfrage dieses Problem, und ich gab mir alle erdenkliche Mühe, die Frage zu beantworten, von den Erschütterungen des Trommelfells bis hin zu den „Hirnschwingungen", und erwartete zitternd Lotzes Kritik. „Sehr hübsch," sagte er; „leider wissen wir alle aber darüber überhaupt gar nichts, es ist alles Hypothese."

Helmholtzsche Darstellung der Funktionen des Cortischen Organs oder der Membrana basilaris entspräche genau den wirklichen Vorgängen, so bliebe doch dann noch die Frage offen, ob die Erregung der auf einen bestimmten Ton (mit einiger Breite der Tonhöhe) reagierenden Faser weiterhin die Übertragung der Schallbewegung auf den ihr verbundenen Nerv oder nur die Reizung des Nerven bewirkt. Wenn gewisse Farben das Auge (den Sehnerv) mehr ermüden als andere, so scheint das doch zu beweisen, daß die Schwingungen des Lichtes nicht nur die Nervenendungen reizen, sondern denselben unterschiedene Leistungen zumuten. Ähnlich mag es auch mit den Gehörsempfindungen sein, und es muß doch gewiß als eine offene Frage bezeichnet werden, inwieweit die Einbildbarkeit der Bewegungsform eines Tones in die eines andern, wie wir sie im 2. Kapitel kennen lernten, auch noch für die letzten Umsetzungsprozesse zur Geltung kommt.

Wenn nun für das Gemeinbewußtsein des Musikers feststeht, daß der Mollakkord eine ebenso einheitliche Verbindung von Tönen ist, wie der Durakkord, so wird man nicht umhin können, den Rückschluß zu machen, daß es überhaupt zwei Formen der Tonverwandtschaft gibt, deren eine das Einfache mit seinen Vielfachen, die andere das Ganze mit seinen Teilen zusammenfaßt. Für das einzelne Intervall sind beide identisch, wenn man dabei von den Phänomenen der Obertöne oder der unter der Schwelle bleibenden Untertöne absieht, und vielmehr die gleichzeitige Hervorbringung zweier Töne durch verschiedene Instrumente ins Auge faßt. Erklingen C und c gleichzeitig, so wird die Kommensurabilität beider, d. h. die Ähnlichkeit der Bedingungen für Hervorbringung und Verlauf beider, sofort vom Ohr begriffen, natürlich nicht als die mathematische Tatsache, daß der eine Ton doppelt so schnell schwingt als der andere, oder daß die Schallwellenlänge des einen halb so groß ist als die der andern, auch nicht als die physiologische, daß etwa durch beide zum Teil dieselben Nervenenden erregt würden, wohl aber als die psychologische, daß die beiden Töne ohne Störung gleichzeitig verlaufen, in besonders vollkommener Weise verschmelzen. Treten zu diesen Tönen weiterhin die nächsthöheren Stufen der Naturskala g, c' und $\underline{e}'$, so wird wohl eine Bereicherung des Zusammenklanges, nicht aber eine Störung empfunden. Die gleiche Verschmelzbarkeit, wenn auch minder vollkommen, wird zu beobachten sein, wenn man nur c', e', g' zusammen angibt, deren Schwingungsform in der von C ihre höhere Einheit haben. Ganz dieselben Beobachtungen macht man aber, wenn man anstatt die Obertonreihe empor-, die Untertonreihe hinabsteigt, also z. B. zuerst c^2 mit c^1, weiter damit f, c und As verbindet, oder gleich nur c As und F zusammen angibt, welche hinsichtlich der Schallwellenlängen Vielfachen von c^2 und hinsichtlich der Schwingungszahlen einfachen Brüchen von c^2 entsprechen. In beiden Fällen erfolgt eine Verschmelzung, wie sie gleich vollkommen keine dritte Verbindung verschiedennamiger Töne ergibt (etwa c d g oder c e h usw.). Verbindet man dagegen einen Ton der Untertonreihe mit einem der Obertonreihe desselben Tones (von der Oktave abgesehen, worüber nachher), so stellt sich sogleich anstatt der Verschmelzung ein Widerspruch heraus, der um so schärfer erscheint, je entschiedener man die Doppelbeziehung dabei bewußt festhält. Verstehe ich g^2 als Verwandten der Obertonseite von c^1 und gebe dazu F, so erscheint dieses als fremdes Element; denke ich F als Verwandten der Untertonseite von c^1 und gebe dazu g^2, so ist dies der fremde Ton; denke ich mir dagegen c^1 und g^2 beide als Verwandte der Obertonseite von F, oder c^1 und F als Verwandte der Untertonseite von g^2, so ist der Widerspruch gemildert, aber nicht behoben. *Diese psychologischen Fakta stehen in scharfem Widerspruch zu den Ergebnissen der Mathematik und Physik, da in allen drei Fällen der objektive Sachverhalt derselbe ist.* Die Einbildbarkeit der Schwingungen von g^2 in die von c' ist ebenso zweifellos, wie die der Schwingungen von c' in die von F; dennoch ist der ästhetische Wert der drei Fälle ein durchaus verschiedener, je nachdem der eine oder der andere Ton, ja nachdem das eine oder das andere Quintintervall der Beurteilung zugrunde gelegt wird. Von F aus ist g^2 Oberton zweiter Ordnung, der nicht direkt mit F, sondern zunächst mit c^1 verschmilzt; von g^2 aus ist F

Unterton zweiter Ordnung, der nicht direkt mit g^2, sondern zunächst mit c' verschmilzt, von c^1 (g^2) aus ist F ein Unterton von c^1, von c^1 (F) aus ist g^2 ein Oberton von c^1. Wollte man endlich F g^2 zum Ausgang nehmen oder g^2 F (nach unten gedacht), so würden die beiden durch das dazwischentretende c verständlicher gemacht erscheinen.

Das Ergebnis dieses vorläufigen Ausblicks ist die Einsicht, daß es *zweierlei Weisen* gibt, *die Verwandtschaft* (Verschmelzbarkeit) *zweier Töne zu beurteilen, die im Sinne der Beziehung des Ganzen zu seinen aliquoten Teilen oder die der Beziehung des Einfachen zu seinen Vielfachen.* Diese mathematischen Begriffe sind aber auf dem Gebiete der Tonpsychologie in die musikalischen Qualitäten: Oktave, Duodezime, Doppeloktave, Septdezime umzusetzen. Nun ist aber weiter zu konstatieren, daß die *Oktave* in ganz besonderer Weise verschmilzt, wofür eine genügende Erklärung zu finden bisher niemandem gelungen ist. Wir müssen uns damit abfinden, daß es eben so ist. Töne, welche das heutige Tonsystem gleich benennt (z. B. C, c, c' usw.) sind für unser Empfinden und Vorstellen in noch ganz anderer Weise verwandt als die übrigen Töne der Naturskala. Vielleicht ist der Grund ein melodischer. Durchläuft die Singstimme (das älteste Musikinstrument) den Tonraum von irgendeinem Werte nur bis hinauf zu seiner Oktave (c — c'), so passiert sie eine große Zahl schwerverständlicher Werte (vgl. die Tabelle unsers ersten Kapitels), zwischen denen die Terz ($\underline{e}$) und die Quinte (g) als leichtest verständliche hervortreten, und zuletzt tritt die Oktave als das leichtest verständliche auf; man kann dieselbe Erfahrung auch abwärts mit den Verwandten der Untertonseite machen (c' — $\overline{as}$ — f — c).

Allerdings ist der Terzton nicht als Terz (5 : 4), sondern als Septdezime (5 : 1) am leichtesten verständlich, und der Quintton nicht als Quinte (3 : 2), sondern als Duodezime (3 : 1). Der Singstimme sind aber diese großen Intervalle ($c : g^1$, $c : \underline{e}^2$) fast ganz versagt, während die Oktave ihr noch für eine Anzahl Töne bequem zur Verfügung steht. Hiermit ist freilich noch nicht erklärt, warum die Oktave der Oktave uns direkt verständlich erscheint (konsonant), die Quint der Quint (Duodezime der Duodezime) dagegen nicht (dieselbe ist Dissonanz). Mathematik, Physik und Physiologie stehen ratlos vor dem Problem, und es bleibt als einziger Weg die Annahme eines psychologischen Akts, wie deren der weitere Fortgang noch mehr erfordert.

Wie schon bemerkt, sind der 7., 11., 13. usw. Oberton in manchen Klängen keineswegs schwach vertreten; dieselben sind überhaupt aus der Reihe der Obertöne und der Untertöne gar nicht wegzuleugnen, und auch ihre „Verschmelzbarkeit" kann nicht in Frage gezogen werden, so daß Helmholtz gewiß nicht zu viel behauptet, wenn er sagt, daß g : *b′ (3 : 7) ungefähr ebenso wohlklingend sei wie $\underline{e}'$: g² (5 : 12). Dennoch weiß unser Musiksystem und das in demselben erzogene (oder: das dasselbe bestimmende?) Ohr von der Septimenverwandtschaft nichts. Das Ohr (unser auffassender und Tonfolgen und Zusammenklänge logisch ordnender Geist) deutet vielmehr die natürliche Septime und ebenso die andern höher als der 5. gelegenen primären Obertöne und die entsprechenden Untertöne um zu Werten der entgegengesetzten Verwandtschaftsart, denen sie annähernd entsprechen. Wie das geschehen kann, werden wir weiterhin sehen; zunächst wollen wir das Faktum konstatieren und den 7., 11., 13., 17., 19. usw. Teilton beider Reihen als eliminiert ansehen.

Weiter ist zu konstatieren, daß für alle Tonverhältnisse, welche sich im Sinne der beiden Verwandtschaftsreihen in zwei Faktoren zerlegen lassen, das Ohr eine solche Zerlegung wirklich vornimmt. Im einzelnen Klange ist der neunte Teilton so gut vorhanden wie der dritte, und seine Schwingungsform verträgt sich offenbar mit der der ganzen Seite ebensogut (als Aliquote) wie die des dritten. Dennoch lehnt das Ohr die direkte Beziehung des neunten Teiltones auf den Hauptton ab und schiebt zwischen beide als Mittelglied den dritten Teilton. Mit andern Worten: das Ohr unterscheidet direkte Verwandte und Verwandte zweiten Grades.

Ganz analog nun wie das Ohr die höheren primären Verwandten umdeutet und die sekundären von den primären scheidet, richtet es eine weitere Grenze auf zwischen der Oktave und allen andern primären Verwandten. Mathematik, Physik und Physiologie können das eine so wenig erklären wie das andere. Der große Mathematiker Leonhard Euler (1739) stellt die fünfte Oktave (1 : 32 C : c^4) in der Skala der Konsonanzen ganz folgerichtig hinter die schärfsten Dissonanzen (z. B. 1 : 15 C : $\underline{h}^2$), weil ihr Schwingungsquotient komplizierter ist; und Helmholtz muß zugestehen, daß ein Grundton mit einem seiner Obertöne keine Schwebungen geben kann, d. h. konsonieren, vollständig verschmelzen muß.

Nun liegt aber der psychologische Sachverhalt so: die Superposition noch so vieler Oktaven ergibt immer nur wieder Töne, welche dem Ausgangston in ähnlicher Weise nahestehend erscheinen, mit ihm in *vollkommenster* Weise verschmelzen wie die erste Oktave; dagegen ergibt bereits die Superposition einer zweiten Duodezime einen Ton, den das Ohr als direkten Verwandten ablehnt (z. B. C (g) d^2). Wir müssen daher psychologisch die Identität (Äquipollenz) der Oktavtöne anerkennen, mit der Reserve, daß das Ohr nur eine verschiedene Farbe der Oktavtöne, je nach ihrer melodischen Entfernung, bemerkt. Deshalb ändert auch die Superposition des Oktavverhältnisses auf irgendein anderes Tonverhältnis (z. B. das der Duodezime), überhaupt die Versetzung eines Tones um eine oder mehrere Oktaven nach oben oder unten, dessen harmonischen Sinn nicht, sondern ist nur melodisch bedeutsam. Seit Jahrtausenden werden daher Oktavtöne gleich benannt.

So bleibt denn von der zunächst endlos verlaufenden harmonischen Verwandtschaftsreihe (in ihrer zweiseitigen Richtung) schließlich nur ein kleiner fester Kern übrig:

1. *Oktaven (gleichbedeutende Töne*, gleichnamige Töne in höherer und tieferer Lage);

2. *direkt verwandte, anders benannte Töne* (Duodezime [Quinte] und Septdezime [Terz] nach oben und nach unten);

3. *Verwandte zweiten Grades* (Superpositionen der Verhältnisse von 2).

§ 14. Klang, Klangvertretung.

Der erweiterte Begriff des Tones umfaßt somit den einzelnen Ton und seine Oktaven nach oben und unten. Daß der Ton, wie ihn unsere Musikinstrumente hervorbringen, außer den Oktaven noch eine Menge anderer höherer Töne mit sich führt und tiefere zu erzeugen imstande ist, müssen wir nun als eine sekundäre Erscheinung definieren, die wertvoll werden kann, aber mit dem Tone als solchem nichts zu tun hat, wie zur Genüge daraus geschlossen werden kann, daß ich den Ton c als mit as verwandt (als Terzton von as — wobei wir von jetzt ab die Oktavlage ganz unberücksichtigt lassen) verstehen kann, in welchem Falle die sämtlichen anders als c benannten Töne der Obertonreihe nur fremd und störend erscheinen können (g, e, d, h — vom 7., 11., 13. ganz abgesehen). Die beiden Töne $\underline{e}$ und g zusammen angegeben, bringen den Kombinationston c ($_1$C) hervor; dennoch sind sie sehr wohl als zu h in inniger Verwandtschaftsbeziehung stehend faßbar, in welchem Falle der Kombinationston also hindernd im Wege stünde, *wenn wir ihn hören müßten.* Aber $\underline{e}$: g kann auch als zu c gehörig verstanden werden, und dann ist wieder der gemeinsame Oberton $\underline{h}$ ($\underline{h}^2$) störend.

Wir kommen also immer wieder zu derselben Beobachtung und Erkenntnis, daß die Beitöne (Ober- und Untertöne) nicht die Auffassung der Töne in dem einen oder dem andern Sinne *bestimmen*, sondern höchstens sie *unterstützen*; und darum fassen wir dieselben überhaupt nicht als Grundlage der Tonverwandtschaft, sondern nur als Formen ihrer Erscheinung. So wie an tönenden Körpern wie in der schwingenden Luft sich die Vereinbarkeit der Töne erweist, so findet sie sich auch auf dem Gebiete der Tonvorstellungen analog wieder, aber im Einzelfalle nicht in ihrer Zweiseitigkeit (nach oben und nach unten), sondern nach freier Wahl des Geistes stets nur in der einen oder der andern Richtung.

Nach der im vorigen Paragraphen aufgewiesenen Vereinfachung der beiden Verwandtschaftsreihen faßt die Tonvorstellung zur engeren Einheit zusammen entweder:

einen Ton mit seiner Oberquint und Oberterz, oder:
einen Ton mit seiner Unterquint und Unterterz.

Die erstere Form der Zusammenfassung, welche den **Oberklang** (Durakkord) ergibt, erklärt sich aus der Einbildbarkeit der aliquoten Schwingungen in die totalen, die zweite Form welche den **Unterklang** (Mollakkord) ergibt, erklärt sich aus der Summierung der Schwingungsperioden, bzw. Schallwellenlängen, denen vermutlich ähnliche Funktionen in den letzten Organen der Geistestätigkeit entsprechen.

Wie nun aber unsere Phantasie Vorstellungen der sichtbaren Welt auch selbsttätig hervorbringen kann, welche durchaus deren Verhältnissen entsprechen, so kann sie auch Tonvorstellungen erzeugen, welche durchaus unter denselben Bedingungen verlaufen, wie von außen angeregte. Nur dadurch wird es möglich, einen erklingenden Ton im Sinne eines andern zu verstehen, der gar nicht angegeben wird, ja einen Ton in anderm Sinne zu verstehen als dem durch die mit ihm zusammen auftretenden Töne nahegelegten (z. B. f nicht als 7. Oberton von G, auch wenn es mit g h d zusammen erklingt, sondern als 2. Unterquint von g). Selbstverständlich werden im konkreten Falle anderweite Gründe vorhanden sein müssen, wenn die scheinbar einfachste Auffassungsmöglichkeit durch eine kompliziertere verdrängt werden soll; diese Gründe können nur auf dem Gebiete der musikalischen Logik zu suchen sein, d. h. sie müssen sich ergeben aus dem Bestreben des Geistes, **in die Tonfolgen Zusammenhang und Einheit zu bringen.**

Bis jetzt kennen wir auf dem Gebiete der Tonverknüpfung nur die beiden Begriffe Ton (durch alle Oktavlagen) und Klang. Bleiben wir zunächst noch bei diesen stehen und suchen zu begreifen, welchen verschiedenen Wert für unser Empfinden und Vorstellen die beiden gegensätzlichen Klangprinzipien haben müssen.

Der Oberklang (Durakkord) ergab sich nur aus der Zusammenfassung der Teile (Aliquoten) mit dem Ganzen; in die Schwingungsform des Ganzen erschienen die der Teile eingebildet, der Hauptton war der tiefste, das Fundament, über dem sich aus ihm herauswachsend die Teiltöne erhoben. Der Durakkord wird deshalb als emporstrebend, aufgerichtet, festgegründet, positiv charakterisiert. Der Unterklang (Mollakkord) erschien uns zwar zum mindesten ebenso leicht begreiflich als Zusammenfassung des Einfachen mit seinen Vielfachen (der Schwingungsdauer, Schallwellenlänge), aber die Untertöne entzogen sich der bewußten Wahrnehmung, weil sie durch den erzeugenden Ton mehrmals hervorgebracht, einander gegenseitig aufhoben (vgl. § 8). Die Untertöne erstrecken sich vom Haupttone aus nach der Tiefe und treten nur unter besonderen Bedingungen vernehmbar hervor. Deshalb hat man den Mollakkord mit der Trauerweide verglichen, deren Zweige herabhängen, man hat ihn als negatives Äquivalent des Durakkords hingestellt. Die Tatsache der Empfindung, daß der Mollakkord, verglichen mit dem Durakkord, elegischer, melancholischer erscheint, macht es erklärlich, daß die wissenschaftliche Begründung der Musiktheorie ihm eine Art milder Dissonanz oder nur bedingter Konsonanz zusprechen zu müssen glaubte, was freilich die Musiker nie zugegeben haben.

Zweierlei scheint mir den eigenartigen ästhetischen Wert des Mollakkords zu erklären, einmal seine gleichsam verborgene Konsonanz (die Selbstvernichtung der Untertöne des einzelnen Tones) und dann die Richtung seiner Entwicklung nach unten. Das letztere ist durchaus ein melodischer Gesichtspunkt. Wären „nach oben" und „nach unten" ästhetisch gleiche Werte, so müßten auch Durakkord und Mollakkord ästhetisch gleiche Werte sein. Nach oben ist aber für alles musikalische Empfinden soviel wie heller werdend, sich aufschwingend, nach unten soviel wie dunkler werdend, herabsinkend (wie eben schon die Termini hoch und tief, oben und unten, hinauf und herab selbst andeuten, die ja doch von der Körperlichkeit entlehnte Ausdrücke für ganz heterogene Qualitäten sind). Die Moll- (Unterton-) Beziehungen erstrecken sich hinab in das Nachtgebiet, die Dur- (Oberton-) Beziehungen hinauf in das Lichtgebiet*). Jedenfalls scheint mir diese Be-

*) Eine weitere Erklärung des ästhetischen Gegensatzes zwischen Dur und Moll hat meine Broschüre „Das Problem des harmonischen Dualismus" (Leipzig, C. F. Kahnt Nachf.) beigebracht in dem Hinweise, daß die Obertonreihe den einfachsten Verhältnissen der wachsenden Geschwindigkeit der Folge der Einzelschwingungen (1, 2, 3, 4, 5) entspricht, die Untertonreihe dagegen derjenigen der verschiedenen Dimensionen der schwingenden Masse (1, 2, 3, 4, 5).

trachtungsweise vielmehr geeignet, den Charakter des Mollakkordes zu erklären als die Annahme eines veränderten (zu tiefen) Tones (der Terz) innerhalb des „allein von der Natur gegebenen" Dur-Akkords; es ist doch sonst gar nicht abzusehen, warum nicht die Veränderung irgendeines andern Tones des Dur-Akkords ein ähnliches Resultat ergeben sollte. Vom Standpunkte der arabisch-persischen Theorie der Konsonanz der Intervalle aus (vgl. § 2) erscheint aber der Dur-Akkord ebenso schwer in seiner Einheitsbildung begreiflich, wie von der einseitigen Obertontheorie aus der Moll-Akkord.

Da jeder Oberklang und jeder Unterklang nur drei verschiedene Töne (in dem oben entwickelten Sinne) hat, so ist zunächst *für jeden Ton eine sechsfache Bedeutung* möglich, je nachdem er einem Ober- oder Unterklange als Hauptton, Quintton oder Terzton angehört. Jede dieser Bedeutungen ist natürlich wieder ein anderer ästhetischer Wert, sofern die Staffel Hauptton, Quintton, Terzton im Oberklange eine aufwärts steigende, im Unterklange eine abwärts gerichtete ist. So kann z. B. der Ton c sein:

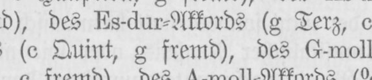
Durhauptton (in c^+)	Mollhauptton (in ^0c)
Durquinte (in f^+)	Unterquinte (in ^0g)
Durterz (in as^+)	Unterterz (in ^0e).

Weitere Bedeutungen können sich für c nur ergeben, wenn es als Verwandter zweiten Grades von einem andern als den hier notierten 6 Klängen aus vorgestellt wird. Damit kommen wir aber, indem wir über den Begriff des Klanges hinaustreten, zu den neuen Begriffen der Dissonanz und der Tonalität.

§ 15. Konsonanz und Dissonanz.

Konsonanz ist die Auffassung zweier demselben Klange angehöriger Töne im Sinne dieses Klanges; so und nicht anders ist heute der Begriff der Konsonanz zu definieren. Diese Definition schließt zugleich ein, daß selbst Töne, die als demselben Klange angehörig verstanden werden könnten, doch dissonant gegeneinander sind, sobald einer von ihnen als einen andern Klang vertretend verstanden wird; sie setzt aber zugleich die Beschränkung des Klanges auf Hauptton, Quintton und Terzton voraus (also ist z. B. d^2, obgleich 9. Oberton von C, doch nicht dem C-Klange angehörig, vielmehr Bestandteil des g-Klanges). Obertöne, Untertöne, Kombinationstöne, Schwebungen usw. kümmern uns auf diesem Gebiete nun gar nicht mehr, vielmehr haben wir es lediglich mit der *Vorstellung von Tönen im Sinne von Klängen* zu tun, und auch Temperatur und Stimmung sind Dinge, die von diesem Standpunkte weit abliegen. Die Tonvorstellung ist von allen diesen Schlacken gereinigt — denken wir dabei an den letzten Beethoven, der real erklingende Töne überhaupt nicht mehr hörte, sondern nur mehr durch die Phantasie erzeugte, vorgestellte!

Wenn ich c : g nicht im Sinne des C-Klanges höre, sondern im Sinne des G-dur-Akkords (g Hauptton, c fremd), des F-moll-Akkords (^{0}c; c Hauptton, g fremd), des As-dur-Akkords (c Terz, g fremd), des Es-dur-Akkords (g Terz, c fremd), des F-dur-Akkords (c Quint, g fremd), des G-moll-Akkords (^{0}d; g Unterquint, c fremd), des A-moll-Akkords (^{0}e; c Terz, g fremd) oder des E-moll-Akkords (^{0}h; g Unterterz, c fremd), so ist das nach aller Mathematiker Definition selbstverständlich konsonierende Intervall c : g eine Dissonanz, und zwar — und das ist wichtig! — ist in jedem der erklärten Fälle *einer* der beiden Töne der die Konsonanz störende, also dissonante Ton. Wir haben es also in erster Linie gar nicht mit dissonanten Intervallen, oder gar dissonanten Akkorden, sondern mit *dissonanten Tönen* zu tun*). Es ist daher sogar möglich und oft geboten, einen einzelnen Ton als dissonant vorzustellen, z. B. das dis folgenden Anfangs:



Freilich handelt es sich dabei nur um die abgekürzte Bezeichnung eines Denkprozesses; jeder musikalisch überhaupt

*) Rameau (Traité [1722] S. 97) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß man in jedem Einzelfalle zuerst feststellen müsse, welcher Ton dissonant ist (weil dissonante Töne im musikalischen Satze beschränkte Freiheit der Fortschreitung haben).

verständliche Ton, auch der allerdissonanteste, muß letzten Endes erklärt werden können als Vertreter (Prime, Quinte oder Terz) eines Klanges (Dur- oder Mollakkords). Nur steht dieser vertretene Klang nicht koordiniert, sondern subordiniert neben dem die Auffassung bestimmenden, innerhalb dessen der Ton dissonant erscheint, z. B.:

Hier ist der Klang, innerhalb dessen ich dis als Dissonanz (Störung der Klangeinheit) empfinde, der C-dur-Akkord; dis aber ist Terz der Terz von G (also dis), d. h. Vertreter des H-dur-Akkordes. Dieselbe Auffassung ist aber oben nötig, wo dis ganz allein auftritt.

Ein Ton, der nicht solchergestalt harmonisch erklärt werden könnte, wäre musikalischer Nonsens, oder wie man sagt, eine Diskordanz (z. B. ein verstimmter, unreiner Ton).

Nach Helmholtz sind Dissonanzen um so schärfer, je heftigere Schwebungen sie geben; nach unserer Darstellung müssen Dissonanzen um so schwerer zu verstehen sein, je entfernter die Verwandtschaft des dissonierenden Tons mit dem Klange ist, innerhalb dessen sie auftreten. Wir erhalten damit *für jeden dissonanten Ton einen eigenartigen Wert*, der vollständig auszudrücken wäre durch Bezeichnung des Verhältnisses des durch ihn vertretenen Klanges zum Hauptklange, abgekürzt durch Bezeichnung des Intervalls, das der Ton innerhalb des Hauptklanges bildet (z. B. dis im C-dur-Akkord als übermäßige Sekunde). Auf solchen Erwägungen beruht der Ausbau der in meinen theoretischen Schriften angewandten *neuen Bezifferung* (s. „Handbuch der Harmonielehre", „Katechismus der Harmonie- u. Modulationslehre", „Vereinfachte Harmonielehre", „Elementarschulbuch der Harmonie", „Katechismus des Generalbaßspiels" usw.), welche stets einen Dur- oder Moll-Akkord als Hauptinhalt der Klangvorstellung annimmt und dissonante Töne besonders bezeichnet, und zwar durch die schlichten Zahlen 2, 4, 6, 7 (für Moll II, IV, VI, VII) die einfachen (große Sekunde, reine Quinte, große Sexte, kleine Septime) und durch $^{<}$ (erhöht um einen halben Ton) oder $^{>}$ (erniedrigt um einen halben Ton) die von den einfachen 1—7 abzuleitenden (z. B. von c aus ist $4^{<} = \underline{\text{fis}}$, $6^{>} = \overline{\text{as}}$, $5^{<} = \underline{\underline{\text{gis}}}$, $\text{IV}^{>} = \overline{\text{ges}}$, $\text{II}^{>} = \underline{\underline{\text{heses}}}$ usf.). Man wird nach Darlegung des Prinzips leicht verstehen, welche verschiedenartigen Akkordbildungen entstehen können, je nachdem zum Klange ein oder mehrere dissonante Töne hinzu- oder an Stelle von Klangbestandteilen treten. Für die Fundamentierung der Theorie, welche uns hier allein beschäftigt, ist es aber ganz ohne Belang, wie im einzelnen Falle sich die Verhältnisse des Tonsatzes gestalten; einzig, wie der einzelne Ton und Klang zu *verstehen* ist, interessiert uns hier.

Wir haben oben darauf hingewiesen, daß die dem 7., 11., 13. usw. Obertone oder Untertone entsprechenden Töne in unserm Musiksystem nicht als solche verständlich sind, sondern umgedeutet werden. Außer Frage steht freilich, daß der 7. Oberton als solcher zur Geltung gebracht werden kann, wenn es sich um eine Klangverstärkung handelt, wie in den Mixtur-Registern der Orgel, unter denen in neuerer Zeit sich öfter Septimenstimmen finden. Auch der 11. oder gar 13. Oberton wäre in diesem Rahmen nicht unmöglich. Anders aber, wenn es gilt, *die einzelnen Töne als Vertreter von Klängen aufzufassen*: da machen wir ein für allemal bei der Terz (5. Teilton) Halt und lehnen die weiteren ab*).

Der C-dur-Akkord mit b (c^7) wird, auch wenn b so tief intoniert wird, daß es dem 7. Obertone entspricht, dennoch nicht als ungestörter C-Klang aufgefaßt, sondern vielmehr als c mit seinem Oberklang und seiner zweiten Unterquinte, die natürlich dissoniert und gegen den C-dur-Akkord nur durch Vermittlung von f verständlich ist; dieses f wird daher für die Behandlung des Akkordes eine bestimmende Rolle übernehmen,

*) Versuche mit weiter ab liegenden Naturtönen sind neuerdings von Impressionisten wie Claude Debussy gemacht worden, müssen aber ebenso im Sande verlaufen wie die Experimente Tartinis und Kirnbergers mit der natürlichen Septime. (Vgl. Geschichte der Musiktheorie S. 472.)

d. h. es wird ein Klang als Auflösung der Dissonanz erwartet, der f enthält (F dur oder F moll).

Der 11. Oberton von c ist ein Ton, der zwischen f und fis liegt (= 0,459431, etwas tiefer als fis); er würde, wenn er zum C-dur-Akkorde (mit oder ohne *b) hinzukäme (als selbständig hervorgebrachter Ton in reeller Stimmführung), durchaus mit fis oder auch ges verwechselt werden und dann entweder die Fortschreitung nach g oder die nach f erwarten lassen. Ebenso steht es mit dem 13. Oberton (as a). Dazu ist noch weiter zu bemerken, daß der 11. Oberton von c, obgleich er fis näher steht als fis, doch nicht mit dem ersteren verwechselt würde, weil fis zu g nicht in einem leichtverständlichen Verhältnis steht (fis ist dagegen die Terz der Quint von g). Die Verfechter der reinen Stimmung übersehen ganz, daß einer andern Stimmung zum Trotz, mag dieselbe noch so rein sein, das Ohr von einer gegebenen Harmonie aus andere Töne stets im Sinne leichtester Verständlichkeit faßt. Man bringe auf einem rein gestimmten Instrumente nach d : f : g : h in reiner Stimmung c : fes : g : c, das Ohr wird den C-dur-Akkord hören, weil fes in den Zusammenhang nicht paßt! Und das ist ein Glück; denn wie manches fes oder fes oder disis muß in der praktischen Musikübung für e passieren!

Die Erwartung einer bestimmten Fortschreitung nach einer Dissonanz oder nach einer Harmoniefolge setzt aber bereits den Begriff der Tonalität voraus.

§ 16. Tonalität.

Wie der einzelne Ton erst einen bestimmten Sinn und Wert erhält durch seine Stellung innerhalb des Akkords als Vertreter eines Klanges, so erhält ein Klang erst wieder einen bestimmten Wert und Sinn durch seine Stellung zu andern Klängen. Der C-dur-Akkord in C dur wirkt ganz anders, hat eine andere Bedeutung als in F dur, G dur oder F moll. Dort steht er im Mittelpunkte, und alle andern Akkorde werden von ihm aus beurteilt, hier wird er selbst von einem andern aus gemessen. War schon die Deutungsmöglichkeit des Tones eine beschränkte (sechs Bedeutungen als konsonanter Klangbestandteil), so ist die des Klanges noch beschränkter. Ein Klang (Dur- oder Mollakkord) ist entweder selbst Hauptklang (Tonika) oder er ist Dominante oder Subdominante. Alle andern Bedeutungen sind in ähnlicher Weise abgeleitete, sekundäre, wie die dissonanten Bedeutungen des einzelnen Tones. Der C-dur-Akkord ist dann Tonika, wenn er im Mittelpunkte der Harmoniefolgen steht und alle andern Akkorde von ihm aus verstanden werden; man sagt dann: es herrsche die Tonalität (Tonart) C dur. Vom C-dur-Akkord aus erscheint dann der G-dur-Akkord als der nächstverwandte der Obertonseite (als Dominante), der F-dur-Akkord oder auch F-moll-Akkord als der nächstverwandte der Untertonseite (als Subdominante), jener aus ihm heraus erwachsen (schlichter Quintklang), dieser ihm widersprechend (Gegenquintklang oder Seitenwechselklang).

In G dur (wo der G-dur-Akkord Tonika ist) muß also der C-dur-Akkord Gegenquintklang (Subdominante) sein; in F dur dagegen ist er schlichter Quintklang (Dominante) oder Seitenwechselklang (ebenfalls Dominante). In D dur erscheint der C-dur-Akkord als Subdominante der Subdominante, d. h. als ein der Tonart dieser entlehnter (chromatischer) Akkord, in B dur als Dominante der Dominante, ebenso als der Tonart dieser entlehnter (chromatischer) Akkord. Diese chromatischen Harmonien (2. Subdominante und 2. Dominante) können noch einfacher vorgestellt werden als chromatische Veränderungen der entgegengesetzten Dominante mit einem fremden Tone. Um diese Möglichkeit ganz zu verstehen, muß man bemerken, daß die Dominanten gewöhnlich gar nicht wie die Tonika rein, sondern mit einem charakteristischen dissonanten Tone auftreten, der der entgegengesetzten Dominante entlehnt ist: die Subdominante mit Sexte (= Quinte der Dominante), die Dominante mit Septime (= Hauptton der Subdominante). Der C-dur-Akkord in D dur ist daher verständlich als Dominante mit Septime ($a^7 = a : c : e : g$), aber chromatisch erniedrigter Terz, der C-dur-Akkord in B dur als Subdominante mit Sexte ($es^6 = es : g : b : c$), aber chromatisch erhöhtem Grundtone. In der Tat entspricht auch dieser Erklärung stets die Fortführung (erniedrigte Töne fordern Halbtonfortschreitung nach unten, erhöhte Halbtonfortschreitung nach oben).

Ähnlich ist der C-dur-Akkord in A moll, E moll, D moll zu verstehen, wo er nichts anderes ist als eine dissonante Form einer der Dominanten (in A moll = Molldominante mit großer Unterseptime = h : g : e [c], in E moll = Subdominante mit Sexte = e : c : a [g], in D moll = Molldominante mit Sexte = e : c : a [g]); noch weniger ist er selbst in H moll (= Akkord der neapolitanischen Sexte e : g : c, statt e : g : h [Subdominante]) und G moll (= Akkord der dorischen Sexte, Subdominante mit erhöhter Terz, für c : es : g).

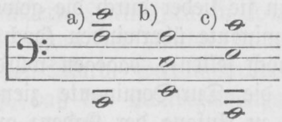
Ein Mollakkord ist ebenso entweder Tonika oder Subdominante oder Dominante. Der A-moll-Akkord bestimmt die Bedeutung aller andern Harmonien in A moll. Von ihnen aus ist der D-moll-Akkord der schlichte Quintklang (Subdominante), der E-moll-Akkord Gegenquintklang (Dominante). Man beachte wohl, daß die Mollbeziehungen auch über den Begriff des einzelnen Klanges hinaus den Durbeziehungen gegensätzlich, nämlich nach unten gehend sein müssen. Allerdings ist die gebräuchliche Kadenz der Molltonart (mit Moll-Subdominante aber Dur-Dominante), der Durkadenz nicht gegensätzlich sondern ähnlich, sofern auch in ihr der Tonika zunächst die Subdominante und dann zur Tonika zurückleitend die Dur-Dominante folgt. Aber es ist falsch, daraus zu folgern, daß auch die der Dur-Dominante sich enthaltende reine Molltonart eine gleiche Ordnung einhalten müßte, oder gar, daß eine Kadenzbildung für die Molltonart ohne die Durdominante nicht befriedigend möglich sei. Vor allem steht fest, daß gegenüber dem als Tonika gefaßten A-moll-Akkord sich der E-moll-Akkord geradeso spröde und widersprechend erweist wie gegenüber dem C-dur-Akkord in C dur der F-dur-Akkord, daß er also wirklich Gegenquintklang ist, daß dagegen von der Subdominante der Molltonart zurück zur Molltonika eine durchaus befriedigende Schlußwirkung sich ergibt, die auch oft genug mit Glück verwendet wird. Daß der Seitenwechselklang, der das helle Dur in das dunkle Moll hineinwirft, sobald er überhaupt zugelassen wird, sogleich eine dominierende Rolle usurpiert, ist aber gewiß nicht verwunderlich im Hinblick auf die ganz andere ästhetische Wirkung des Dur überhaupt. Die Partien stehen freilich nicht gleich: die Andunkelung des hellen Dur durch die Moll-Subdominante und die Aufhellung des dunklen Moll durch die Dur-Dominante sind eben doch zwei ganz verschiedene Werte, zwar Analoga aber Antipoden — unmöglich kann man von beiden gleiche Wirkung verlangen! Dur erhält durch die Moll-Subdominante eine verstärkte Perspektive nach der Mollseite (denn eine Perspektive nach der Mollseite ist auch die Dur-Subdominante), Moll dagegen eine weitere Perspektive nach der Durseite, diese bringt mehr Licht und jene mehr Schatten. Die Andunkelung des Dur durch die Moll-Subdominante an den Schluß der Kadenz zu rücken, liegt schwerlich ein ästhetisches Bedürfnis vor, vielmehr wird man sie lieber durch die gewohnte Folge Subdominante — Dominante überwinden (doch ist das Gegenteil weder unlogisch noch selten); dagegen würde die Aufhellung des Moll durch die Dur-Dominante ziemlich abgeschwächt werden, wenn sie zu Anfang der Kadenz aufträte (aber auch hier ist die umgekehrte Folge nichts Ungeheuerliches).

Noch muß ich hier eines Einwandes gedenken, der gegen die Durchführung der Gegensätzlichkeit von Dur und Moll geltend gemacht wird, nämlich der Bedeutung, welche auch für Moll den Grundton hat. Die vollständige Durchführung der polaren Gegensätze von Dur und Moll würde verlangen, daß im Moll der Baß Träger der Melodie wäre und der Sopran die harmonischen Haupttöne brächte; unmöglich wäre das zwar nicht, aber wenig tröstlich. Die Geschichte der Musik erweist übrigens, daß erst die Mehrstimmigkeit (die eine Errungenschaft des letzten Jahrtausends ist) dem Durgeschlechte die Hegemonie verschafft und auch in die Molltonart Durelemente (Dur-Dominante und Akkord der dorischen Sexte) eingeführt hat. Die alte Mollmelodik der Zeit absoluter Einstimmigkeit (wie sie noch heute im Volksgesang der Slawen, Skandinaven und Schotten lebt) weiß von der Dur-Dominante nichts und hat auch nicht das Bedürfnis, auf der Unterquinte des Moll-Akkords (in A moll auf a) abzuschließen. Sagen wir daher, auch die Fundamentierung des Moll-Akkords mit der Unterquinte ist auf ein ästhetisches Bedürfnis zurückzuführen. Der Moll-

Akkord soll nicht kraftlos nach der Tiefe hinab sich erstrecken, sondern erhält denselben Grundpfeiler wie der Dur-Akkord, so daß nur die Moll-Terz zur umgekehrten Auffassung zwingt. Es mag dazu auch wohl mitsprechen, daß tiefe Töne mächtiger, massiger sind als hohe (weil sie größere schwingende Körper erfordern), und daß die reale Existenz und Hörbarkeit der Obertöne die Auffassung des Moll-Akkords ganz in Frage stellen könnte, wenn er nicht dem Quintintervall (dem gewiß wichtigsten des Klanges) seine natürliche Lage

$\genfrac{}{}{0pt}{}{g}{c}$ für Dur wie für Moll

wahrte. Ein A-moll-Akkord der Anordnung a und b:



wird durch das massig in der Tiefe dominierende C oder E leichter die Auffassung irre leiten, als der mit ${}_1$A im Baß (bei c), weil bei jenen beiden durch die starken dritten Obertöne die Quinten C g und E h vom A-moll-Akkord weglenken könnten, während hier die Quinte ${}_1$A e den Akkord gut fundiert. Allerdings gibt die Quintlage (über ${}_1$A) Schwebungen zwischen der Septdezime dieses ${}_1$A (= $\overline{\text{cis}}'$) mit der Moll-Terz c', aber die Primlage über (E) gäbe ebensolche durch die Duodezime h gegen $\overline{\text{c}}$, und auch C im Baß gibt deren durch g gegen a. Gerade für den praktischen Satz spielen sicher die Obertöne eine große Rolle zugunsten des Durgeschlechts; dadurch sollte man sich aber nicht verleiten lassen, die prinzipielle Gegensätzlichkeit von Dur und Moll anzuzweifeln.

Der A-moll-Akkord ist also in A moll Tonika, d. h. von ihm aus werden alle andern Harmonien in ihrem Verwandtschaftsverhältnis zu ihm bemessen und erhalten danach ihre eigenartigen ästhetischen Werte, der D-moll-Akkord als schlichter Quintklang (Subdominante), der E-moll-Akkord als Gegenquintklang (Moll-Dominante), der E-dur-Akkord als Seitenwechselklang (Dur-Dominante). In E moll ist der A-moll-

Akkord schlichter Quintklang (Subdominante), in D moll ist er Gegenquintklang (Moll-Dominante), in E dur ist er Moll-Subdominante. Er kann weiter vorkommen als chromatische Harmonie in H moll (2. Subdominante = Dominante mit Septime, aber Terz und Quinte chromatisch erniedrigt) und G moll (2. Moll-Dominante = Subdominante mit Septime, aber Terz erhöht = Akkord der dorischen Sexte), in C dur (= Subdominante mit großer Septime = [f] : a : c : e), in G dur (= Subdominante mit Sexte c : e : g [a]) und F dur (= Dominante mit Sexte = c : e : g [a]). Also auch hier wieder wird es möglich sein, die möglichen Harmonie-Bedeutungen auf die drei tonalen Funktionen: Tonika, Subdominante und Dominante zurückzuführen.

Sobald ein Akkord aufhört, Tonika zu sein, sobald also ein anderer zur Tonika umgedeutet wird, oder sobald überhaupt die Umdeutung einer Harmonie aus einer Funktion in die andere erfolgt, geschieht eine Modulation. Modulation ist also ganz allgemein eine Veränderung der tonalen Bedeutung der Harmonien. Die Möglichkeiten der Umdeutung sind, zunächst ohne chromatische Veränderungen:

1. T = S und D = T, d. h. Dur-Tonika wird Dur-Subdominante (Dur-Dominante wird Dur-Tonika): C dur — G dur;
2. T = D und S = T, d. h. Dur-Tonika wird Dur-Dominante (Dur-Subdominante wird Dur-Tonika): C dur — F dur;
3. ^{0}T = ^{0}D und ^{0}S = ^{0}T, d. h. Moll-Tonika wird Moll-Dominante (Moll-Subdominante wird Moll-Tonika): A moll — D moll;
4. ^{0}T = ^{0}S und ^{0}D = ^{0}T, d. h. Moll-Tonika wird Moll-Subdominante (= Moll-Dominante wird Moll-Tonika): A moll — E moll;

weiter mit Umdeutung der Dur-Akkorde zu Moll-Akkorden und der Moll-Akkorde zu Dur-Akkorden durch Einstellung des Leittons statt des Prim (Leittonwechselklänge) oder der Sexte statt der Quinte (Parallelklänge):

5. $T = \not{D}$: C dur — A moll;
6. $T = {}^{0}Sp$: C dur — E moll;
7. $T = {}^{0}Dp$: C dur — D moll;
8. ${}^{0}T = \not{S}$: A moll — C dur;
9. ${}^{0}T = Dp$: A moll — F dur;
10. ${}^{0}T = Sp$: A moll — G dur;

mit Umdeutung des Dur-Akkords zum Akkord der neapolitanischen Sexte (Moll-Subdominante mit Vorhalt der $2^{>}$):

11. $T = \not{S}$: C dur — H moll;
12. $S = \not{S}$: C dur — E moll;
13. $D = \not{S}$: C dur — Fis moll;

mit Umdeutung des Dur-Akkords zum Akkord der dorischen Sexte (= Moll-Subdominante mit erhöhter Terz):

14. $T = S^{III<}$: C dur — G moll;
15. $S = S^{III<}$: C dur — C moll;
16. $D = S^{III<}$: C dur — D moll.

Wird im Dur-Akkord die Terz chromatisch erniedrigt, so wird er zum Moll-Akkord mit Subdominant-Bedeutung $T^{3>}_{..} = {}^{0}S$; wird im Moll-Akkord die Terz erhöht, so wird er zum Dur-Akkord mit Dominant-Bedeutung $T^{III<}_{..} = D$. Nun kann aber auch ein Moll-Akkord, der eigentlich Dur-Akkord mit Sexte (Parallelklang) ist (z. B. a c e = Sp in G dur) diese chromatische Veränderung erleiden, oder ein Dur-Akkord, der eigentlich Seitenwechselklang oder ein Parallelklang eines Moll-Akkordes ist — dadurch und durch chromatische Veränderung mehrerer Töne wachsen die Modulationsmöglichkeiten immer weiter, ganz abgesehen noch von der enharmonischen Umdeutung ($\underline{\underline{\text{gis}}} \simeq \text{as}$ usw.). Die näheren Nachweise der Modulationsmöglichkeiten gehören aber nicht hierher (vgl. Katechismus „Harmonie- und Modulationslehre", der die Modulationslehre besonders vollständig gibt). Hier galt es nur zu zeigen, wie der Begriff des Klanges sich zu dem der Tonalität erweiterte, und wie auch dieser noch sich zu dem der Haupttonalität erweitern ließ; denn wie die Klänge um die Tonika, so gruppieren sich wieder die Tonarten um die Haupttonart. Ein Stück, das nur aus einer Tonart in die andere modulierte, aber nicht den Rückweg fände, würde gleichsam mit einer Dissonanz schließen. Die Begriffe ordnen sich also:

1. Ton.

$\underbrace{\text{2. Hauptton — bezogene Töne.}}_{\text{Klang.}}$

$\underbrace{\text{3. Hauptklang — bezogene Klänge.}}_{\text{Tonart.}}$

$\underbrace{\text{4. Haupttonart — Nebentonarten.}}_{\text{Tonartliche Einheit.}}$

Damit sei das Büchlein beschlossen, dessen Schwerpunkt ersichtlich im ersten Kapitel liegt. Man wird aber aus der Vergleichung und Ausgleichung der Gesichtspunkte der drei Kapitel nützliche Lehren ziehen können.

* * *

Die folgende Schlußtabelle ist bestimmt, für das ganze Buch fortgesetzt als bequemes Mittel der Kontrolle der Nachweise zu dienen. Nicht aufgenommen ist in dieselbe A. von Öttingens geistreiche Fortbildung der Logarithmen auf Basis 2 zu Logarithmen auf Basis $\sqrt[1000]{2}$, welche alle Werte als Millioktaven (Tausendstel-Oktaven) ausdrückt und für alle Quinten die Differenz 585 μ (Millioktaven) und für alle Terzen 322 μ ergibt. Abschnitt XXIX. von Öttingens „Das duale Tonsystem" (Leipzig 1913) sei für eingehendere Studien in dieser Richtung empfohlen.

Schlußtabelle

Übersicht der wichtigsten Tonbestimmungen

Ton	Verwandtschaftsgrad*)	Saitenlänge	in Dezimalen (relative Schwingungszahl)	in Logarithmen auf Basis 10 (relative Schwingungszahl)	in Logarithmen auf Basis 2 (relative Schwingungszahl)	Stufen des 53stufigen Systems (in Logarithmen auf Basis 2)	41stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó) (in Logarithmen auf Basis 2)	12stufige gleichschweb. Temperatur (in Logarithmen auf Basis 2)	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
c	Prime	$\frac{1}{1}$	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	**0,00000**	0,00000
$\underline{\text{His}}$	$\frac{T\ 8\ Q}{5\ O}$	$\frac{32768}{32805}$	1,0012	0,00049	0,00162	Schisma			0,01953
$\overline{\overline{\text{deses}}}$	$\frac{3\ O}{2\ T\ 4\ Q}$	$\frac{2025}{2048}$	1,0114	0,00490	0,01629				0,19552
$\overline{c}$	$\frac{4\ Q}{T\ 3\ O}$	$\frac{80}{81}$	1,0125	0,00539	0,01792	synt. Komma 0,01886			0,21506
His	$\frac{12\ Q}{7\ O}$	$\frac{524288}{531441}$	1,0136	0,00588	0,01954	pythagor. Komma	0,02439		0,23460
$\overline{\overline{\overline{\text{deses}}}}$	$\frac{O}{3\ T}$	$\frac{125}{128}$	1,024	0,01030	0,03421	kl. Diesis			0,41058
$\overline{\overline{c}}$	$\frac{8\ Q}{2\ T\ 4\ O}$	$\frac{6400}{6561}$	1,0252	0,01079	0,03584				0,43012

						..0,03773			
cis	$\frac{3\,T\,2\,O}{5\,Q}$	$\frac{243}{250}$	1,0288	0,01233	0,04097		0,04878		0,49166
						..0,05660			
cis	$\frac{2\,T}{Q}$	$\frac{24}{25}$	1,04165	0,01772	0,05889	kl. Chroma			0,70672
							0,07317		
des	$\frac{3\,O}{5\,Q}$	$\frac{243}{256}$	1,05351	0,02263	0,07519	pythagor. Limma			0,90224
						..0,07547			
cis	$\frac{T\,3\,Q}{2\,O}$	$\frac{128}{135}$	1,05470	0,02312	0,07681	gr. Chroma			0,92178
						....		**0,083333**	**1,00000**
*cis (des)	17. Oberton	$\frac{16}{17}$	1,0625	0,02632	0,08746				1,04912
des	$\frac{O}{T\,Q}$	$\frac{15}{16}$	1,06666	0,02802	0,09311	Leittonschritt			1,11732
						..0,09433			
cis	$\frac{7\,Q}{4\,O}$	$\frac{2048}{2187}$	1,06785	0,02851	0,09473	pythagor. Apotome			1,13685
							0,09756		
8* e♭♭♭	$\frac{4\,O}{5\,Q\,3\,T}$	$\frac{30375}{32768}$	1,0788	0,03293	0,10940				1,31288

*) Q bedeutet einen Quintschritt nach oben, $\frac{1}{Q}$ einen nach unten, dgl. ist T = Terzschritt, O = Oktavschritt nach oben, $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{O}$ ein solcher nach unten.

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53stufigen Systems	41stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó)	12stufige gleichschweb. Temperatur	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl			in Logarithmen auf Basis 2			
des	$\frac{3\,Q}{2\,T\,O}$	$\frac{25}{27}$	1,08	0,03342	0,11103				1,33237
						..0,11320			
						..0,13207	0,12195		
d	$\frac{2\,T\,3\,O}{6\,Q}$	$\frac{729}{800}$	1,0974	0,04037	0,13409				1,60897
cisis	$\frac{3\,T\,2\,Q}{2\,O}$	$\frac{1024}{1125}$	1,0986	0,04085	0,13570				1,62840
							0,14634		
eses	$\frac{6\,O}{10\,Q}$	$\frac{59049}{65536}$	1,1098	0,04526	0,15038				1,80449
						..0,15094			
d	$\frac{T\,O}{2\,Q}$	$\frac{9}{10}$	1,11111	0,04575	0,15200	kl. Ganzton			1,82403
cisis	$\frac{2\,T\,6\,Q}{4\,O}$	$\frac{16384}{18225}$	1,11135	0,04624	0,15642				1,85544
						......		**0,16666**	**..2,00000**
eses	$\frac{4\,O}{T\,6\,Q}$	$\frac{3645}{4096}$	1,12374	0,05066	0,168300				2,01960
						..0,16981			
d	$\frac{2\,Q}{O}$	$\frac{8}{9}$	1,125	0,05115	0,16992	gr. Ganzton			2,03910

$\underline{\text{cisis}}$	$\frac{T\,10\,Q}{6\,O}$	$\frac{262144}{295245}$	1,12625	0,05164	0,17154		0,17073		2,05848
$\overline{\overline{\text{eses}}}$	$\frac{2\,O}{2\,T\,2\,Q}$	$\frac{225}{256}$	1,13776	0,05605	0,18622	verm. Terz			2,23262
$\bar{\text{d}}$	$\frac{6\,Q}{T\,3\,O}$	$\frac{640}{729}$	1,13909	0,05654	0,18784	..0,18868			2,37568
$\overline{\overline{\overline{\text{eses}}}}$	$\frac{2\,Q}{3\,T}$	$\frac{125}{144}$	1,152	0,06145	0,20414		0,19512		2,44968
$\bar{\bar{\text{d}}}$	$\frac{10\,Q}{2\,T\,5\,O}$	$\frac{51200}{59049}$	1,1533	0,06194	0,20576				2,46912
$\underline{\underline{\underline{\text{dis}}}}$	$\frac{O\,3\,T}{3\,Q}$	$\frac{108}{125}$	1,15740	0,06348	0,21089	..0,20754			2,53076
$\underline{\underline{\text{dis}}}$	$\frac{2\,T\,Q}{O}$	$\frac{64}{75}$	1,17187	0,06888	0,22881	..0,22641 überm. Sekunde	0,21951		2,74582
es	$\frac{2\,O}{3\,Q}$	$\frac{27}{32}$	1,18518	0,07378	0,24511	pythag. kl. Terz			2,94134
$\underline{\text{dis}}$	$\frac{T\,5\,Q}{3\,O}$	$\frac{1024}{1215}$	1,18652	0,07427	0,25673	..0,24528	0,24390		3,96088
						....		**0,25**	**..3,00000**
$\bar{\text{es}}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{5}{6}$	1,2	0,07718	0,26303	kl. Terz			3,15636

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53 stufigen Systems	41 stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó)	12 stufige gleichschweb. Temperatur	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl			in Logarithmen auf Basis 2			
dis	$\frac{9\ Q}{5\ O}$	$\frac{16384}{19693}$	1,2020	0,07989	0,26465	..0,26415			3,17580
							0,26829		
es	$\frac{5\ Q}{2T\ 2\ O}$	$\frac{200}{243}$	1,215	0,08457	0,28095	..0,28302			3,37140
							0,29268		
e	$\frac{O\ 2\ T}{4\ Q}$	$\frac{81}{100}$	1,23445	0,091514	0,304008	..0,30181			3,64807
disis	$\frac{3\ T\ 4\ Q}{3\ O}$	$\frac{8192}{10125}$	1,23596	0,09200	0,30563				3,66756
							0,31707!		
fes	$\frac{4\ O}{8\ Q}$	$\frac{6561}{8192}$	1,24849	0,09641	0,32030	..0,32075			3,84360
e	T	$\frac{4}{5}$	1,25	0,09691	0,32192	Terz			3,86304
						....		**..0,33333**	**..4,00000**
fes	$\frac{3\ O}{4\ Q\ T}$	$\frac{405}{512}$	1,26419	0,10178	0,33882	..0,33962			4,05864
e	$\frac{4\ Q}{2\ O}$	$\frac{64}{81}$	1,26562	0,10230	0,33984	pyth. Terz			4,07928

$\overline{\overline{\mathrm{fes}}}$	$\frac{O}{2\,T}$	$\frac{25}{32}$	1,28	0,10721	0,35614	verm. Quarte	0,34146		4,27368
						..0,35849	0,36585		
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{fes}}}}$	$\frac{4\,O}{3\,T\,2\,O}$	$\frac{125}{162}$	1,296	0,11260	0,37406				4,48872
								..0,37736	
$\underline{\underline{\mathrm{eis}}}$	$\frac{3\,T}{Q}$	$\frac{96}{125}$	1,3021	0,11463	0,38082		0,39024		4,56984
						..0,39622			
$\underline{\mathrm{f}}$	$\frac{T\,2\,O}{5\,Q}$	$\frac{243}{320}$	1,31685	0,11954	0,39711				4,76541
$\underline{\underline{\mathrm{eis}}}$	$\frac{3\,Q\,2\,T}{2\,O}$	$\frac{512}{675}$	1,31835	0,12003	0,39874	überm. Terz			4,78490
							0,41463(!)		
f	$\frac{O}{Q}$	$\frac{3}{4}$	1,33333	0,12493	0,41503	Quarte			4,88036
						..0,41509			
						....		**0,41666**	**..5,00000**
$\underline{\mathrm{eis}}$	$\frac{T\,7\,Q}{4\,O}$	$\frac{8192}{10935}$	1,33485	0,12542	0,42666				5,11993
$\overline{\mathrm{f}}$	$\frac{3\,Q}{T\,O}$	$\frac{20}{27}$	1,35	0,13033	0,43295				5,19540
						..0,43396			
eis	$\frac{11\,Q}{6\,O}$	$\frac{131072}{177147}$	1,3515	0,13081	0,43458				5,21496
							0,43902		
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{geses}}}}$	$\frac{2\,O}{3\,T\,Q}$	$\frac{375}{512}$	1,36535	0,13523	0,44925				5,39100

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53stufigen Systems	41stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó)	12stufige gleichschweb. Temperatur	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl			in Logarithmen auf Basis 2			
fis	$\frac{3\ O\ 3\ T}{6\ Q}$	$\frac{729}{1000}$	1,3716	0,13722	0,45601	..0,45283			5,47212
						....			
*f (fis)	11. Oberton	$\frac{8}{11}$	1,375	0,13830	0,45943		0,46341		5,51316
fis	$\frac{2\ T\ O}{2\ Q}$	$\frac{18}{25}$	1,38888	0,14266	0,47393	..0,47170 kl. überm. Quarte			5,68716
							0,48780		
ges	$\frac{4\ O}{6\ Q}$	$\frac{729}{1024}$	1,40459	0,14757	0,49022	..0,49056			5,88264
fis	$\frac{2\ Q\ T}{O}$	$\frac{32}{45}$	1,40625	0,14805	0,49185	gr. überm. Quarte			5,90220
						....		0,5	..6,00000
ges	$\frac{2\ O}{2\ Q\ T}$	$\frac{45}{64}$	1,42222	0,15296	0,50814	kl. verm. Quinte			6,09776
						..0,50943	0,51219		
fis	$\frac{6\ Q}{3\ O}$	$\frac{512}{729}$	1,42375	0,15345	0,50977				6,11730
ges	$\frac{2\ Q}{2\ T}$	$\frac{25}{36}$	1,44	0,15835	0,52606	gr. verm. Quinte			6,31282

						..0,52830	0,53658		
ges	$\frac{6\ Q}{3\ T\ 2\ O}$	$\frac{500}{729}$	1,458	0,16375	0,54398				6,52776
						..0,54717			
fisis	$\frac{3\ T\ Q}{O}$	$\frac{256}{375}$	1,4646	0,16579	0,55074				6,60888
							0,56097		
asas	$\frac{7\ O}{11\ Q}$	$\frac{177147}{262144}$	1,4798	0,17021	0,56541				6,78492
						..0,56604			
g	$\frac{T\ 2\ O}{3\ Q}$	$\frac{27}{40}$	1,48148	0,17069	0,56704				6,80448
fisis	$\frac{5\ Q\ 2\ T}{3\ O}$	$\frac{2048}{3025}$	1,48315	0,17118	0,56866				6,82392
asas	$\frac{5\ O}{T\ 7\ Q}$	$\frac{10935}{16384}$	1,49835	0,17560	0,58333	....		**..0,58333**	**7,00000**
						..0,58490			
g	Q	$\frac{2}{3}$	1,5	0,17609	0,58496	Quinte			7,01955
							0,58536!		
asas	$\frac{3\ O}{2\ T\ 3\ Q}$	$\frac{675}{1024}$	1,51705	0,18099	0,60125				7,21500
g	$\frac{5\ Q}{T\ 2\ O}$	$\frac{160}{243}$	1,51875	0,18148	0,60288				7,23456
						..0,60377			
fisis	$\frac{13\ Q}{7\ O}$	$\frac{1048576}{1594323}$	1,52095	0,18200	0,60450				7,25400

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53 stufigen Systems	41 stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó)	12 stufige gleichschweb. Temperatur	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl			in Logarithmen auf Basis 2			
							0,60975		
$\overline{\overline{\overline{\text{asas}}}}$	$\frac{Q\ O}{3\ T}$	$\frac{125}{192}$	1,536	0,18639	0,61917				7,43004
						..0,62264	0,63414		
						..0,64152			
$\underline{\underline{\text{gis}}}$	$2\ T$	$\frac{16}{25}$	1,5625	0,19382	0,64385	überm. Quinte			7,72627
							0,65853		
as	$\frac{3\ O}{4\ Q}$	$\frac{81}{128}$	1,58024	0,19872	0,66015				7,92179
						..0,66038			
$\underline{\text{gis}}$	$\frac{T\ 4\ Q}{2\ O}$	$\frac{256}{405}$	1,58203	0,19920	0,66177				7,94133
								..0,66666	**8,00000**
$\overline{\text{as}}$	$\frac{O}{T}$	$\frac{5}{8}$	1,6	0,20412	0,67807				8,13686
						..0,67924			
gis	$\frac{8\ Q}{3\ O}$	$\frac{4096}{6561}$	1,60182	0,20461	0,67969				8,15628
							0,68292		
$\overline{\overline{\text{as}}}$	$\frac{4\ Q}{O\ 2\ T}$	$\frac{50}{81}$	1,62	0,20951	0,68599				8,23188

*as (a)	13. Oberton	$\frac{8}{13}$	1,625	0,21085	0,70043	..0,69811	0,70731		8,40516
$\underline{\underline{\text{a}}}$	$\frac{3\,O\,2\,T}{5\,Q}$	$\frac{243}{400}$	1,64609	0,21646	0,71904	..0,71698			8,62852
$\underline{\underline{\underline{\text{gisis}}}}$	$\frac{3\,T\,3\,Q}{2\,O}$	$\frac{2048}{3375}$	1,64895	0,21694	0,72067				8,64804
heses	$\frac{5\,O}{9\,Q}$	$\frac{19693}{32768}$	1,66475	0,22135	0,73534		0,73170		8,82408
$\underline{\text{a}}$	$\frac{T}{Q}$	$\frac{3}{5}$	1,66666	0,22184	0,73696	..0,73585 gr. Sexte			8,84358
						....		0,75	..9,00000
$\overline{\text{heses}}$	$\frac{4\,O}{T\,5\,Q}$	$\frac{1215}{2048}$	1,68473	0,22652	0,75326				9,03911
a	$\frac{3\,Q}{O}$	$\frac{16}{27}$	1,69375	0,22724	0,75488	..0,75472	0,75609		9,05865
$\overline{\overline{\text{heses}}}$	$\frac{2\,O}{2\,T\,Q}$	$\frac{75}{128}$	1,70666	0,23214	0,77118	verm. Septime			9,25417
$\overline{\text{a}}$	$\frac{7\,Q}{T\,3\,O}$	$\frac{1280}{2187}$	1,70856	0,23263	0,77280				9,27360
$\overline{\overline{\overline{\text{heses}}}}$	$\frac{3\,Q}{3\,T}$	$\frac{125}{216}$	1,728	0,23754	0,78910	..0,77359	0,78048		9,46923

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53stufigen Systems (in Logarithmen auf Basis 2)	41stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó) (in Logarithmen auf Basis 2)	12stufige gleichschweb. Temperatur (in Logarithmen auf Basis 2)	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl						
$\underline{\underline{\underline{\text{ais}}}}$	$\frac{3\,T\,O}{2\,Q}$	$\frac{72}{125}$	1,73611	0,23957	0,79586	..0,79245			9,55031
							0,80487		
*b	7. Oberton	$\frac{4}{7}$	1,75	0,24303	0,80735				9,68825
						..0,81132			
$\underline{\underline{\text{ais}}}$	$\frac{2\,T\,2\,Q}{O}$	$\frac{128}{225}$	1,75781	0,24497	0,81378	überm. Sexte			9,76537
							0,82926		
b	$\frac{2\,O}{2\,Q}$	$\frac{9}{16}$	1,77777	0,24987	0,83007	kl. kl. Septime			9,96089
						..0,83019			
$\underline{\text{ais}}$	$\frac{T\,6\,Q}{3\,O}$	$\frac{2048}{3645}$	1,77975	0,25036	0,83170				9,98040
						......		**0,83333**	**10,00000**
$\overline{\text{b}}$	$\frac{2\,Q}{T}$	$\frac{5}{9}$	1,8	0,25527	0,84799	gr. kl. Septime			10,17596
ais	$\frac{10\,Q}{5\,O}$	$\frac{32768}{59049}$	1,80203	0,25576	0,84962				10,19550
						..0,84990	0,85365		
$\overline{\overline{\text{b}}}$	$\frac{6\,Q}{2\,T\,2\,O}$	$\frac{400}{779}$	1,8225	0,26065	0,86591				10,39102

$\underline{\underline{\mathrm{h}}}'$	$\frac{2\,T\,2\,Q}{3\,Q}$	$\frac{27}{50}$	1,85185	0,26759	0,88897	..0,86793 ..0,88679	0,87804		10,66762
$\underline{\underline{\underline{\mathrm{aisis}}}}$	$\frac{3\,T\,5\,Q}{3\,O}$	$\frac{16384}{30375}$	1,85395	0,26809	0,89059				10,68708
ces′	$\frac{5\,O}{7\,Q}$	$\frac{2187}{4096}$	1,87288	0,27251	0,90526		0,90243		10,86314
$\underline{\mathrm{h}}$	T Q	$\frac{8}{15}$	1,875	0,27300	0,90689	..0,90566 gr. Septime			10,88268
$\underline{\underline{\mathrm{aisis}}}$	$\frac{2\,T\,9\,Q}{5\,O}$	$\frac{262144}{492075}$	1,88145	0,27349	0,90851				10,90212
						....		**0,91666**	**11,00000**
$\overline{\mathrm{ces}}'$	$\frac{3\,O}{T\,3\,Q}$	$\frac{135}{256}$	1,89626	0,27790	0,92318	verm. Oktave			11,07821
h	$\frac{5\,Q}{2\,O}$	$\frac{128}{243}$	1,89843	0,27829	0,92418	..0,92453	0,92682		11,09775
$\overline{\overline{\mathrm{ces}}}'$	$\frac{Q\,O}{2\,T}$	$\frac{25}{48}$	1,92	0,28330	0,94110				11,29327
$\overline{\mathrm{h}}$	$\frac{9\,Q}{T\,4\,O}$	$\frac{10240}{19683}$	1,92119	0,28379	0,94273	..0,94340	0,95121		11,31276
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{ces}}}}'$	$\frac{5\,Q}{3\,T\,O}$	$\frac{125}{243}$	1,944	0,28869	0,95902				11,50833

Ton	Verwandtschaftsgrad	Saitenlänge	in Dezimalen	in Logarithmen auf Basis 10	in Logarithmen auf Basis 2	Stufen des 53stufigen Systems	41stufige gleichschweb. Temperatur (P. von Jankó)	12stufige gleichschweb. Temperatur	in Logarithmen auf Basis $\sqrt[12]{2}$
			relative Schwingungszahl			in Logarithmen auf Basis 2			
						..0,96227			
c′	$\frac{2\,T\,5\,O}{8\,Q}$	$\frac{6561}{12800}$	1,95092	0,28923	0,96416				11,56987
his	3 T	$\frac{64}{125}$	1,95312	0,28973	0,96578				11,58941
							0,97560		
deses′	$\frac{8\,O}{12\,Q}$	$\frac{531441}{1048576}$	1,97308	0,29511	0,98045				11,76539
						..0,98113			
c′	$\frac{T\,3\,O}{4\,Q}$	$\frac{81}{160}$	1,97530	0,29563	0,98208				11,78493
his	$\frac{2\,T\,4\,Q}{2\,O}$	$\frac{1024}{2025}$	1,97755	0,29612	0,98370				11,80440
deses′	$\frac{6\,O}{T\,8\,Q}$	$\frac{32805}{65536}$	1,99774	0,30053	0,99837				11,98046
c′	O	$\frac{1}{2}$	2,00000	0,30103	1,00000	**1,00000**	**1,00000**	**1,00000**	**12,00000**

Alphabetisches Sachregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Druck von Frankenstein & Wagner, Leipzig.

20. Riemann, Handbuch der Gesangskomposition. (Lied, Chorlied, Duett, Motette) 2. Aufl. geb. M. 5,— (brosch. M. 3,60).

21. Riemann, Handbuch der Akustik. 2. Aufl. geb. M. ~~[illegible]~~ 11.50 (brosch. M. 1,85).

30. Riemann, Anleitung zum Partiturspiel. 2. Aufl. geb M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

31. Riemann, Handbuch der Orchestrierung. (Anleitung zum Instrumentieren) 2. Aufl. geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

32. Thauer, H., Handbuch des modernen Zitherspiels, geb. M. 3,60 (brosch. M. 2,60).

33. Stahl, Geschichtliche Entwicklung der evangelischen Kirchenmusik, geb. M. 2,30 (brosch. M. 1,40).

34. Winter, G., Das deutsche Volkslied. (Einführung in die Geschichte und das Wesen des deutschen Volksliedes) geb. M. 2,75 (brosch. M. 1,85).

51. Riemann, Analyse von Beethovens sämtlichen Klaviersonaten Band I, 2. Aufl. geb. M. 7,40 (brosch. M. 6,–).

52. Riemann, Analyse von Beethovens sämtlichen Klaviersonaten Band II, geb c. M. 9,50 (brosch. M. 8,—).